

УДК 519.6

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЯВНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ ЗАДАЧИ НАСЫЩЕННО-НЕНАСЫЩЕННОЙ ФИЛЬТРАЦИОННОЙ КОНСОЛИДАЦИИ

М.Ф. Павлова, Е.В. Рунг

Аннотация

Построена и исследована неявная разностная схема для задачи насыщенно-ненасыщенной фильтрационной консолидации при условии полупроницаемости на части границы. С помощью метода штрафа устанавливается существование решения разностной задачи. Исследование сходимости разностной схемы проводится при минимальных предположениях о гладкости исходных данных: доказывается сходимость кусочно-постоянных исполнений разностного решения к обобщенному решению рассматриваемой задачи.

Ключевые слова: фильтрационная консолидация, разностные схемы, метод штрафа, сходимость разностной схемы.

1. Постановка задачи

Взаимосвязанный процесс деформирования пористой среды и фильтрации содержащейся в ней жидкости под действием внешних сил называется фильтрационной консолидацией. При этом говорят о насыщенной фильтрационной консолидации, если поры среды полностью заняты жидкостью, и о ненасыщенной фильтрационной консолидации – в противном случае. С помощью модели насыщенной фильтрационной консолидации могут быть описаны процессы осадки сооружений на насыщенных пластах, процессы деформирования пористого скелета и другие. Однако в приложениях часто возникают ситуации (например, задача о разгрузке пористого пласта), когда среда содержит зоны и полного, и неполного насыщения, которые могут изменяться с течением времени. Для описания этого процесса в работе [1] предложена математическая модель, названная насыщенно-ненасыщенной фильтрационной консолидацией. Эта модель включает в себя суммарное уравнение движения (квазиравновесия) фаз

$$-\operatorname{div} \sigma^f + \nabla(p^+ - ms(p)p^-) = f(s(p)) \quad (1)$$

и уравнения совместного деформирования фаз

$$m \frac{\partial s(p)}{\partial t} + \operatorname{div} q + \eta_1 s(p) \frac{\partial(\operatorname{div} u)}{\partial t} = 0. \quad (2)$$

Здесь σ^f – тензор эффективных напряжений, p – поровое давление, u – вектор макроперемещений частиц скелета, q – скорость фильтрации, m – пористость среды, $s(p)$ – насыщенность, вектор-функция $f(s(p))$ – плотность массовых сил, $p^+ = (|p| + p)/2$, $p^- = p^+ - p$.

Будем полагать, что скорость фильтрации q связана с p следующим законом

$$q = -b(s(p))(\nabla p - \rho g), \quad (3)$$

реологические соотношения, связывающие эффективные напряжения с деформациями скелета, – линейные:

$$\sigma^f = A\Lambda(u) + B\Lambda\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right). \quad (4)$$

Здесь функция $b(s(p))$ – относительная фазовая проницаемость среды, ρ – плотность жидкости, g – вектор силы тяжести, $\Lambda(u)$ и $\Lambda\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)$ – тензор деформаций и тензор скоростей деформаций соответственно, A и B – линейные операторы, действующие в евклидовом пространстве H_3 симметричных тензоров второго ранга.

Задачу (1)–(4) будем рассматривать в области Ω , имеющей форму прямоугольника $\Omega = \{(x_1, x_2) \in R^2 : -a \leq x_1 \leq a, -H \leq x_2 \leq 0\}$, $\Gamma = \bigcup_{i=1}^3 \Gamma_i$ – граница Ω , где

$$\Gamma_2 = \{(x_1, x_2) \in \Gamma : x_2 = 0, a_1 < |x_1| \leq a\},$$

$$\Gamma_3 = \{(x_1, x_2) \in \Gamma : x_2 = 0, 0 \leq |x_1| \leq a_1 < a\},$$

Γ_1 – оставшаяся часть Γ , $Q_T = \Omega \times (0, T)$.

Будем предполагать, что при $t \in (0, T]$ выполнены следующие краевые условия¹:

$$u_i(x, t) = 0, \quad x \in \Gamma_1; \quad (5)$$

$$\sigma_{12}^f = 0, \quad x \in \Gamma_3 \cup \Gamma_2; \quad -\sigma_{22}^f + p^+ - ms(p)p^- = \begin{cases} 0, & x \in \Gamma_2, \\ F(t), & x \in \Gamma_3; \end{cases} \quad (6)$$

$$q_n(x, t) = 0, \quad x \in \Gamma_1; \quad p(x, t) = 0, \quad x \in \Gamma_3; \quad (7)$$

$$p(x, t)q_n(x, t) = 0, \quad p(x, t) \leq 0, \quad q_n(x, t) \geq 0, \quad x \in \Gamma_2. \quad (8)$$

Здесь $q_n(x, t) = (q, n)$, где n – внешняя нормаль к границе Γ .

Начальные условия задаются в виде

$$u_i(x, 0) = u_i^0(x), \quad (p(x, 0))^- = p_0^-(x). \quad (9)$$

Математическому исследованию задачи (1)–(9) посвящены работы [2, 3], где, в частности, рассмотрен вопрос существования обобщенного решения. Причем в работе [3] разрешимость задачи (1)–(9) доказана при более слабых, по сравнению с [2], ограничениях. Для пояснения рассмотрим, например, наиболее часто используемые в приложениях зависимости вида

$$s(p) = \begin{cases} (1-p)^{-\mu}, & p \leq 0, \\ 1, & p > 0, \end{cases} \quad b(s) = s^\nu, \quad 0 \leq s \leq 1, \quad \mu \geq 0, \quad \nu > 0. \quad (10)$$

Результат работы [2] для зависимостей вида (10) справедлив при условии, что $\mu\nu \leq 1$ (заметим, что наиболее популярный, по-видимому, случай, когда $\mu = 1$, $\nu = 3$, этим условием исключается). В [3] существование обобщенного решения для зависимостей вида (10) доказана для любых $\mu > 0$, $\nu > 0$. Поэтому в настоящей работе при построении разностной схемы будем использовать предложенное в работе [3] определение обобщенного решения задачи (1)–(9).

¹Выбор вида области Ω и краевых условий обусловлен их целесообразностью с точки зрения приложений.

2. Обобщенная формулировка задачи

Доказательство разрешимости задачи (1)–(9) в работах [2, 3] проводилось путем применения преобразования Кирхгофа, при этом от неизвестной функции $p(x, t)$ переходят к функции $w(x, t) = \vartheta(p(x, t))$, где

$$\vartheta(p) = \int_0^p b(s(\xi)) d\xi. \quad (11)$$

В [3] было отмечено, что в условиях (10) при $\mu\nu > 1$ областью значений функции $\vartheta(p)$ является лишь часть числовой оси, а именно множество $(-\gamma, +\infty)$, здесь

$$\gamma = \int_{-\infty}^0 b(s(\xi)) d\xi. \quad (12)$$

В теории фильтрации γ называют макроскопической капиллярной длиной. Из работы [4] следует, что γ , как правило, имеет конечное значение. При перечисленных выше условиях решение исходной задачи, переформулированное в терминах (u_1, u_2, w) , очевидно, требует ограничения вида $w \geq -\gamma$. Чтобы избежать введения такого ограничения, в [3] вводится так называемая «доопределенная» задача.

С этой целью по известным $s(p)$, $b(s)$, $\vartheta(p)$ (см. (11)) строятся функции

$$\varphi(w) = \begin{cases} s(\vartheta^{-1}(w)), & w > -\gamma, \\ 0, & w \leq -\gamma, \end{cases} \quad \varphi_1(w) = \begin{cases} s(\vartheta^{-1}(w))(\vartheta^{-1}(w))^{-}, & w > -\gamma, \\ 0, & w \leq -\gamma. \end{cases} \quad (13)$$

При построении доопределенной задачи в уравнениях (1)–(9) $s(p)$ заменяется на $\varphi(w)$, $s(p)p^-$ – на $\varphi_1(w)$, $b(s(p))\nabla p$ – на ∇w .

