Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования

КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

КАФЕДРА ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И ПРИБЛИЖЕНИЙ

Специальность: 010100 – Математика

Специализация: Действительный анализ

ДИПЛОМНАЯ РАБОТА

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ТОЖДЕСТВА ДЛЯ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РИМАНА

Работа завершена:

«____»________________2015 г. ________________И.Г. Шарафеев

Работа проверена:

Научный руководитель
Заведующий кафедрой теории функций и приближений,
доктор физико-математических наук, профессор

«____»________________2015 г. ________________Ф.Г. Авхадиев

Заведующий кафедрой теории функций и приближений,
доктор физико-математических наук, профессор

«____»________________2015 г. ________________Ф.Г. Авхадиев

Казань – 2015 г.

Оглавление

Введение

Дзета-функция была введена в 1737 году Л.Эйлером, как функция вещественной переменной. Эйлер вывел разложение дзета-функции в произведение по всем простым числам. Наиболее глубокие свойства дзета-функции были обнаружены Б.Риманом в 1859, где дзета-функция рассматривалась, как функция комплексной переменной. При изучении дзета-функции, Риман дал гипотезу о расположении её нулей на комплексной плоскости. Более двухсот лет, эта гипотеза тревожит умы многих математиков и остается недоказанной по сей день. Данная дипломная работа посвящена одной из величайших проблем тысячелетия дзета-функции Римана и его функциональному уравнению. Дипломная работа разделена на три части. В первой части даются общие сведения о дзета-функции Римана. Во второй части доказывается одно из функциональных уравнений дзета-функции и строится аналитическое продолжение дзета-функции на всю комплексную плоскость, за исключением точки $s = 1$. В третьей части дипломной работы проводится подробное доказательство теоремы Мюнца. В этой части содержатся и наши самостоятельные исследования по построению конкретных примеров реализации общего подхода Г. Мюнца.

Дзета-функция Римана

Дзета-функция Римана $\zeta(s)$ определяется с помощью ряда *Дирихле*:

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots \ , \tag{1}$$

где $s \in \mathbb{C}$.

В области $\{s \mid Re(s) > 1\}$, этот ряд сходится,является аналитической функцией и допускает аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость без единицы.

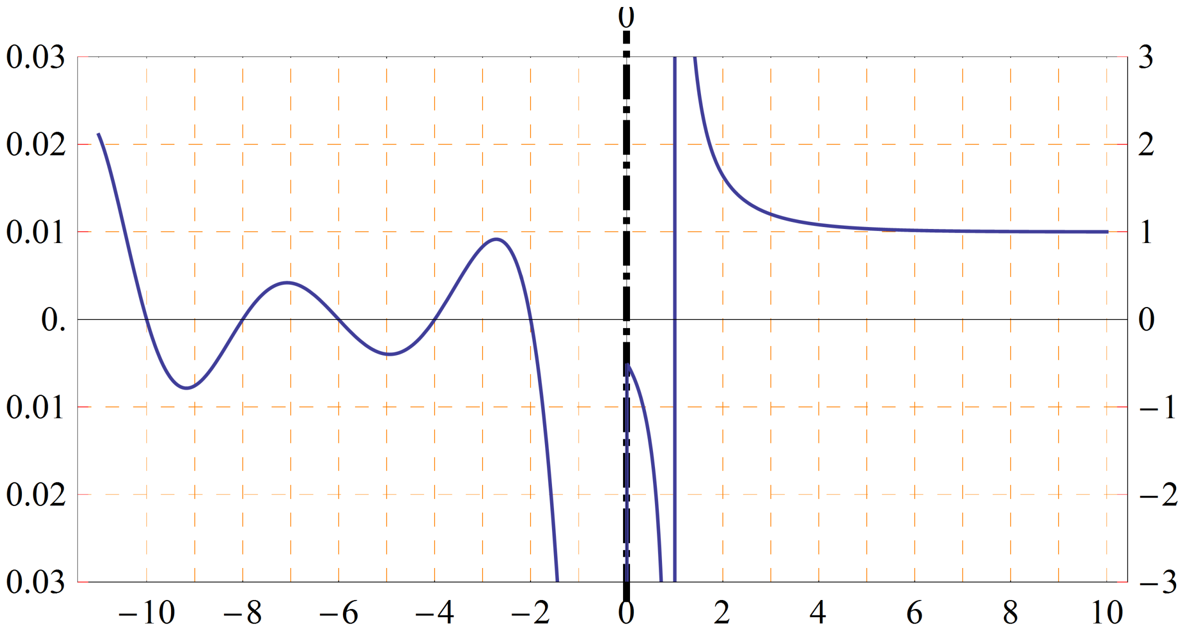

Рис. 1. График дзета-функции Римана на действительной оси

Тождество Эйлера

В области $Re(s) > 1$ верно представление в виде бесконечного произведения:

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}} \ , \tag{2}$$

где произведение берется по всем простым числам p.

Доказательство:

Идея доказательства использует лишь простую алгебру. Изначально этим способом *Эйлер* вывел формулу.

