УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 154, кн. 4 Физико-математические науки *2012*

УДК 515.124.4

О ДЕЙСТВИИ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЙ ГРУППЫ НЕНУЛЕВЫХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ НА ПУНКТИРОВАННОМ ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО

Е.Н. Сосов

Аннотация

Рассмотрено пунктированное пространство Лобачевского Λ в модели Бельтрами – Клейна. Получена явная формула для действия мультипликативной группы ненулевых вещественных чисел на пространстве Λ, аналогичного действию указанной группы гомотетиями на пунктрованном евклидовом пространстве.

Ключевые слова: пространство Лобачевского, модель Бельтрами – Клейна, мультипликативная группа ненулевых вещественных чисел.

Введение

Пусть $\mathbb{E}$ – евклидово пространство размерности больше 1 над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$, $B(O,1)$ – открытый шар в $\mathbb{E}$ радиуса 1 с центром в фиксированной точке O. Точки внутри шара и на его границе будем задавать их радиусами-векторами, например, точка O задается нулевым радиусом-вектором 0. Рассмотрим модель Бельтрами – Клейна пространства Лобачевского [1–3]. В этой модели л-точка есть точка в $\Lambda = B(O,1)$, л-прямая есть хорда в Λ, а расстояние между л-точками, заданными своими радиусами-векторами x, $y \in \Lambda$ относительно точки O, вычисляется по формуле

$$\rho(x,y) = k\,\mathrm{Arch}\,\frac{1-(x,y)}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}}, \tag{1}$$

где k – положительная константа, (x,y) – скалярное произведение радиусов-векторов x, y и x^2 – скалярный квадрат радиуса-вектора x [3, с. 5].

Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$, p, $x \in \Lambda$. Определим точку $\lambda_p(x) \in \Lambda$ с помощью следующих трех условий [4–6].

1. $\rho(p, \lambda_p(x)) = |\lambda| \rho(p,x)$.
2. При $x \neq p$, $\lambda > 0$ точки x, $\lambda_p(x)$ лежат на л-прямой $P(p,x)$, проходящей через точки p, x, по одну сторону от точки p.
3. При $x \neq p$, $\lambda < 0$ точки x, $\lambda_p(x)$ лежат на л-прямой $P(p,x)$ по разные стороны от точки p.

Отображение

$$x \mapsto \lambda_p(x),$$

где λ пробегает множество всех ненулевых вещественных чисел, определяет действие мультипликативной группы ненулевых вещественных чисел на пунктированном пространстве Лобачевского (точка $p \in \Lambda$ фиксирована).

Нетрудно проверить, что при $\lambda \neq 1$ точка $\lambda_p(x)$ делит ориентированный л-отрезок $[p, x]$ с началом в точке p и концом в точке x в отношении $\lambda : (1-\lambda)$ [5, 6]. Отметим также следующие элементарные свойства отображения λ_p.

A. Для всех p, x, $y \in X$, λ, $\mu \in \mathbb{R}$ имеют место равенства

$$\lambda_x(y) = (1-\lambda)_y(x), \quad \rho(\lambda_p(x), \mu_p(x)) = |\lambda - \mu|\rho(p, x).$$

B. Для всех x, $y \in X$, $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$, $\mu \in \mathbb{R}$ имеет место равенство

$$\mu_x(y) = (\mu + \lambda(\mu - 1))_z(y),$$

где точка

$$z = \left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)_x (y)$$

делит ориентированный л-отрезок $[x, y]$ в отношении λ [5], [6, с. 79].

Напомним, что в модели Бельтрами – Клейна произвольное движение есть ограничение на открытый шар Λ проективного преобразования евклидова пространства, сохраняющего Λ [3, с. 7]. Это движение f можно представить в виде

$$f = g_a \circ U,$$

где U – ортогональное преобразование евклидова пространства $\mathbb{E}$ с фиксированной точкой O, суженное на шар Λ, а g_a – параллельный перенос в модели Бельтрами – Клейна из точки O вдоль направленного л-отрезка, определенного вектором a, такого, что $0 \leq |a| < 1$ [3, с. 7].

Параллельный перенос g_a можно представить в виде [3, с. 23, 24]

$$g_a : \Lambda \to \Lambda, \qquad g_a(x) = \frac{((a,x) + a^2)a + (a^2 x - (a,x)a)\sqrt{1-a^2}}{a^2(1+(a,x))}.$$

Параллельный перенос используется, например, в специальной теории относительности для интерпретации закона преобразования скорости частицы или закона сложения скоростей [7], [8, с. 10–12]. Это преобразование можно представить и в такой форме [4], [9, с. 44]

$$g_a(x) = (-1)_{\left(\frac{1}{2}\right)_0(a)} \circ (-1)_0(x).$$

Хорошо известно, что в евклидовом пространстве группа всех движений является собственной подгруппой группы всех подобий, а в пространстве Лобачевского эти группы совпадают. Но группу всех движений пространства Лобачевского можно расширить, образовав конечные композиции движений с преобразованиями λ_p, когда точка p пробегает Λ и $\lambda > 0$. Получится сложная и недостаточно изученная группа преобразований. Ясно, что для изучения этой группы желательно иметь явное представление преобразования λ_p.