Нетрудно видеть, что, если функции u_1, u_2, w являются решением доопределенной задачи и $w(x, t) \geq -\gamma$ для любых $(x, t) \in Q_T$, то $u_1, u_2, \vartheta^{-1}(w)$ – решение задачи (1)–(9).

В дальнейшем, следуя [3], будем предполагать, что для функций $s(p)$, $b(s)$ и операторов A, B выполнены следующие условия.

A₁. Функция $s : \mathbb{R} \rightarrow (0, 1]$ – неубывающая, непрерывная, кусочно-дифференцируемая функция такая, что $s(p) = 1$ при любом $p \geq 0$.

A₂. Функция $b : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ – неубывающая, непрерывная.

A₃. Отображение $\vartheta : \mathbb{R} \rightarrow (-\gamma, +\infty)$, заданное формулой (11), взаимнооднозначно, где γ – параметр, определенный в (12).

A₄. Существуют константы $\kappa > 0$, $C_\varphi > 0$ и $C_\vartheta > 0$ такие, что

$$\varphi'(\eta) \varphi^{2\kappa-1}(\eta) \leq C_\varphi \quad \forall \eta \in (-\gamma, 0), \quad (14)$$

$$|\varphi_1(\eta)| \leq C_\vartheta \quad \forall \eta \in (-\gamma, 0). \quad (15)$$

Заметим, что для функций вида (10) оценки (14), (15) при $\kappa > \nu/2$ справедливы для всех μ и ν , удовлетворяющих условию $(\mu\nu - 1) > 0$.

A₅. A и B – линейные, симметричные, ограниченные и положительно определенные операторы, действующие в H_3 .

В дальнейшем нам понадобятся следующие обозначения: $\overset{\circ}{V}$ – замыкание гладких функций, равных нулю на Γ_1 , в норме пространства $W_2^1(\Omega)$, $\overset{\circ}{V}_1$ – замыкание гладких функций, равных нулю на Γ_3 , в норме того же пространства,

$$K = \left\{ w \in \overset{\circ}{V}_1 : w(x) \leq 0 \text{ п. в. на } \Gamma_2 \right\}.$$

Определение 1. Обобщенным решением доопределенной задачи назовем тройку функций (u_1, u_2, w) , для которых справедливы следующие условия:

$$u_i, \frac{\partial u_i}{\partial t} \in L_2(0, T; \overset{\circ}{V}), \quad u_i(x, 0) = u_i^0(x) \quad \text{п. в. на } \Omega, \quad i = 1, 2,$$

$$w \in L_2(0, T; K), \quad w^-(x, 0) = w_0^-(x) \quad \text{п. в. на } \Omega,$$

для любых функций $v_i \in L_2(0, T; \overset{\circ}{V})$, $i = 1, 2$, имеют место равенства

$$\int_{Q_T} \left\{ \sum_{j=1}^2 \sigma_{ij}^f \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - [w^+ - m\varphi_1(w)] \frac{\partial v_i}{\partial x_i} - f_i(\varphi(w))v_i \right\} dx dt =$$

$$= \delta_{i2} \int_0^T \int_{\Gamma_3} F(x, t)v_i dx dt, \quad (16)$$

и для произвольной функции $z \in L_2(0, T; K)$, имеющей производную $\frac{\partial z}{\partial t} \in L_2(Q_T)$, и любой неотрицательной функции $\alpha(t) \in C^1([0, T])$ такой, что $\alpha(T) = 0$, справедливо неравенство

$$\int_{Q_T} \left\{ \eta_1 \varphi(w) \frac{\partial(\operatorname{div} u)}{\partial t} \alpha(t) (z - w) + \nabla w \cdot \nabla(\alpha(t) (z - w)) \right\} dx dt +$$

$$+ [m\partial_t \varphi(w), \alpha(t)(z - w)] \geq \int_{Q_T} b(\varphi(w)) \rho g_2 \frac{\partial(z - w)}{\partial x_2} dx dt. \quad (17)$$

В (17) полагается

$$[m\partial_t \varphi(w), \alpha(t)(z - w)] = \int_{Q_T} m\Phi(w)\partial_t \alpha(t) dx dt - \int_{Q_T} m\varphi(w)\partial_t(\alpha z) dx dt +$$

$$+ \int_{\Omega} m\Phi(-w_0^-)\alpha(0) dx - \int_{\Omega} m\varphi(-w_0^-)z(x, 0)\alpha(0) dx,$$

где $\Phi(\xi) = \int_0^\xi \varphi'(\zeta)\zeta d\zeta$, $g_2 = (g, x_2)$.

3. Построение разностной схемы

На Ω построим равномерную сетку $\bar{\omega}$ с шагами $h_1 = 2a/N_1$ и $h_2 = H/N_2$ по x_1 и x_2 соответственно. Число N_1 выбирается таким образом, чтобы точки $x = (\pm a_1, 0)$ были из $\bar{\omega}$. Пусть $\gamma_i = \bar{\omega} \cap \Gamma_i$, $i = 1, 2, 3$, $\gamma = \bigcup_{i=1}^3 \gamma_i$ – множество узлов сетки, принадлежащих Γ , $\omega = \bar{\omega} \setminus \gamma$. Через τ будем обозначать шаг по времени, $\omega_\tau = \{\tau, 2\tau, \dots, T = M\tau\}$, $\bar{\omega}_\tau = \{0, \tau, 2\tau, \dots, T\}$.

Пусть V_h – пространство сеточных функций, определенных на $\bar{\omega}$. Обозначим через $\overset{\circ}{V}_h$ множество сеточных функций из V_h , равных нулю на границе γ_1 , через V_{h1} множество сеточных функций из V_h , равных нулю на границе γ_3 . Пусть

$$K_h = \{w \in \overset{\circ}{V}_{h1} : w(x) \leq 0 \quad \text{п. в. на } \gamma_2\}.$$

Введем в рассмотрение вектор $r = (r_1, r_2)$, координаты которого могут принимать значения ± 1 . Для сеточной функции y определим разностные отношения $\partial_{r_i} y$ по формуле

$$\partial_{r_i} y = \begin{cases} y_{x_i}, & r_i = +1, \\ y_{\bar{x}_i}, & r_i = -1. \end{cases}$$

Вектор $\nabla_r y = (\partial_{r_1} y, \partial_{r_2} y)$ является разностным аналогом градиента функции, а $\operatorname{div}_r v = \partial_{r_1} v_1 + \partial_{r_2} v_2$ – разностным аналогом дивергенции вектора $v = (v_1, v_2)$.

Для $x \in \bar{\omega}$ обозначим через $H_r(x)$ ячейку сетки $\bar{\omega}$, которая содержит все точки сетки, участвующие в записи оператора $\nabla_r y(x)$. Пусть ω_r – множество точек $x \in \bar{\omega}$, в которых определен оператор $\nabla_r y(x)$.