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \ldots,$$

$$\frac{1}{2^s}\zeta(s) = \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{8^s} + \frac{1}{10^s} + \ldots$$

Вычитая второе из первого, мы удаляем все элементы с делителем 2:

$$(1 - \frac{1}{2^s})\zeta(s) = 1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{9^s} + \ldots$$

Повторяем для следующего:

$$\frac{1}{3^s}(1 - \frac{1}{2^s})\zeta(s) = \frac{1}{3^s} + \frac{1}{9^s} + \frac{1}{15^s} + \frac{1}{21^s} + \frac{1}{27^s} + \ldots$$

Опять вычитаем, получаем:

$$(1 - \frac{1}{3^s})(1 - \frac{1}{2^s})\zeta(s) = 1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{9^s} + \ldots$$

где удалены все элементы с делителями 2 и 3.

Бесконечно повторяя, получаем:

$$\ldots(1 - \frac{1}{11^s})(1 - \frac{1}{7^s})(1 - \frac{1}{5^s})(1 - \frac{1}{3^s})(1 - \frac{1}{2^s})\zeta(s) = 1$$

Поделим обе стороны на все множители, кроме $\zeta(s)$, получим:

$$\zeta(s) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{11^s})(1 - \frac{1}{7^s})(1 - \frac{1}{5^s})(1 - \frac{1}{3^s})(1 - \frac{1}{2^s})\ldots}$$

Можно записать эту формулу короче как бесконечное произведение по всем простым p:

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - p-s}, \qquad \forall s \in \mathbb{C}, Re(s) > 1$$

Это равенство представляет собой одно из основных свойств дзета-функции.

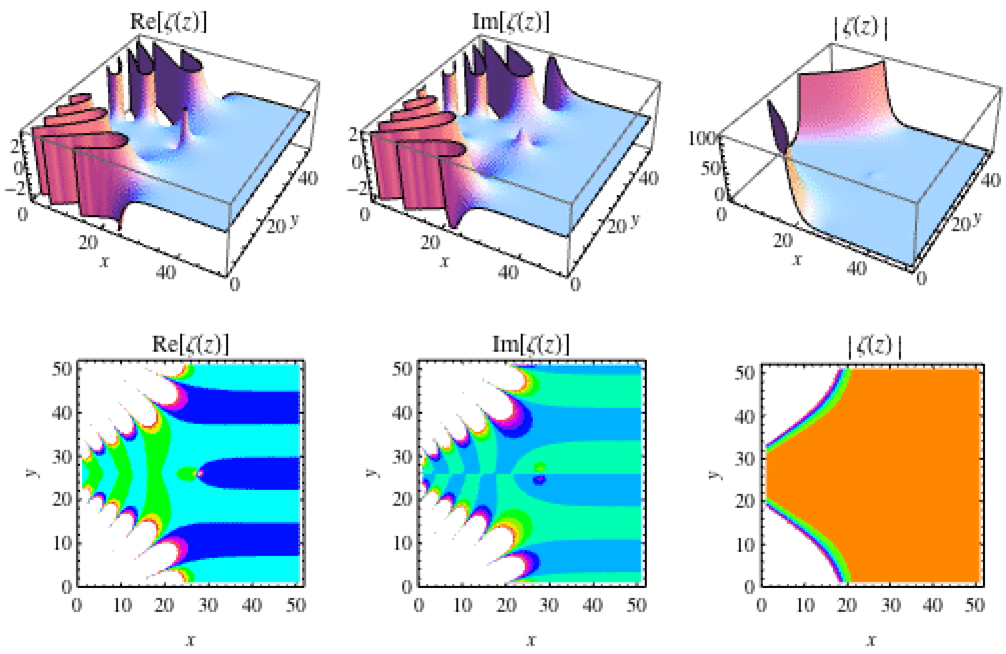

Рис. 2. График Дзета-функции Римана в комплексной плоскости

Основные свойства дзета-функции

- Тождественность ряда Дирихле и тождество Эйлера представляет собой одно из основных свойств функции $\zeta(s)$. Оно позволяет получить многочисленные соотношения, связывающие $\zeta(s)$ с важнейшими теоретико-числовыми функциями. Так, при $Re(s) > 1$

$$\zeta(s) = \frac{\eta(s)}{1 - 2^{1-s}}, \tag{3}$$

- $$2\zeta(2s) = (-1)^{m+1}\frac{(2\pi)^{2m}}{(2m)!}B_{2m}, \qquad \textit{где } B_{2m} - \textit{число Бернулли}. \tag{4}$$

  Числа Бернулли — последовательность рациональных чисел$B_0, B_1, B_2, \dots$, *впервые рассмотренная Якобом Бернулли в связи с вычислением суммы последовательных натуральных чисел, возведенных в одну и ту же степень:*

$$\sum_{n=1}^{N-1} n^k = \frac{1}{k+1}\sum_{s=0}^{k} C_{k+1}^{s} B_s N^{k+1-s}$$

  .

  В частности, $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$.

- О значениях дзета-функции в нечётных целых точках известно мало. Роже Апери в 1978 году доказал иррациональность числа $\zeta(3)$. Также доказано, что среди значений $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)$. есть хотя бы одно иррациональное(Зудилин, 2001).

В 2001 Балл и Ривоал доказали существования бесконечного числа $n \in \mathbb{N}$, таких,что $\zeta(2n+1)$ иррационально.