1. Основной результат

Явное представление преобразования λ_p указано в лемме 2 из [6, с. 84] в более общем случае геометрии Гильберта [5]. Там же доказано [6, с. 84], что это преобразование уменьшает расстояния при $0 < \lambda < 1$ и, следовательно, увеличивает расстояния при $\lambda > 1$. Но преобразование λ_p упростить в случае геометрии Лобачевского достаточно сложно. Еще один способ нахождения преобразования λ_p состоит в использовании представления [9, с. 25]

$$\lambda_p = g_p \circ \lambda_0 \circ g_{-p}$$

с учетом того, что
$$\lambda_0(x) = x \operatorname{cth} b \operatorname{th}(\lambda b),$$
где $b = \rho(0,x)/k$, $x \in \Lambda$ [5], [6, с. 86]. Такой способ приводит к очень большим вычислениям и нетривиальным преобразованиям. В модели Бельтрами – Клейна более простой способ нахождения преобразования λ_p реализован нами в следующей теореме.

Теорема. *Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$, p, $x \in \Lambda$. Тогда имеет место следующая формула*
$$\lambda_p(x) = \frac{p \operatorname{ch} a \operatorname{sh}((1-\lambda)c) + x \operatorname{ch} b \operatorname{sh}(\lambda c)}{\operatorname{ch} a \operatorname{sh}((1-\lambda)c) + \operatorname{ch} b \operatorname{sh}(\lambda c)},$$
где $a = \rho(0,p)/k$, $b = \rho(0,x)/k$, $c = \rho(p,x)/k$.

Доказательство. Из определения точки $\lambda_p(x)$ следует, что ее радиус-вектор можно искать в виде
$$\lambda_p(x) = p + \mu(x-p),$$
где $\mu \in \mathbb{R}$. Подставим правую часть этого равенства в условие 1 и используем формулу (1) для расстояния. Тогда получим следующее уравнение относительно μ:
$$\frac{1-(p, p+\mu(x-p))}{\sqrt{1-p^2}\sqrt{1-(p+\mu(x-p))^2}} = \operatorname{ch}(\lambda c).$$
Возведя обе части в квадрат и используя основное гиперболическое тождество, получим
$$((p,x-p)^2 + \operatorname{ch}^2(\lambda c)(1-p^2)(x-p)^2)\mu^2 + 2\mu(1-p^2)(p,x-p)\operatorname{sh}^2(\lambda c) - (1-p^2)^2 \operatorname{sh}^2(\lambda c) = 0.$$
Найдем корни этого квадратного уравнения:
$$\mu_{1,2} = \frac{-(1-p^2)(p,x-p)\operatorname{sh}^2(\lambda c) \pm \sqrt{\Delta}}{(p,x-p)^2 + \operatorname{ch}^2(\lambda c)(1-p^2)(x-p)^2},$$
где $\Delta = (1-p^2)^2(p,x-p)^2 \operatorname{sh}^4(\lambda c) + ((p,x-p)^2 + \operatorname{ch}^2(\lambda c)(1-p^2)(x-p)^2)(1-p^2)^2 \operatorname{sh}^2(\lambda c)$. Используя основное гиперболическое тождество, упростим числитель
$$(1-p^2)\operatorname{sh}(|\lambda|c)(-(p,x-p)\operatorname{sh}(|\lambda|c) \pm \operatorname{ch}(\lambda c)\sqrt{(p,x-p)^2 + (1-p^2)(x-p)^2}).$$
Теперь нетрудно упростить формулу для корней
$$\mu_{1,2} = \frac{(1-p^2)\operatorname{sh}(|\lambda|c)}{(p,x-p)\operatorname{sh}(|\lambda|c) \pm \operatorname{ch}(\lambda c)\sqrt{(p,x-p)^2 + (1-p^2)(x-p)^2}} =$$
$$= \frac{(1-p^2)\operatorname{sh}(|\lambda|c)}{(1-p^2-(1-(p,x)))\operatorname{sh}(|\lambda|c) \pm \operatorname{ch}(\lambda c)\sqrt{(1-(p,x))^2 + (1-p^2)(1-x^2)}} =$$
$$= \frac{\operatorname{ch}^{-2} a \operatorname{sh}(|\lambda|c)}{(\operatorname{ch}^{-2} a - \operatorname{ch}^{-1} a \operatorname{ch}^{-1} b \operatorname{ch} c)\operatorname{sh}(|\lambda|c) \pm \operatorname{ch}(\lambda c)\sqrt{\operatorname{ch}^{-2} a \operatorname{ch}^{-2} b \operatorname{ch}^2 c + \operatorname{ch}^{-2} a \operatorname{ch}^{-2} b}} =$$
$$= \frac{\operatorname{ch} b \operatorname{sh}(|\lambda|c)}{\operatorname{ch} b \operatorname{sh}(|\lambda|c) + \operatorname{ch} a(-\operatorname{ch} c \operatorname{sh}(|\lambda|c) \pm \operatorname{ch}(\lambda c)\operatorname{sh} c)} =$$
$$= \frac{\operatorname{ch} b \operatorname{sh}(|\lambda|c)}{\operatorname{ch} b \operatorname{sh}(|\lambda|c) + \operatorname{ch} a \operatorname{sh}((\pm 1 - |\lambda|)c)}. \quad (2)$$