В пространстве V_h введем следующие нормы и скалярные произведения:

$$(y, v)_r = \sum_{x \in \omega_r} h_1 h_2 y(x) v(x), \quad [y, v] = \frac{1}{4} \sum_r (y, v)_r, \quad (18)$$

$$\|y\| = [|y|^2, 1]^{1/2}, \quad \|y\|_+^2 = \frac{1}{4} \sum_r \sum_{i=1}^2 (|\partial_{r_i} y|^2, 1)_r,$$

$$(y, v)_{r, \gamma_i} = \sum_{x \in \omega_r \cap \gamma_i} h_1 y(x) v(x), \quad [y, v]_{\gamma_i} = \frac{1}{2} \sum_r (y, v)_{r, \gamma_i}, \quad i = 2, 3.$$

Определим для сеточных функций кусочно-постоянные восполнения по x и t :

$$\begin{aligned} \Pi_r z(x) &= \{z(x'), x' \in \omega_r : x \in H_r(x')\}, \\ \Pi^+ \omega(t') &= \{\omega(k\tau) : k\tau \leq t' < (k+1)\tau\}, \\ \Pi^- \omega(t') &= \{\omega(k\tau) : (k-1)\tau \leq t' < k\tau\}. \end{aligned}$$

Используя введенные выше обозначения, легко можно видеть, что для любых сеточных функций $y, v \in V_h$ выполняется следующее равенство:

$$(y, v)_r = \int_{\Omega} \Pi_r y \cdot \Pi_r v \, dx. \quad (19)$$

Определение 2. Тройку функции $y_1, y_2, w_{h\tau}$, определенных на $\bar{\omega} \times \bar{\omega}_\tau$, таких, что $y_i(t) \in \overset{\circ}{V}_h$, $i = 1, 2$, $w_{h\tau}(t) \in K_h$ для любого $t \in \bar{\omega}_\tau$, назовем решением неявной разностной схемы, если для любых $x \in \bar{\omega}$

$$y_i(x, 0) = y_i^0(x), \quad i = 1, 2, \quad (w_{h\tau}(x, 0))^- = w_{h\tau 0}^-(x),$$

для любых функций $v_i \in \overset{\circ}{V}_h$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_r \left(\sum_{j=1}^2 \left((A\Lambda_r(\hat{y}))_{ij} + (B\Lambda_r(y_t))_{ij} \right), \partial_{r_j} v_i \right)_r - \frac{1}{4} \sum_r \left(\hat{w}_{h\tau}^+ - m\varphi_1(\hat{w}_{h\tau}), \partial_{r_i} v_i \right)_r = \\ = \left[f_i(\varphi(\hat{w}_{h\tau})), v_i \right] + \delta_{i2} \left[F_{h\tau}(x, t), v_i \right]_{\gamma_3} \quad \forall t \in \bar{\omega}_\tau \setminus \{T\}, \quad i = 1, 2, \quad (20) \end{aligned}$$

и для любых функций $z \in K_h$ и $\forall t \in \bar{\omega}_\tau \setminus \{T\}$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} \frac{\eta_1}{4} \sum_r \left(\varphi(\hat{w}_{h\tau}) \operatorname{div}_r y_t, z - \hat{w}_{h\tau} \right)_r + \frac{1}{4} \sum_r \left(\nabla_r \hat{w}_{h\tau}, \nabla_r (z - \hat{w}_{h\tau}) \right)_r + \\ + m \left[\frac{\varphi(\hat{w}_{h\tau}) - \varphi(w_{h\tau})}{\tau}, z - \hat{w}_{h\tau} \right] \geq \frac{\rho g_2}{4} \sum_r \left(b(\varphi(\hat{w}_{h\tau})), \partial_{r_2} (z - \hat{w}_{h\tau}) \right)_r. \quad (21) \end{aligned}$$

В (21) $y = (y_1, y_2)$, $\hat{y} = y(t + \tau)$, $y_t = \frac{\hat{y} - y}{\tau}$, $\Lambda_r(y)$ – разностная аппроксимация тензора деформаций с компонентами $(\Lambda_r(y))_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_{r_j} y_i + \partial_{r_i} y_j)$, а y_i^0 , $w_{h\tau}^-$, $F_{h\tau}$ – сеточные функции такие, что

$$\Pi_r y_i^0 \rightarrow u_i^0, \quad \Pi_r w_{h\tau}^- \rightarrow w_0^- \quad \text{в } L_2(\Omega), \quad \Pi_r^+ F_{h\tau} \rightarrow F \quad \text{в } L_2(0, T; \Gamma_3). \quad (22)$$

4. Существование решения разностной схемы

Теорема 1. Пусть операторы A и B , функции $s(p)$, $b(s)$, $\varphi(w)$ удовлетворяют условиям \mathbf{A}_1 – \mathbf{A}_5 , функции f_i , $i = 1, 2$, непрерывны на $[0, 1]$. Тогда решение разностной схемы (20), (21) существует.

Доказательство. При исследовании разрешимости будем использовать метод штрафа.

Тройку функции y_1^ε , y_2^ε , $w_{h\tau}^\varepsilon$, определенных на $\bar{\omega} \times \bar{\omega}_\tau$, таких, что $y_i^\varepsilon(t) \in \mathring{V}_h$, $i = 1, 2$, $w_{h\tau}^\varepsilon(t) \in K_h$ для любого $t \in \bar{\omega}_\tau$, назовем решением неявной разностной схемы со штрафом, если для любых $x \in \bar{\omega}$

$$y_i^\varepsilon(x, 0) = y^0(x), \quad i = 1, 2, \quad (w_{h\tau}^\varepsilon(x, 0))^- = w_{h\tau 0}^-(x),$$

и для всех $t \in \bar{\omega}_\tau \setminus \{T\}$ и для любых функций $v_i \in \mathring{V}_h$ и $z \in \mathring{V}_{1h}$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \sum_r \left(\sum_{j=1}^2 ((A\Lambda_r(\hat{y}^\varepsilon))_{ij} + (B\Lambda_r(y_t^\varepsilon))_{ij}), \partial_{r_j} v_i \right)_r - \\ & - \frac{1}{4} \sum_r ((\hat{w}_{h\tau}^\varepsilon)^+ - m\varphi_1(\hat{w}_{h\tau}^\varepsilon), \partial_{r_i} v_i)_r = \\ & = [f_{h\tau i}(\varphi(\hat{w}_{h\tau}^\varepsilon)), v_i] + \delta_{i2} [F_{h\tau}(x, t), v_i]_{\gamma_3}, \quad i = 1, 2, \quad (23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\eta_1}{4} \sum_r (\varphi(\hat{w}_{h\tau}^\varepsilon) \operatorname{div}_r y_i^\varepsilon, z)_r + \frac{1}{4} \sum_r (\nabla_r \hat{w}_{h\tau}^\varepsilon, \nabla_r z)_r + \frac{1}{\varepsilon} [(\hat{w}_{h\tau}^\varepsilon)^+, z]_{\gamma_2} + \\ & + m \left[\frac{\varphi(\hat{w}_{h\tau}^\varepsilon) - \varphi(w_{h\tau}^\varepsilon)}{\tau}, z \right] = \frac{\rho g_2}{4} \sum_r (b(\varphi(\hat{w}_{h\tau}^\varepsilon)), \partial_{r_2} z)_r. \quad (24) \end{aligned}$$

Убедимся сначала в разрешимости неявной разностной схемы со штрафом. Для этого, очевидно, достаточно доказать, что задача (23), (24) при известном $(y_1^\varepsilon, y_2^\varepsilon, w_{h\tau}^\varepsilon)$ разрешима относительно $(\hat{y}_1^\varepsilon, \hat{y}_2^\varepsilon, \hat{w}_{h\tau}^\varepsilon)$. Задача (23), (24) относительно $(\hat{y}_1^\varepsilon, \hat{y}_2^\varepsilon, \hat{w}_{h\tau}^\varepsilon)$ представляет собой систему нелинейных уравнений. Нетрудно доказать, используя топологическую лемму (см., например, [5, с. 66]), разрешимость этой системы и справедливость оценки вида

$$\sum_{i=1}^2 \|\hat{y}_i^\varepsilon\|_+^2 + \|\hat{w}_{h\tau}^\varepsilon\|_+^2 \leq C, \quad (25)$$

где C – постоянная, не зависящая от ε .

Заметим, что основные моменты получения этой оценки фактически содержатся в доказательстве леммы 2.

Из (25) и теоремы Вейерштрасса о компактности ограниченной последовательности следует существование подпоследовательностей $\{\hat{y}_1^\varepsilon\}$, $\{\hat{y}_2^\varepsilon\}$, $\{\hat{w}_{h\tau}^\varepsilon\}$ таких, что

$$\hat{y}_i^\varepsilon \rightarrow \hat{y}_i \text{ в } \overset{\circ}{V}_h, \quad i = 1, 2, \quad \hat{w}_{h\tau}^\varepsilon \rightarrow \hat{w}_{h\tau} \text{ в } K_h \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (26)$$

Докажем, что функции \hat{y}_1 , \hat{y}_2 , $\hat{w}_{h\tau}$ являются решением разностной схемы (20), (21). Для этого в равенствах (23), (24) перейдем к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. При этом учтем, что из сходимости последовательностей \hat{y}_i^ε , $\hat{w}_{h\tau}^\varepsilon$ и непрерывности операторов A и B следует, что $\Lambda_r(\hat{y}^\varepsilon) \rightarrow \Lambda_r(\hat{y})$, $A\Lambda_r(\hat{y}^\varepsilon) \rightarrow A\Lambda_r(\hat{y})$, $B\Lambda_r(\hat{y}^\varepsilon) \rightarrow B\Lambda_r(\hat{y})$ в $(V_h)^3$.