- При $Res > 1$

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}, \qquad \text{где } \mu(n) - \text{функция Мёбиуса}, \tag{5}$$

$\mu(n) = (-1)^k$,*если* n *не делится на квадрат простого числа, где* k *— число простых делителей* n*;*

$\mu(n) = 0$,*если* n *делится на квадрат простого числа.* $\forall n \in \mathbb{N}$.

- $$\zeta^2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^s}, \ \text{где } \tau(n) - \text{число делителей числа } n. \tag{6}$$

- $$\zeta^2(s)\zeta(2s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\nu(n)}}{n^s}, \ \text{где } \nu(n) - \text{число простых делителей числа } n. \tag{7}$$

Проблема Базеля

Задача

Требуется найти точное значение следующей бесконечной суммы:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}. \tag{8}$$

Как и для всех остальных бесконечных рядов, для этого ряда возникает вопрос, сходится ли он к конечному значению. Тот факт, что его члены становятся бесконечно малыми, не является достаточным для обеспечения сходимости. Например, следующий ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

имеет бесконечную сумму, т.е. расходится, несмотря на то, что его члены становятся сколь угодно малыми (этот ряд называется *гармоническим*)

Решение

Для начала рассмотрим алгебраическое уравнение, степень которого произвольно полажим равной четырем:

$$x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0 \ .$$

Предположим, что его корни b, c, d и e. Тогда мы можем разложить полином на линейные множители следующим образом:

$$(b-x)(c-x)(d-x)(e-x) = 0 \ .$$

Если ни один из этих корней не равен нулю, мы можем записать также

$$\frac{(b-x)(c-x)(d-x)(e-x)}{bcde} = (1-\frac{x}{b})(1-\frac{x}{c})(1-\frac{x}{d})(1-\frac{x}{e}) = 0 \ .$$

Эйлер увидел связь между разложением $\sin(x)$ в ряд Тэйлора и рядом обратных квадратов

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \ .$$

Мы знаем нули синуса, это $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$ Первой идеей Эйлера было предположение, что теорема о разложении на множители верна для бесконечных полиномов

$$\frac{\sin(x)}{x} = (1-\frac{x}{\pi})(1+\frac{x}{\pi})(1-\frac{x}{2\pi})(1+\frac{x}{2\pi})(1-\frac{x}{3\pi})(1+\frac{x}{3\pi})\ldots \ .$$

Заметим, что каждая пара множителей $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ и и перепишем равенство

$$\frac{\sin(x)}{x} = (1 - \frac{x^2}{\pi^2})(1 - \frac{x^2}{4\pi^2})(1 - \frac{x^2}{9\pi^2})\ldots\ .$$

Хотя произведение состоит из бесконечного числа множителей, мы можем выяснить, какой коэффициент будет при каждой степени .

Так, Эйлер увидел, что в нашем бесконечном произведении член, содержащий , будет равен

$$\left(-1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{9} - \frac{1}{16} - \ldots\right)\left(\frac{1}{\pi^2}\right)x^2$$

.

Однако, поскольку бесконечное произведение равно бесконечному ряду для $\frac{\sin(x)}{x}$, коэффициент при x^2 должен быть равен $-\frac{1}{3!} = -\frac{1}{6}$.Приравняем коэффициенты и умножим полученное равенство на π^2, получим

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6} = 1.644934066848\ldots.$$

Используя подобные методы, он показал, что

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \ldots = \frac{\pi^4}{90}\ ,$$

$$1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \ldots = \frac{\pi^6}{945}\ .$$

Гипотеза Римана и нули дзета-функции

Нули дзета-функции

Нули дзета-функции делятся на два типа: тривиальные и нетривиальные нули. Дзета-функция Римана $\zeta(s)$ определена для всех комплексных $s \neq 1$ и имеет нули в отрицательных чётных $s = -2, -4, -6\ldots$

Это следует из свойства дзета-функции Римана, т. к. $\zeta(s)$ представима в виде:

$$2\zeta(s) = (-1)^{m+1}\frac{(2\pi)^{2m}}{(2m)!}B_{2m} \quad \Rightarrow$$

$$\zeta(-2m) = -\frac{B_{m+1}}{2m+2}, \quad m = 1, 2, \ldots$$

$$\zeta(-2) = \zeta(-4) = \zeta(-6) = \ldots = 0$$

(из свойства числа Бернулли $B_{2m+1} = 0, \quad m = \overline{1, 2, 3, \ldots}$)

Числа $-2, -4, -6, \ldots, -2k, \ldots$ называют *тривиальными нулями* дзета-функции, и других вещественных нулей у этой функции нет.

Из функционального уравнения

$$\zeta(s) = 2^s\pi^s \sin\frac{\pi s}{2}\frac{1}{\sin(\pi s)\Gamma(s)}\zeta(1-s)$$

и явного выражения

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}, \quad \textit{при } Re(s) > 1 \ ,$$

где $\mu(n)$ - функция Мёбиуса, следует, что все остальные нули, называемые *«нетривиальными»*, расположены в полосе $0 < Re(s) < 1$ симметрично относительно так называемой «критической линии $\frac{1}{2} + \imath t, t \in \mathbb{R}$.