Учитывая очевидное неравенство

$$\frac{1}{\varepsilon} [(\hat{w}_{h\tau}^\varepsilon)^+, z]_{\gamma_2} \leq 0 \quad \forall z \in K_h,$$

перейдем к пределу в (23), (24), в результате получим соотношения (20) и неравенство

$$\begin{aligned} & \frac{\eta_1}{4} \sum_r (\varphi(\hat{w}_{h\tau}) \operatorname{div}_r y_t, z)_r + \frac{1}{4} \sum_r (\nabla_r \hat{w}_{h\tau}, \nabla_r z)_r + \\ & + m \left[\frac{\varphi(\hat{w}_{h\tau}) - \varphi(w_{h\tau})}{\tau}, z \right] \geq \frac{\rho g_2}{4} \sum_r (b(\varphi(\hat{w}_{h\tau})), \partial_{r_2} z)_r. \end{aligned} \quad (27)$$

Выберем в равенстве (24) $z = \hat{w}_{h\tau}^\varepsilon$ и перейдем затем к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. Тогда с учетом неравенства

$$[(\hat{w}_{h\tau}^\varepsilon)^+, \hat{w}_{h\tau}^\varepsilon]_{\gamma_2} \geq 0$$

получим

$$\begin{aligned} & \frac{\eta_1}{4} \sum_r (\varphi(\hat{w}_{h\tau}) \operatorname{div}_r y_t, \hat{w}_{h\tau})_r + \frac{1}{4} \sum_r (\nabla_r \hat{w}_{h\tau}, \nabla_r \hat{w}_{h\tau})_r + \\ & + m \left[\frac{\varphi(\hat{w}_{h\tau}) - \varphi(w_{h\tau})}{\tau}, \hat{w}_{h\tau} \right] \leq \frac{\rho g_2}{4} \sum_r (b(\varphi(\hat{w}_{h\tau})), \partial_{r_2} \hat{w}_{h\tau})_r. \end{aligned} \quad (28)$$

Вычитая из неравенства (27) неравенство (28), приходим к (21). \square

Лемма 1. Для решения неявной разностной схемы со штрафом (23), (24) справедливо неравенство

$$\hat{w}_{h\tau}^\varepsilon(x, t) \geq -\gamma \quad \forall x \in \bar{\omega}, \quad \forall t \in \bar{\omega}_\tau \setminus \{T\}. \quad (29)$$

Доказательство. В равенстве (24) положим $z = (\gamma + \hat{w}_{h\tau}^\varepsilon)^-$. В результате получим

$$\begin{aligned} & \frac{\eta_1}{4} \sum_r (\varphi(\hat{w}_{h\tau}^\varepsilon) \operatorname{div}_r y_t^\varepsilon, (\gamma + \hat{w}_{h\tau}^\varepsilon)^-)_r + \frac{1}{4} \sum_r (\nabla_r \hat{w}_{h\tau}^\varepsilon, \nabla_r (\gamma + \hat{w}_{h\tau}^\varepsilon)^-)_r + \\ & + \frac{m}{\tau} [\varphi(\hat{w}_{h\tau}^\varepsilon), (\gamma + \hat{w}_{h\tau}^\varepsilon)^-] - \frac{m}{\tau} [\varphi(w_{h\tau}^\varepsilon), (\gamma + \hat{w}_{h\tau}^\varepsilon)^-] + \\ & + \frac{1}{\varepsilon} [(\hat{w}_{h\tau}^\varepsilon)^+, (\gamma + \hat{w}_{h\tau}^\varepsilon)^-]_{\gamma_2} = \frac{\rho g_2}{4} \sum_r (b(\varphi(\hat{w}_{h\tau}^\varepsilon)), \partial_{r_2} (\gamma + \hat{w}_{h\tau}^\varepsilon)^-)_r. \end{aligned} \quad (30)$$

Нетрудно видеть, что согласно равенству (13) $\varphi(\zeta) = 0$ при $\zeta \leq -\gamma$; $(\gamma + \zeta)^- = 0$ при $\zeta \geq -\gamma$, поэтому $\varphi(\zeta) (\gamma + \zeta)^- = 0$ и $\zeta^+ (\gamma + \zeta)^- = 0$ при любых ζ . Кроме того,

из условия $b(0) = 0$ следует, что $b(\varphi(\zeta)) \neq 0$ только тогда, когда $\zeta > -\gamma$. Поэтому первое, третье и пятое слагаемые в левой части равенства (30) и правая часть (30) равны нулю.

Преобразуем второе слагаемое в левой части (30) следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_r (\nabla_r \widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon, \nabla_r (\gamma + \widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon)^-)_r &= \sum_r (\nabla_r (\gamma + \widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon), \nabla_r (\gamma + \widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon)^-)_r = \\ &= - \sum_r (\nabla_r (\gamma + \widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon)^-, \nabla_r (\gamma + \widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon)^-)_r = - \|\gamma + \widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon\|_+^2. \end{aligned} \quad (31)$$

Тогда равенство (30) запишется в виде

$$- \|\gamma + \widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon\|_+^2 - \frac{m}{\tau} [\varphi(w_{h\tau}^\varepsilon), (\gamma + \widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon)^-] = 0. \quad (32)$$

Левая часть равенства (32) не положительна, поэтому из (32) следует, что

$$(\gamma + \widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon(x, t))^- = 0 \quad \forall x \in \bar{\omega}, \quad \forall t \in \omega_\tau.$$

□

Следствие 1. Из леммы 1 и соотношения (26) очевидным образом вытекает справедливость для решения разностной схемы (20), (21) оценки вида

$$\widehat{w}_{h\tau}(x, t) \geq -\gamma \quad \forall x \in \bar{\omega}, \quad \forall t \in \bar{\omega}_\tau \setminus \{T\}. \quad (33)$$

5. Априорные оценки

Лемма 2. Для решения разностной схемы (20), (21) справедливы следующие априорные оценки:

$$\|y_i(t')\|_+ \leq C, \quad \sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \|y_i^\varepsilon(t)\|_+^2 \leq C, \quad i = 1, 2, \quad (34)$$

$$[\Phi(w_{h\tau}(t')), 1] \leq C, \quad \sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \|\widehat{w}_{h\tau}(t)\|_+^2 \leq C, \quad (35)$$

где C – постоянная, не зависящая от ε , τ , h_1 , h_2 .

Доказательство. Сначала докажем, что для разностной схемы со штрафом (23), (24) имеют место оценки вида

$$\|y_i^\varepsilon(t')\|_+ \leq \tilde{C}, \quad \sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \|y_i^\varepsilon(t)\|_+^2 \leq \tilde{C}, \quad i = 1, 2, \quad (36)$$

$$[\Phi(w_{h\tau}^\varepsilon(t')), 1] \leq \tilde{C}, \quad \sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \|\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon(t)\|_+^2 \leq \tilde{C}, \quad (37)$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \|\widehat{w}_{h\tau}^{\varepsilon+}(t)\|_{\gamma_2} \leq \tilde{C} \quad \forall t' \in \omega_\tau, \quad (38)$$

где \tilde{C} – константа, не зависящая от ε , τ , h_1 , h_2 .

Выберем в (23), (24) $v_i = (y_i^\varepsilon)_t$, $z = \widehat{w}_\tau^\varepsilon$, полученные равенства сложим, умножим затем на τ и просуммируем от 0 до $t' - \tau$, $t' \in \omega_\tau$. В результате будем иметь

$$\begin{aligned}
 & \frac{\eta_1}{4} \sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \sum_r ((A\Lambda_r(\widehat{y}_i^\varepsilon) + B\Lambda_r(y_t^\varepsilon), \Lambda_r(y_t^\varepsilon))_{H_3}, 1)_r + \\
 & + \sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau (\|\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon\|_+^2 + \frac{1}{\varepsilon} [(\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon)^+, \widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon]_{\gamma_2}) + m \sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau [(\varphi(w_{h\tau}^\varepsilon))_t, \widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon] = \\
 & = \eta_1 \tau \sum_{t=0}^{t'-\tau} \left(\sum_{i=1}^2 [f_i(\varphi(w_{h\tau}^\varepsilon)), (y_i^\varepsilon)_t] + [F_{h\tau}(x, t), (y_2^\varepsilon)_t]_{\gamma_3} \right) + \\
 & + \frac{\eta_1 \tau}{4} \sum_{t=0}^{t'-\tau} \sum_r ((\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon)^+ - m\varphi_1(\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon) - \varphi(\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon)\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon, \operatorname{div}_r(y^\varepsilon)_t)_r + \\
 & + \frac{1}{4} \sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \sum_r (\rho g_2 b(\varphi(\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon)), \partial_{r_2} \widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon)_r. \quad (39)
 \end{aligned}$$

Равенство (39) преобразуем, используя легко проверяемое соотношение

$$\begin{aligned}
 & \sum_{t=0}^{t'-\tau} \frac{\tau}{4} \sum_r ((A\Lambda_r(\widehat{y}^\varepsilon), \Lambda_r(y^\varepsilon)_t)_{H_3}, 1)_r = \frac{1}{8} \sum_r ((A\Lambda_r(y^\varepsilon(t')), \Lambda_r(y^\varepsilon(t')))_{H_3}, 1)_r - \\
 & - \frac{1}{8} \sum_r ((A\Lambda_r(y^0), \Lambda_r(y^0))_{H_3}, 1)_r + \frac{\tau^2}{8} \sum_{t=0}^{t'-\tau} \sum_r ((A\Lambda_r(y^\varepsilon)_t, \Lambda_r(y^\varepsilon)_t)_{H_3}, 1)_r,
 \end{aligned}$$

положительную определенность операторов A и B , сеточный аналог неравенства Корна и неравенство вида (см. [6])

$$\sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \left[\frac{\varphi(\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon) - \varphi(w_{h\tau}^\varepsilon)}{\tau}, \widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon \right] \geq [\Phi(w_{h\tau}^\varepsilon(t')), 1] - [\Phi(-w_{h\tau 0}^-(x)), 1]. \quad (40)$$

Тогда из (39) с учетом равенства $\Phi(w_0) = \Phi(-w_0^-)$ следует, что

$$\begin{aligned}
 & \eta_1 C_A \sum_{i=1}^2 \|y_i^\varepsilon(t')\|_+^2 + \eta_1 C_B \sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \sum_{i=1}^2 \|(y_i^\varepsilon)_t\|_+^2 + \sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \|\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon(t)\|_+^2 + [\Phi(w_{h\tau}^\varepsilon(t')), 1] + \\
 & + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \|(\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon)^+\|_{\gamma_2}^2 \leq [\Phi(-w_{h\tau 0}^-), 1] + \eta_1 C \sum_{i=1}^2 \|y_i^0\|_+^2 + |I|, \quad (41)
 \end{aligned}$$

где I – правая часть равенства (39).

Слагаемое I оценим следующим образом:

$$\begin{aligned}
 |I| \leq & \sum_{t=0}^{t'-\tau} \left| \frac{\eta_1}{4} \sum_r \left((\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon)^+ - m\varphi_1(\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon) - \varphi(\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon)\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon, \operatorname{div}_r(y^\varepsilon)_t \right)_r \right| + \\
 & + \sum_{t=0}^{t'-\tau} \left| \left\{ \eta_1 \sum_{i=1}^2 [f_i(\varphi(\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon)), (y_i^\varepsilon)_t] + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \eta_1 \left[F_{h\tau}(x, t), \frac{\widehat{y}_2^\varepsilon - y_2^\varepsilon}{\tau} \right]_{\gamma_3} + \frac{\rho g_2}{4} \sum_r (b(\varphi(\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon)), \partial_{r_2} \widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon)_r \right\} \right| = I_1 + I_2.
 \end{aligned}$$

Из равенства $(\widehat{w}_{h\tau})^+ - m\varphi_1(\widehat{w}_{h\tau}) - \varphi(\widehat{w}_{h\tau})\widehat{w}_{h\tau} = -m\varphi_1(\widehat{w}_{h\tau}) + \varphi(\widehat{w}_{h\tau})(\widehat{w}_{h\tau})^-$, ограниченности функций φ_1 , φ , $\widehat{w}_{h\tau}$ и оценки (15) вытекает, что

$$I_1 \leq (mC_\vartheta + \gamma) \sum_{t=0}^{t'-\tau} \frac{1}{4} \sum_r (|\operatorname{div}_r(y^\varepsilon)_t|, 1)_r \leq \widetilde{\delta} \sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \sum_{i=1}^2 \|(y_i)_t\|_+^2 + \frac{C}{\widetilde{\delta}}.$$

Используя условия на функции f_i и F_τ и неравенство Коши–Буняковского, получаем

$$I_2 \leq \widetilde{\delta} \sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \left(\sum_{i=1}^2 \|(y_i^\varepsilon)_t\|_+^2 + \|\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon\|_+^2 \right) + \frac{C}{\widetilde{\delta}} \left(1 + \sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \|F_{h\tau}(t)\|_{\gamma_3}^2 \right).$$

Из (41), а также из полученных для I_1 и I_2 оценок следует справедливость (36)–(38).

В справедливости леммы 2 нетрудно убедиться теперь, совершив предельный переход по $\varepsilon \rightarrow 0$ в полученных оценках (36)–(38) при фиксированных h_1 , h_2 и τ , учтя при этом предельные соотношения (26). \square

Лемма 3. *Для решения разностной схемы (20), (21) справедливо следующее неравенство:*

$$\frac{1}{k} \sum_{t'=0}^{T-k\tau} \left[(G(w_{h\tau}(t' + k\tau)) - G(w_{h\tau}(t')))^2, 1 \right] \leq C, \quad (42)$$

где

$$G(\zeta) = \varphi(\zeta)g(\zeta) - \int_0^\zeta \varphi(\xi)g'(\xi) d\xi - 1/2, \quad g(\zeta) = \begin{cases} \varphi^{2\kappa}(\zeta)(1 + \varphi^{2\kappa}(\zeta))^{-1}, & \zeta < 0, \\ 1/2, & \zeta \geq 0, \end{cases}$$

C – константа, не зависящая от τ , h_1 , h_2 .