Гипотеза

Гипотеза Римана о распределении нулей дзета-функции Римана была сформулирована Бернхардом Риманом в 1859 году. Гипотеза Римана утверждает, что:

Все нетривиальные нули дзета-функции имеют действительную часть, равную $\frac{1}{2}$.

Следствия гипотезы Римана

Гипотеза Римана остается самой знаменитой проблемой математики, не из-за того, что гипотеза является не решенной до сих пор, а потому что имеет важные следствия в теории чисел. Риман обнаружил, что количество простых чисел, не превосходящих x, — функция распределения простых чисел, обозначаемая $\pi(x)$ — выражается через распределение так называемых «нетривиальных нулей» дзета-функции. Если гипотеза Римана верна, имеем оценку для функции $\pi(x)$:

$$\pi(x) = \int\limits_2^x \frac{dt}{\ln(t)} + O(x^{\frac{1}{2}} \ln(x)) \tag{9}$$

иначе, аппроксимируя $\pi(x)$ интегралом $\int\limits_2^x \frac{dt}{\ln(t)}$ имеем:

$$\pi(x) = \int\limits_2^x \frac{dt}{\ln(t)} + O(xe^{-\frac{A\ln(x)^{\frac{3}{5}}}{\ln\ln(x)^{\frac{1}{5}}}}) \tag{10}$$

Порядок аппроксимации $\pi(x)$ интегралом "лучше чем $O(x^{\frac{1}{2}+\epsilon})$ в то время как приближение "хуже чем $O(x^{1-\epsilon})$, $\forall\epsilon > 0$. Порядок аппроксимации зависит от области расположения нулей дзета функции около $Re(s) = 1$. Оценка (13) было получено в 1958 году, после исследования Виноградовым и Коробовым поведения дзета-функции Римана в области $Re(s) = 1$.

Среди известных следствии гипотезы Римана,имеем:

- Гипотезу Линделофа: если гипотеза Римана верна, то

  $$\zeta(\frac{1}{2} + it) = O(t^{\epsilon}),\ \forall\epsilon > 0, \quad npu t \to \infty$$

  . На сегодняшний день без гипотезы Римана лучшей оценкой считается

  $$\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = O(t^{A+\epsilon}),$$

  где $A = \frac{139}{858} = 0.162004...$(вычисленный Колесниковым).

- Оценку среднего значения функции Мёбиуса: если гипотеза Римана верна, то

  $$M(x) = O(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}),\ \forall\epsilon > 0,$$

  где $M(x) = \sum\limits_{n \leq x} \mu(n),\ \mu(x)$ - функция Мёбиуса.

Попытки доказательства гипотезы Римана

Многие математики пытались доказать или опровергнуть гипотезу Римана.Тысячи ошибочных доказательств были предоставлены более чем за один век.

Другой подход доказательства состоит в численном вычислении, который может опровергнуть гипотезу Римана. Например, на данный момент были проверены первые 10^{12} нули на критической линии.

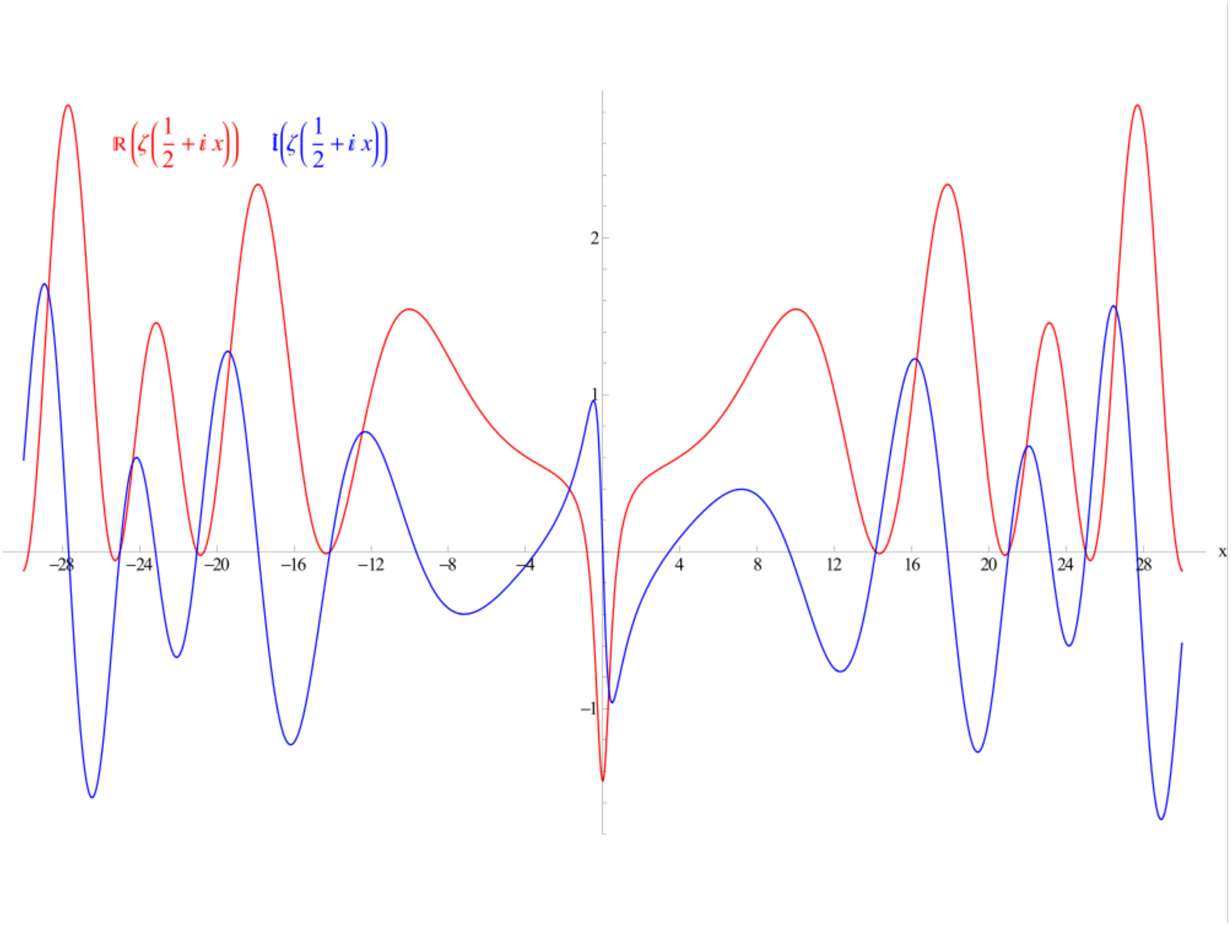

Рис. 3. Вещественная(красный) и мнимая(синий) части дзета-функции Римана вблизи "критической"линии $Res = \frac{1}{2}$

Связь дзета-функции с простыми числами

Б. Риман в своем знаменитом мемуаре **«О числе простых, не превышающих данной величины »** связал задачу исследования распределения простых чисел в натуральном ряде с проблемой расположения нулей дзета-функции Римана в критической полосе. Открытие Б. Римана 1859 г., состоящее в том, что комплексные нули дзета-функции определяют закон распределения простых чисел, сделало эпоху в теории простых чисел. Риман нашел явную формулу, связывающую функцию $\pi(x)$ с суммой по нулям дзета-функции.

Пусть $\pi(x)$ обозначает число простых чисел, не превосходящих x. При $Res > 0$ выполняется равенство

$$\ln \zeta(s) = s \int\limits_{1}^{\infty} \frac{\pi(x)dx}{x(x^s - 1)} \tag{11}$$

Тождество указывает на один из возможных путей исследования функции $\pi(x)$. Можно исследовать аналитические свойства функции $\ln \zeta(s)$ и найти соответствующее обратное интегральное преобразование.

Функциональное уравнение дзета-функции

Для обоснования аналитического продолжения дзета-функции Римана введем два определения.

Многочлены и числа Бернулли. Многочлены Бернулли могут быть определены явной формулой:

$$B_n(x) = \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{k!}{(k-m)!m!} (x+k)^n. \tag{12}$$

Производящей функцией для многочленов Бернулли является

$$\frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!}. \tag{13}$$

Значения многочленов Бернулли при $x = 0$ равны соответствующим числам Бернулли:

$$B_n(0) = B_n \tag{14}$$

Формула Эйлера-Маклорена. Формулу суммирования Эйлера-Маклорена введем без доказательства, которая имеет вид

$$\sum_{a \le k \le b} f(k) = \int_a^b f(x)dx + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_k}{k!} f^{(k-1)}(x)\Big|_a^b + (-1)^{m+1} \int_a^b \frac{B_m(\{x\})}{m!} f^{(m)}(x)dx, \tag{15}$$

$a \le b, m\ in \mathbb{N}$, B_k- числа Бернулли, $f(x) \in \mathbb{C}^m$, $B_m(x)$ - многочлены Бернулли, $\{x\}$ - дробная часть x.

Подробное доказательство данной формулы можно найти в книге Topics in analytic number theory,Hans Rademacher, Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin 1973.

Аналитическое продолжение

Дзета-функция Римана имеет аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость $\mathbb{C}$, кроме $s = 1$, где она имеет простой полюс. Один из возможных путей доказательства этого основного свойства дзета-функции Римана заключается в представлении (*). Используя формулу суммирования Эйлера-Маклорена, примененную к функции

$f(s) = x^{-s}$ с порядком q получаем:

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1}+\frac{1}{2}+\sum_{r=2}^{q}\frac{B_r}{r!}s(s+1)...(s+r-2)-\frac{1}{q!}s(s+1)...(s+q-1)\int\limits_{1}^{+\infty}B_q(\{x\})x^{-s-q}dx, \quad (16)$$

где B_r-числа Бернулли и $B_q(\{x\})$ - полиномы Бернулли с дробными аргументами $\{x\} = x - [x]$. Интеграл в правой части выражения сходится не только для $Re(s) > 1$, но и для $Re(s) > 1 - q$. Формула (16) обеспечивает аналитическое продолжение $\zeta(s)$ на полуплоскость $Re(s) > 1 - q$. В свою очередь порядок q может быть выбран произвольно. Из этого мы заключаем, что $\zeta(s)$ аналитический может быть продолжена на всю комплексную плоскость, за исключением точки $s = 1$, где функция имеет простой полюс.