Доказательство. Сначала докажем, что для решения разностной схемы со штрафом справедлива оценка

$$I \equiv \frac{1}{k\tau} \sum_{t'=0}^{T-k\tau} \tau \left[(G(w_{h\tau}^\varepsilon(t' + k\tau)) - G(w_{h\tau}^\varepsilon(t')))^2, 1 \right] \leq \widetilde{C}, \quad (43)$$

где \widetilde{C} – константа, не зависящая от ε , τ , h_1 , h_2 . Имеем

$$I = \frac{\tau}{k} \sum_{t'=0}^{T-k\tau} \sum_{t=t'}^{t'+(k-1)\tau} \left[\frac{G(\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon(t)) - G(w_{h\tau}^\varepsilon(t))}{\tau}, R_G(t') \right],$$

где $R_G(t') = G(w_{h\tau}^\varepsilon(t' + k\tau)) - G(w_{h\tau}^\varepsilon(t'))$. Заметим, что

$$\begin{aligned} \frac{G(\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon) - G(w_{h\tau}^\varepsilon)}{\tau} &= \frac{\varphi(\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon)g(\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon) - \varphi(w_{h\tau}^\varepsilon)g(w_{h\tau}^\varepsilon)}{\tau} - \frac{1}{\tau} \int_{w_{h\tau}^\varepsilon}^{\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon} \varphi(\xi)g'(\xi) d\xi = \\ &= \frac{\varphi(\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon) - \varphi(w_{h\tau}^\varepsilon)}{\tau} g(\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon) + \varphi(w_{h\tau}^\varepsilon) \frac{g(\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon) - g(w_{h\tau}^\varepsilon)}{\tau} - \frac{1}{\tau} \int_{w_{h\tau}^\varepsilon}^{\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon} \varphi(\xi)g'(\xi) d\xi = \\ &= \frac{\varphi(\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon) - \varphi(w_{h\tau}^\varepsilon)}{\tau} g(\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon) - \int_{w_{h\tau}^\varepsilon}^{\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon} \frac{\varphi(\xi) - \varphi(w_{h\tau}^\varepsilon)}{\tau} g'(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \left[\frac{G(\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon(t)) - G(w_{h\tau}^\varepsilon(t))}{\tau}, R_G(t') \right] &= \left[\frac{\varphi(\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon(t)) - \varphi(w_{h\tau}^\varepsilon(t))}{\tau}, g(\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon(t))R_G(t') \right] - \\ &- \left[\int_{w_{h\tau}^\varepsilon(t)}^{\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon(t)} \frac{\varphi(\xi) - \varphi(w_{h\tau}^\varepsilon(t))}{\tau} g'(\xi) d\xi, R_G(t') \right] \equiv I_1 + I_2. \end{aligned} \quad (44)$$

Для оценки I_1 воспользуемся (24) с $z = g(\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon(t))R_G(t')$. В результате получим

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{4m} \sum_r (-\eta_1 \varphi(\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon(t)) \operatorname{div}_r (y_i^\varepsilon(t)), g(\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon(t))R_G(t'))_r + \\ &\quad + \frac{\rho g_2}{4} \sum_r (b(\varphi(\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon)), \partial_{r_2}(g(\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon(t))R_G(t')))_r - \\ &- \frac{1}{4m} \sum_r (\nabla_r \widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon(t), \nabla_r (g(\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon(t))R_G(t')))_r - \frac{1}{m\varepsilon} \left[(\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon(t))^+, g(\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon(t))R_G(t') \right]_{\gamma_2}. \end{aligned}$$

Используя ограниченность функций G , g и оценку (38), нетрудно показать, что

$$|I_1| \leq C \left(\sum_{i=1}^2 \|(y_i^\varepsilon)_t(t)\|_+^2 + \|\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon(t)\|_+^2 + \frac{1}{\varepsilon} \|\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon(t)\|_{\gamma_2}^2 + 1 \right). \quad (45)$$

Оценим I_2 . Заметим, что φ , а следовательно, g – неубывающие функции, поэтому

$$|I_2| \leq \left[\frac{\varphi(\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon(t)) - \varphi(w_{h\tau}^\varepsilon(t))}{\tau}, (g(\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon(t)) - g(w_{h\tau}^\varepsilon(t))) |R_G(t')| \right] \equiv I_3.$$

Для оценки I_3 воспользуемся (24), выбрав $z = (g(\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon(t)) - g(w_{h\tau}^\varepsilon(t))) |R_G(t')|$. В результате будем иметь

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{1}{4m} \sum_r (-\eta_1 \varphi(\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon(t)) \operatorname{div}_r (y_i^\varepsilon(t)), (g(\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon(t)) - g(w_{h\tau}^\varepsilon(t))) |R_G(t')|)_r - \\ &- \frac{1}{4m} \sum_r (\nabla_r \widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon(t), \nabla_r ((g(\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon(t)) - g(w_{h\tau}^\varepsilon(t))) |R_G(t')|))_r + \\ &+ \frac{\rho g_2}{4} \sum_r (b(\varphi(\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon)), \partial_{r_2} ((g(\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon(t)) - g(w_{h\tau}^\varepsilon(t))) |R_G(t')|))_r - \\ &- \frac{1}{m\varepsilon} \left[(\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon(t))^+, (g(\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon(t)) - g(w_{h\tau}^\varepsilon(t))) |R_G(t')| \right]_{\gamma_2}. \end{aligned} \quad (46)$$

Оценим последнее слагаемое правой части равенства (46). Пусть

$$\begin{aligned} I_4 &= -\frac{1}{m\varepsilon} \left[(\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon(t))^+, (g(\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon(t)) - g(w_{h\tau}^\varepsilon(t))) |R_G(t')| \right]_{\gamma_2} = \\ &= -\frac{1}{m\varepsilon} \sum_{i=1}^3 \left[(\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon(t))^+, (g(\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon(t)) - g(w_{h\tau}^\varepsilon(t))) |R_G(t')| \right]_{\gamma_2^i} = I_4^1 + I_4^2 + I_4^3, \end{aligned}$$

где $\Gamma_2^1 = \{x \in \Gamma_2 : \widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon(x) < 0\}$, $\Gamma_2^2 = \{x \in \Gamma_2 : \widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon(x) \geq 0 \wedge w_{h\tau}^\varepsilon(x) \leq 0\}$, а Γ_2^3 – оставшаяся часть границы Γ_2 . Так как $(\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon(x))^+ = 0$ при $x \in \Gamma_2^1$, то $I_4^1 = 0$.

Если $x \in \Gamma_2^2$, то в силу монотонного возрастания функции g разность $g(\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon(t)) - g(w_{h\tau}^\varepsilon(t)) \geq 0$, поэтому $I_4^2 \leq 0$. И наконец, если $x \in \Gamma_2^3$, то $\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon(x)$ и $w_{h\tau}^\varepsilon(x)$ неотрицательны. Так как $g(\zeta) = 1/2$ при $\zeta \geq 0$, то $g(\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon(t)) - g(w_{h\tau}^\varepsilon(t)) = 0$, следовательно, $I_4^3 = 0$. Поэтому $I_4 \leq 0$. Остальные слагаемые в правой части равенства (46) оценим, используя ограниченность $g(\zeta)$, $\varphi(w)$, $G(\zeta)$, $b(\varphi(w))$. В результате получим

$$|I_2| \leq C \left\{ \sum_{i=1}^2 \|(y_i^\varepsilon)_t\|_+^2 + \|\widehat{w}_\tau^\varepsilon(t)\|_+^2 + 1 \right\}. \quad (47)$$

Из соотношений (44), (45), (47) непосредственно следует справедливость (43). Учтя предельные соотношения (26), в справедливости неравенства (42) нетрудно убедиться, совершая предельный переход в полученной оценке (43) по $\varepsilon \rightarrow 0$ при фиксированных h_1 , h_2 и τ . \square

6. Исследование сходимости

Лемма 4. Пусть $y = (y_1, y_2)$, $w_{h\tau}$ – решения разностной схемы (20), (21). Тогда существуют функции

$$u_i \in W_2^{(1)}(0, T; \mathring{V}), \quad w \in L_2(0, T; \mathring{V}_1)$$

и последовательности $\{\tau\}$, $\{h\}$ такие, что при $\tau, h \rightarrow 0$

$$\Pi_r^\pm y_i \rightharpoonup u_i, \quad \Pi_r^\pm (y_i)_t \rightharpoonup \frac{\partial u_i}{\partial t}, \quad \Pi_r^\pm w_{h\tau} \rightharpoonup w \quad \text{в } L_2(Q_T), \quad (48)$$

$$\Pi_r^\pm \partial_{r_i} w_{h\tau} \rightharpoonup \frac{\partial w}{\partial x_i}, \quad \Pi_r^\pm \partial_{r_j} y_i \rightharpoonup \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad \Pi_r^\pm \partial_{r_j} (y_i)_t \rightharpoonup \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial t} \quad \text{в } L_2(Q_T), \quad (49)$$

$$w(x, t) \geq -\gamma \quad \text{н.в. в } Q_T, \quad (50)$$

$$\Pi_r^\pm w_{h\tau}^- \rightharpoonup w^-, \quad \varphi(\Pi_r^\pm w_{h\tau}) \rightarrow \varphi(w), \quad \varphi_1(\Pi_r^\pm w_{h\tau}) \rightarrow \varphi_1(w) \quad \text{н.в. в } Q_T, \quad (51)$$

$$\Pi_r^\pm w_{h\tau}^+ \rightharpoonup w^+, \quad \Pi_r^\pm w_{h\tau}^- \rightharpoonup w^- \quad \text{в } L_2(Q_T). \quad (52)$$