Функциональное уравнение

Одним из "замечательных"свойств дзета-функции, открытым самим Риманом, было функциональное уравнение:

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma(\frac{1-s}{2})\zeta(1-s) \quad (17)$$

Для начала вспомним гамма-функцию Эйлера. Гамма функция определяется соотношением:

$$\Gamma(s) = \int\limits_{0}^{\infty} e^{-t}t^{s-1}dt, \quad s \in \mathbb{C} : Re(s) > 0 \quad (18)$$

Гамма-функция не имеет нулей на всей комплексной плоскости. $\Gamma(s)$ является мероморфной на комплексной плоскости и имеет простые полюса в точках $s = 0, -1, -2, ...$

После замены $t = \pi n^2 x$ в функции $\Gamma(\frac{s}{2})$ получим:

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})n^{-s} = \int\limits_{0}^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1}e^{-\pi n^2 x}dx, \quad Re(s) > 0$$

Просуммируем получившееся выражение по всем $n \in \mathbb{N}$:

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s) = \int\limits_{0}^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x}dx$$

Перемена порядка суммирования и интегрирования возможна в силу абсолютной сходимости интеграла в правой части при $Re(s) > 1$.

Введем функцию, определяя её формулой

$$\Theta(x) = \sum_{n\in Z} e^{-\pi n^2 x} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x}$$

Полагая,

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x} \ ,$$

получим выражения, удовлетворяющий $\Theta(x)$ - функции:

$$\Theta(x) = 1 + 2\psi(s)$$

Подставим введенную функцию $\psi(x)$ в предыдущие выражение и разобьем выражение на два интеграла:

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s) = \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1}\psi(x)dx + \int_1^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1}\psi(x)dx$$

Далее, известно, что для $x > 0$

$$\Theta(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\Theta(\frac{1}{x}) \quad \Rightarrow$$

$$2\psi(x) + 1 = \frac{1}{\sqrt{x}}(2\psi(\frac{1}{x}) + 1) \ .$$

Выразив $\psi(x)$ из последнего равенства и подставив в выражение, получаем:

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s) = \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1}\psi(x)dx + \int_1^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1}\psi(x)dx =$$

$$\int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1}\{\frac{1}{\sqrt{x}}\psi(\frac{1}{x}) + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\}dx + \int_1^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1}\psi(x)dx =$$

$$frac1s(s-1) + \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}}\psi(\frac{1}{x})dx + \int_1^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1}\psi(x)dx =$$

$$\frac{1}{s(s-1)} + \int_1^{\infty}(x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} + x^{-\frac{s}{2}-1})\psi(x)dx$$

Последний интеграл сходится для всех s, поэтому полученная формула,согласно принципу аналитического продолжения, справедлива для всех $s \in \mathbb{C}/\{1\}$. Правая часть последнего интеграла не меняется при замене s на $1-s$. Отсюда получаем одну из форм функционального уравнения:

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s)=\pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma(\frac{1-s}{2})\zeta(1-s)$$

Определив выражение:

$$\xi(s)=\frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s),$$

получаем для $\xi(s)$ функциональное уравнение:

$$\xi(s)=\xi(1-s).$$

Определенная $\xi(s)$ -функция является инвариантом относительно замены $s\mapsto 1-s$ и определена на $Re(s)>0$, так как множитель $s-1$ "перекрывает"полюс $\zeta(s)$ в точке $s=1$. Через функциональное уравнение $\xi(s)$ определяет аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость.

Далее, при $s=\frac{1}{2}+it, \quad t\in\mathbb{R}$, кси-функция принимает вид:

$$\xi(\frac{1}{2}+it)=\xi(\frac{1}{2}-it)\ .$$

Обозначим

$$\Xi(t)=\xi(\frac{1}{2}+it),\quad t\in\mathbb{R}.$$

$\Xi(t)$ является четной функцией:

$$\Xi(t)=\Xi(-t)\ .$$

И нули $\Xi(t)$ на $\mathbb{R}$ соответствуют нулям $\zeta(s)$ на *критической полосе.*

Из этого делаем вывод, что все нетривиальные нули дзета-функции являются комплекснозначными числами, симметричны относительно оси $Re(s)=\frac{1}{2}$ и лежат на критической полосе $0\leq Re(s)\leq 1$.

Общая теорема Германа Мюнца (Herman Muntz)

Теорема Мюнца. Если $F(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

1. $F(x)$ непрерывна и ограничена на $\forall$ конечном интервале, т.е. $\forall x \in [a,b]$,где $a < b < \infty$ и $\exists M > 0 : |F(x)| < M$

2. $F(x)$ имеет порядок $x^{-\alpha}, \alpha > 1$ при $x \to \infty : \exists \alpha > 1, \exists C > 0$, такой что

$$|F(x)| \le \frac{C}{x^{-\alpha}}, \quad \forall x \in [a, \infty)$$

3. $F'(x)$ непрерывна и ограничена на $\forall$ конечном интервале, т.е. $\forall x \in [a', b'] \exists M' > 0 :$ $|F'(x)| < M'$