Доказательство. Справедливость утверждений (48), (49) следует из априорных оценок (34), (35) и слабой компактности ограниченных множеств в рефлексивном банаховом пространстве. Докажем, что функция w , определенная в (48), удовлетворяет неравенству (50). Предположим обратное. Пусть $Q' = \{(x, t) \in Q_T : w(x, t) < -\gamma\}$ и $\text{mes } Q' = \alpha_0 \neq 0$. Имеем

$$\begin{aligned} \gamma \alpha_0 &< \int_{Q'} (-w(x, t)) dx dt = \int_{Q_T} (-w(x, t)) h_{Q'}(x, t) dx dt = \\ &= \lim_{\tau, h_1, h_2 \rightarrow 0} \int_{Q_T} (-\Pi_r^\pm w_{h\tau}) h_{Q'}(x, t) dx dt \leq \gamma \alpha_0, \end{aligned}$$

где $h_{Q'}$ – характеристическая функция множества Q' . Полученное противоречие доказывает справедливость (50). Убедимся теперь в справедливости (51). Для этого заметим, что из ограниченности $G'(\xi)$ и (35) следует оценка

$$\sum_{t=0}^T \|G(w_{h\tau}(t))\|_+^2 \leq C. \quad (53)$$

Из неравенств (42), (53) и сеточного аналога теоремы компактности (см., например, [7, с. 219]) следует компактность подпоследовательности $\{G(\Pi_r^\pm w_{h\tau})\}$ в $L_2(Q_T)$, поэтому найдутся функция $\xi \in L_2(Q_T)$ и подпоследовательности шагов h_i и τ таких, что

$$G(\Pi_r^\pm w_{h\tau}) \rightarrow \xi \quad \text{почти всюду в } Q_T.$$

Поскольку функция G на множестве $[-\gamma, 0]$ взаимно-однозначна, непрерывна и имеет место условие (50), то

$$\Pi_r^\pm(-w_{h\tau}^-) \rightarrow G^{-1}(\xi) \quad \text{почти всюду в } Q_T.$$

Докажем, что $G^{-1}(\xi) = -w^-$. Для этого запишем, пользуясь монотонностью функции G , следующее неравенство:

$$\int_{Q_T} (G(\Pi_r^\pm w_{h\tau}) - G(v))(\Pi_r^\pm w_{h\tau} - v) \, dx \, dt \geq 0.$$

В этом неравенстве перейдем к пределу при $h, \tau \rightarrow 0$. В результате получим

$$\int_{Q_T} (\xi - G(v))(w - v) \, dx \, dt \geq 0.$$

Выбирая $v = w \pm \lambda v_1 \quad \forall \lambda > 0, \forall v_1 \in L_2(Q_T)$, нетрудно доказать, что $\xi = G(w) = G(-w^-)$. Из последнего равенства и (50) следует, что $\Pi_r^\pm w_{h\tau}^- \rightarrow w^-$ почти всюду в Q_T . Доказательство оставшихся утверждений аналогично [3]. \square

Теорема 2. Пусть операторы A и B , функции $s(p)$, $b(s)$, $f(s(p))$ удовлетворяют условиям **A**₁–**A**₅. Кроме того, пусть выполнены (22). Тогда последовательность кусочно-постоянных восполнений решения разностной схемы (20), (21), заданная соотношениями (48)–(52), сходится к обобщенному решению доопределенной задачи (16), (17).

Доказательство. Обоснуем сначала справедливость (17). Пусть \tilde{z} – произвольная функция из $C^\infty(Q_T)$, след которой на $\Gamma_2 \times [0, T]$ неположителен, z_h – снос функции \tilde{z} в точки сетки $\bar{\omega} \times \bar{\omega}_\tau$, α – неотрицательная функция такая, что $\alpha \in C^1(0, T)$ и $\alpha(T) = 0$. В (21) выберем $z = z_h + \hat{w}_{h\tau}$, умножим полученное неравенство на $\alpha(t)$ и просуммируем по t от 0 до $T - \tau$, тогда

$$\begin{aligned} \eta_1 \sum_{t=0}^{T-\tau} \frac{\tau}{4} \sum_r (\varphi(\hat{w}_{h\tau}) \operatorname{div}_r(y)_{t, z_h \alpha(t)})_r + \sum_{t=0}^{T-\tau} \frac{\tau}{4} (\nabla_r \hat{w}_{h\tau}, \nabla_r(z_h \alpha(t)))_r + \\ + m \sum_{t=0}^{T-\tau} \tau [(\varphi(w_{h\tau}))_t, z_h \alpha(t)] \geq \sum_{t=0}^{T-\tau} \frac{\rho g_2 \tau}{4} \sum_r (b(\varphi(\hat{w}_{h\tau})), \partial_{r_2}(z_h \alpha(t)))_r. \end{aligned} \quad (54)$$

Преобразуем третье слагаемое в левой части неравенства (54):

$$\sum_{t=0}^{T-\tau} \tau [(\varphi(w_{h\tau}))_t, z_h \alpha(t)] = -m \sum_{t=0}^{T-\tau} \tau [\varphi(\hat{w}_{h\tau}), (z_h \alpha(t))_t] - m [\varphi(-w_{h\tau 0}^-), z_h(x, 0) \alpha(0)].$$

Подставим полученные соотношения в (54) и запишем результат, используя равенство (19), в итоге будем иметь

$$\begin{aligned} & \int_{Q_T} \eta_1 \varphi (\Pi_r^+ \widehat{w}_{h\tau}) \Pi_r^+ \operatorname{div} (y)_t \Pi_r^+ (z_h \alpha(t)) \, dx \, dt + \int_{Q_T} \Pi_r^+ \nabla_r \widehat{w}_{h\tau} \cdot \Pi_r^+ \nabla_r (z_h \alpha(t)) \, dx \, dt - \\ & - m \int_{Q_T} \varphi (\Pi_r^+ \widehat{w}_{h\tau}) \cdot \Pi_r^+ (z_h \alpha(t))_t \, dx \, dt - m \int_{\Omega} \varphi (-\Pi_r^+ w_{h\tau 0}^-) \cdot \Pi_r^+ z_h(x, 0) \alpha(0) \, dx \geq \\ & \geq \rho g_2 \int_{Q_T} b(\varphi(\Pi_r^+ \widehat{w}_{h\tau})) \Pi_r^+ \partial_{r_2} (z_h \alpha(t)) \, dx \, dt. \quad (55) \end{aligned}$$

В (55) перейдем к пределу при $\tau, h \rightarrow 0$ (по поводу обоснования предельного перехода см. [3, лемма 5]). В результате получим неравенство

$$\begin{aligned} & \int_{Q_T} \left(\eta_1 \varphi(w) \frac{\partial(\operatorname{div} u)}{\partial t} \alpha(t) \tilde{z} + \nabla w \cdot \nabla(\alpha(t) \tilde{z}) - m \varphi(w) \frac{\partial(\alpha(t) \tilde{z})}{\partial t} \right) \, dx \, dt - \\ & - m \int_{\Omega} \varphi(-w_0^-) \tilde{z}(x, 0) \alpha(0) \, dx \geq \int_{Q_T} b(\varphi(w)) \rho g_2 \frac{\partial(\alpha(t) \tilde{z})}{\partial x_2} \, dx \, dt, \quad (56) \end{aligned}$$

справедливое для любой функции $\tilde{z} \in C^\infty(Q_T)$, имеющей неположительный след на $\Gamma_2 \times [0, T]$. Очевидно, что (56) будет иметь место и для любой функции $z \in L_2(0, T; K)$ такой, что $\frac{\partial z}{\partial t} \in L_2(Q_T)$.