4. $F'(x)$ имеет порядок $x^{-\beta}, \beta > 1$ при $x \to \infty : \exists \beta > 1, \exists C' > 0$, такой что

$$|F'(x)| \le \frac{C'}{x^{-\beta}}, \quad \forall x \in [a', \infty)\ .$$

Тогда $\zeta(s)$ удовлетворяет функциональному уравнению:

$$\zeta(s) \int\limits_0^\infty y^{s-1} F(y) dy = \int\limits_0^\infty x^{s-1} \{\sum_{n=1}^\infty F(nx) - \frac{1}{x} \int\limits_0^\infty F(v) dv\} dx\ . \tag{19}$$

Доказательство:

Имеем

$$\int\limits_0^\infty x^{s-1} \sum_{n=1}^\infty F(nx) dx = \sum_{n=1}^\infty \int\limits_0^\infty x^{s-1} F(nx) dx\ .$$

После замены переменной $nx = y$ получаем

$$\sum_{n=1}^\infty \int\limits_0^\infty x^{s-1} F(nx) dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s} \int\limits_0^\infty y^{s-1} F(y) dy = \zeta(s) \int\limits_0^\infty y^{s-1} F(y) dy\ .$$

Перемена порядка суммирования и замена переменной законна, в силу признака Вейерштрасса о равномерной сходимости несобственных интегралов, теоремы о замене переменной в интеграле и условий 1-4 теоремы.

Из условий 3 и 4 получаем:

$$x \int\limits_0^\infty F'(ux)(u - [u]) du = \int\limits_0^\infty (u - [u]) dF(ux) =$$

$$\sum_{n=0}^\infty \int\limits_n^{n+1} (u - [n]) dF(ux) = \sum_{n=0}^\infty (u - [u]) F(ux)|_n^{n+1} -$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_{n}^{n+1}F(ux)dx=\sum_{n=0}^{\infty}F((n+1)x)-\int\limits_{0}^{\infty}F(ux)dx$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}F((n+1)x)=\sum_{n=1}^{\infty}F(nx)\ .$$

Получаем:

$$\sum_{n=1}^{\infty}F(nx)-\int\limits_{0}^{\infty}F(ux)du=x\int\limits_{0}^{\infty}F'(ux)(u-[u])du\ ,$$

$$x\int\limits_{0}^{\infty}F'(ux)(u-[u])du=x\int\limits_{0}^{\frac{1}{x}}O(1)du+x\int\limits_{\frac{1}{x}}^{\infty}O((ux)^{-\beta})du\ .$$

При $\beta>1$ имеем

$$x\int\limits_{0}^{\frac{1}{x}}(ux)^{-\beta}du=x^{1-\beta}\int\limits_{\frac{1}{x}}^{\infty}u^{-\beta}du=x^{1-\beta}\frac{u^{1-\beta}}{1-\beta}|_{\frac{1}{x}}^{\infty}=\frac{1}{1-\beta}(-const).$$

$$x\int\limits_{0}^{\frac{1}{x}}C_1du=C_1,$$

где C_1-const.

Получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty}F(nx)=\frac{1}{x}\int\limits_{0}^{\infty}F(v)dv+\frac{C}{x}+O(1)\ .$$

Отсюда следует,что

$$\int\limits_{0}^{\infty}x^{s-1}\sum_{n=1}^{\infty}F(nx)dx=\int\limits_{0}^{\infty}x^{s-1}\{\sum_{n=1}^{\infty}F(nx)-\frac{C}{x}\}dx+\frac{C}{s-1}+\int\limits_{1}^{\infty}x^{s-1}\sum_{n=1}^{\infty}F(nx)dx\ .$$

Правая часть выражения регулярна при $Re(s)>0$ (за исключением $s=1$). При $Re(s)<1$ имеем

$$\frac{C}{s-1}=-C\int\limits_{1}^{\infty}x^{s-2}dx\ .$$

И мы получаем формулу Мюнца:

$$\zeta(s)\int\limits_0^\infty y^{s-1}F(y)dy=\int\limits_0^\infty x^{s-1}\{\sum_{n=1}^\infty F(nx)-\frac{1}{x}\int\limits_0^\infty F(v)dv\}dx$$

Формула справедлива для $0 < Re(s) < 1$ и $F(x)$ удовлетворяющему условиям теоремы 1-4.

Примеры:

1. Пусть $F(x) = e^{-x}$. $F(x)$ - удовлетворяет условиям 1-4 теоремы Мюнца. Тогда функциональное уравнение для дзета-функции Римана примет вид

$$\zeta(s)\int\limits_0^\infty y^{s-1}e^{-y}dy=\int\limits_0^\infty x^{s-1}\{\sum_{n=1}^\infty e^{-nx}-\frac{1}{x}\int\limits_0^\infty e^{-v}dv\}dx\ ,$$

$$\int\limits_0^\infty e^{-v}dv=1\ .$$

Переходя к пределу под знаком интеграла,найдем

$$\zeta(s)\int\limits_0^\infty y^{s-1}e^{-y}dy=\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^\infty x^{s-1}\{\sum_{n=1}^\infty e^{-nx}-\frac{1}{x}\}dx\ ;$$

$$\zeta(s)\int\limits_0^\infty y^{s-1}e^{-y}dy=\int\limits_0^\infty x^{s-1}\{\lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^\infty e^{-nx}-\frac{1}{x}\}dx\ ;$$

$$\zeta(s)\int\limits_0^\infty y^{s-1}e^{-y}dy=\int\limits_0^\infty x^{s-1}\{\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}\}dx\ .$$

2. При $F(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ имеем

$$\sum_{n=1}^\infty F(nx)-\frac{1}{x}\int\limits_0^\infty F(\nu)d\nu=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{1}{x}=\frac{\psi^{(1)}(1+\frac{1}{x})}{x^2}-\frac{1}{x},$$

где $\psi^{(n)}(z) = \frac{d^{m+1}}{dz^{m+1}}\ln\Gamma(z)$ - полигамма функция.

Отсюда находим

$$\frac{(1-s)\pi}{\sin\pi s}\zeta(s)=\int\limits_0^\infty x^{s-3}\{\psi^{(1)}(1+\frac{1}{x})-x\}dx\ .$$

3. Пусть $F(x)=\frac{\cos(x)}{1+x^2}$. Вычисление будем проводить в пакете Mathematica:

$$(*)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{1+(nx^2)}=\frac{e^{-\pi x}}{4(1+x^2)}\left({}_2F_1(1,1-\frac{\pi}{x},2-\frac{\pi}{x},e^{-\pi x})\right)(1-\pi x)+$$

$$+\left({}_2F_1(1,1-\frac{\pi}{x},2-\frac{\pi}{x},e^{\pi x})\right)(e^{2\pi x}-\pi x e^{2\pi x})+\left({}_2F_1(1,1+\frac{\pi}{x},2+\frac{\pi}{x},e^{-\pi x})\right)(1+\pi x)+$$
$$+\left({}_2F_1(1,1+\frac{\pi}{x},2+\frac{\pi}{x},e^{\pi x})\right)(e^{2\pi x}+\pi x e^{2\pi x}),$$

где ${}_2F_1(a,b,c,z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n z^n}{(c)_n}\frac{z^n}{n!}$ - гипергеометрический ряд (ряд Гаусса), а $(x)_n$ - символ Похгаммера, определяется соотношением:

$(x)_n=\frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)}$.

(Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции / Пер. Н. Я. Виленкина. — Изд. 2-е,. — М.: Наука, 1973. — Т. 1. — 296 с.)

$$\int\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(x)}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{2e};$$

$$(**)\qquad \int\limits_{0}^{\infty}\frac{y^{s-1}\cos(y)}{1+y^2}dy=\frac{1}{2}\pi\,\mathrm{ch}(1)\frac{1}{\sin(\frac{\pi s}{2})}+\cos(\frac{\pi s}{2})\Gamma(s-2)_pF_q(\{1\},\{\frac{3}{2}-\frac{s}{2},2-\frac{s}{2}\},\frac{1}{4}),$$

где ${}_pF_q$ - обобщение для гипергеометрического ряда.

Обозначив через $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ формулу (*) и (**) , получаем функциональное уравнение для дзета-функции:

$$\zeta(s)Q_2(s)=\int\limits_{0}^{\infty}x^{s-1}\{Q_1-\frac{\pi}{2ex}\}dx\ .$$

Заключение

Дипломная работа не претендует на доказательство "великой"гипотезы Б. Римана, однако в дипломной работе рассматриваются вопросы об аналитическом продолжении дзета-функции, о её функциональном уравнении, которая помогает раскрыть поведении дзета-функции на комплексной плоскости и выражает связь между значением в одной точке со значениями в других точках. Был рассмотрен метод, который переформулирует гипотезу Римана в терминах функционального уравнения,кси-функции, $\Xi(t)$. В завершении дипломной работы было доказано теорема Г.Мюнца и на её основе было построено новое функциональное уравнение. Построены примеры применения общего подхода Г. Мюнца для конкретных функции.

Список литературы

[1] Титчмарш, Е.К. Теория дзета-функции Римана/Е.К. Титчмарш; пер. М.А. Евграфов. - М. : Москва, 1953г. - 387с.

[2] Воронин, С.М. Дзета-функция Римана/С.М. Воронин, А.А. Карацуба. - М. : Физматлит, 1994г. - 376с.

[3] Gordon, X. The Riemann Zeta-function $\zeta(s)$: generalities/ X. Gordon, P. Sebah. 2004.

[4] Харди, Г. Расходящиеся ряды/ Г. Харди; пер. Д.А. Райков. - М. : Москва, 1951г. - 498с.

[5] Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции/Г. Бейтмен, А. Эрдейи; пер. Н. Я. Виленкина. — М.: Наука, 1973. — Т. 1. — 296 с.

[6] Ossicini, A. An alternative form of the functional equation for Riemann's zeta function/ A. Ossicini, arXiv:0709.4173, - 2013.

[7] Ossicini, A. An alternative form of the functional equation for Riemann's zeta function, II/ A. Ossicini, arXiv:1206.4494v16, 2013.

[8] Rademacher, H. Topics in analytic number theory/ H. Rademacher. - M. : Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin, 1973. - 322c.

[9] Stenlund, H. Recursion Relations and Functional Equations for the Riemann Zeta Function/ H. Stenlund. - M. : Visilab Signal Technologies Oy, Finland, arXiv:1107.3479v3, 2011.