Аналогичным образом, повторяя рассуждения леммы 5 [3], из (56) нетрудно получить неравенство

$$\begin{aligned} & \int_{Q_T} \left(\eta_1 \varphi(w) \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} u) \alpha(t) (z - w^+) + \nabla w \cdot \nabla(\alpha(t) (z - w^+)) \right) \, dx \, dt - \\ & - \int_{Q_T} m \varphi(w) \frac{\partial(\alpha(t) z)}{\partial t} \, dx \, dt - m \int_{\Omega} \varphi(-w_0^-) z(x, 0) \alpha(0) \, dx \geq \\ & \geq \int_{Q_T} b(\varphi(w)) \rho g_2 \frac{\partial(\alpha(t) (z - w^+))}{\partial x_2} \, dx \, dt, \quad (57) \end{aligned}$$

Теперь в (21) выберем $z = -\widehat{w}_{h\tau}^- \alpha(t)$, умножим полученное равенство на τ и просуммируем по t от 0 до $T - \tau$, в результате будем иметь

$$\begin{aligned} & \sum_{t=0}^{T-\tau} \left\{ \frac{\eta_1 \tau}{4} \sum_r (\varphi(\widehat{w}_{h\tau}) \operatorname{div}_r (y)_t, -\widehat{w}_{h\tau}^- \alpha(t))_r + \frac{1}{4} \sum_r (\nabla_r \widehat{w}_{h\tau}, \nabla_r (-\widehat{w}_{h\tau}^- \alpha(t)))_r \right\} + \\ & + m \sum_{t=0}^{T-\tau} \tau [(\varphi(\widehat{w}_{h\tau}))_t, -\widehat{w}_{h\tau}^- \alpha(t)] \leq \\ & \leq \sum_{t=0}^{T-\tau} \frac{\tau \rho g_2}{4} \sum_r (b(\varphi(\widehat{w}_{h\tau})), \partial_{r_2} (-\widehat{w}_{h\tau}^- \alpha(t)))_r. \quad (58) \end{aligned}$$

Используя (40) и формулу суммирования по частям, нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} m \sum_{t=0}^{T-\tau} \tau \left[\frac{\varphi(\widehat{w}_{h\tau}) - \varphi(w_{h\tau})}{\tau}, -\alpha(t)\widehat{w}_{h\tau}^- \right] &= m \sum_{t=0}^{T-\tau} \tau \left[\frac{\varphi(-\widehat{w}_{h\tau}^-) - \varphi(w_{h\tau})}{\tau}, -\widehat{w}_{h\tau}^- \alpha(t) \right] \geq \\ &\geq m \sum_{t=0}^{T-\tau} \tau \left[\frac{\Phi(-\widehat{w}_{h\tau}^-) - \Phi(w_{h\tau})}{\tau}, \alpha(t) \right] = m \sum_{t=0}^{T-\tau} \tau [(\Phi(-w_{h\tau}^-))_t, \alpha(t)] = \\ &= -m \sum_{t=0}^{T-\tau} \tau [\Phi(-\widehat{w}_{h\tau}^-), (\alpha(t))_t] - m [\Phi(-w_{h\tau 0}^-), \alpha(0)]. \end{aligned}$$

Подставим полученную оценку в (58) и запишем результат, используя равенство (19)

$$\begin{aligned} &\int_{Q_T} \eta_1 \varphi(\Pi_r^+ \widehat{w}_{h\tau}) \Pi_r^+ \operatorname{div}_r (y_{h\tau})_t (-\Pi_r^+ \alpha(t) \widehat{w}_{h\tau}^-) dx dt + \\ &\quad + \int_{Q_T} (\Pi_r^+ \nabla_r w_{h\tau}^-)^2 \Pi_r^+ \alpha(t) dx dt - m \int_{Q_T} \Phi(-\Pi_r^+ \widehat{w}_{h\tau}^-) \Pi_r^+ (\alpha(t))_t dx dt - \\ &\quad - m \int_{\Omega} \Phi(-w_{h\tau 0}^-) \alpha(0) dx \leq \int_{Q_T} b(\varphi(\Pi_r^+ \widehat{w}_{h\tau})) \rho g_2 \Pi_r^+ \partial_{r_2} (-\alpha(t) \widehat{w}_{h\tau}^-) dx dt. \quad (59) \end{aligned}$$

В (59) совершим предельный переход при $\tau, h \rightarrow 0$, учитывая соотношения (48)–(52) и свойство слабой полунепрерывности снизу нормы. В результате получим

$$\begin{aligned} &\int_{Q_T} \eta_1 \varphi(w) \frac{\partial(\operatorname{div} u)}{\partial t} (-w^-) \alpha(t) dx dt + \int_{Q_T} \nabla w \cdot \nabla (-w^-) \alpha(t) dx dt - \\ &\quad - m \int_{\Omega} \Phi(-w_0^-) \alpha(0) dx - m \int_{Q_T} \Phi(-w^-) \partial_t (\alpha(t)) dx dt \leq \\ &\quad \leq \int_{Q_T} b(\varphi(w)) \rho g_2 \frac{\partial(-w^- \alpha(t))}{\partial x_2} dx dt. \quad (60) \end{aligned}$$

Вычитая из (57) неравенство (60), приходим к (17). Аналогичным образом легко можно доказать, что функции u_1 , u_2 , w , определенные соотношениями (48)–(52), удовлетворяют равенствам (16). \square

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 12-01-00955, 12-01-97022).

Summary

M.F. Pavlova, E.V. Rung. A Study of an Implicit Difference Scheme for the Problem of Saturated-Unsaturated Filtration Consolidation.

An implicit difference scheme for the problem of saturated-unsaturated filtration consolidation under condition of semi-permeability on part of the boundary is constructed and investigated. Using the penalty method the existence of the solution to the difference

problem is established. A study of the implicit convergence of the difference scheme is carried out under minimal propositions on the smoothness of the original conditions: the convergence of the piecewise-constant filling of the difference solution to the generalized solution of the problem under consideration is proved.

Key words: filtration consolidation, difference schemes, penalty method, convergence of difference scheme.

Литература

1. Костерин А.В., Березинский Д.А. Насыщенно-ненасыщенные состояния деформируемых пористых сред // Докл. РАН. – 1998. – Т. 356, № 3. – С. 343–345.
2. Павлова М.Ф., Шемуранова Е.В. О существовании слабого решения одной задачи ненасыщенной фильтрационной консолидации // Изв. вузов. Матем. – 2001. – № 10. – С. 58–68.
3. Павлова М.Ф., Рунг Е.В. О разрешимости задачи насыщенно-ненасыщенной фильтрационной консолидации // Дифференц. уравнения. – 2012. – Т. 48, № 7. – С. 1005–1019.
4. Morel-Seytoux H.J., Meyer P.D., Nachabe M., Touma J., van Genuchten M.T., Lenhard R.J. Parameter equivalence for the Brooks-Corey and van Genuchten soil characteristics: Preserving the effective capillary drive // Water Resour. Res. – 1996. – V. 32, No 58. – P. 1251–1258.
5. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 587 с.
6. Майорова М.Е., Павлова М.Ф. О сходимости неявной разностной схемы для нелинейного уравнения типа нестационарной фильтрации // Изв. вузов. Матем. – 1994. – № 1. – С. 43–53.
7. Карчевский М.М., Павлова М.Ф. Уравнения математической физики. Дополнительные главы. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2008. – 228 с.

Поступила в редакцию
17.09.12

Павлова Мария Филипповна – доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной математики Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: *Maria.Pavlova@ksu.ru*

Рунг Елена Владимировна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: *HelenRung@mail.ru*