Если $\lambda = 1$, то $\mu = 1$ и в этом случае в формуле (2) должен быть верхний знак. Если $\lambda = -1$ и $p = 0$, то $\mu = -1$, $a = 0$, $c = b$ и в формуле (2) необходимо использовать нижний знак. Теперь нетрудно понять, что в формуле (2) верхний знак должен быть при $\lambda > 0$, а нижний знак – при $\lambda < 0$. Следовательно, получим формулу

$$\mu = \frac{\operatorname{ch} b \operatorname{sh}(\lambda c)}{\operatorname{ch} b \operatorname{sh}(\lambda c) + \operatorname{ch} a \operatorname{sh}((1-\lambda)c)}.$$

Таким образом, теорема доказана. □

Из теоремы следует известная формула для середины л-отрезка с концами p, $x \in \Lambda$

$$\left(\frac{1}{2}\right)_p (x) = \frac{p \operatorname{ch} a + x \operatorname{ch} b}{\operatorname{ch} a + \operatorname{ch} b} = \frac{p\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{1-p^2}}{\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-p^2}},$$

где $a = \rho(0,p)/k$, $b = \rho(0,x)/k$ [3, 5, 6]. Эту формулу можно применить, например, для нахождения радиуса-вектора r точки пересечения трех медиан треугольника через радиусы-векторы вершин треугольника p, x и y [3, с. 13]

$$r = \frac{p \operatorname{ch}(\rho(0,p)/k) + x \operatorname{ch}(\rho(0,x)/k) + y \operatorname{ch}(\rho(0,y)/k)}{\operatorname{ch}(\rho(0,p)/k) + \operatorname{ch}(\rho(0,x)/k) + \operatorname{ch}(\rho(0,y)/k)}.$$

Отметим, что отображение $2_0 : B(O,1) \to B(O,1)$ является изометрией модели Пуанкаре в шаре на модель Бельтрами – Клейна пространства Лобачевского в том же шаре [3, с. 18].

Summary

E.N. Sosov. On the Action of the Multiplicative Group of Nonzero Real Numbers on the Pointed Lobachevsky Space.

We consider the pointed Lobachevsky space Λ. In terms of the Beltrami–Klein model, we obtain an explicit expression for the action of the multiplicative group of nonzero real numbers on the space Λ. This action is analogous to that of this group on the pointed Euclidean space.

Key words: Lobachevsky space, Beltrami–Klein model, multiplicative group of nonzero real numbers.

Литература

1. *Широков П.А.* Краткий очерк основ геометрии Лобачевского. – М.: Наука, 1983. – 80 с.

2. *Нут Ю.Ю.* Геометрия Лобачевского в аналитическом изложении. – М.: Изд-во АН СССР, 1961. – 311 с.

3. *Сосов Е.Н.* Геометрия Лобачевского и её применение в специальной теории относительности. Часть 1. Геометрия Лобачевского. – Казань: Казан. ун-т, 2012. – 38 с.

4. *Сабинин Л.В.* Одули как новый подход к геометрии со связностью // Докл. АН СССР. – 1977. – Т. 233, № 5. – С. 800–803.

5. *Сосов Е.Н.* Об одном одуле в геометрии Гильберта // Изв. вузов. Матем. – 1995. – № 5. – С. 78–82.

6. *Sosov E.N.* Geometries of convex and finite sets of geodesic spaces. – arXiv:1011.6191v1 [math.MG]. – 2010. – 256 p.

7. *Сабинин Л.В., Михеев П.О.* О законе сложения скоростей в специальной теории относительности // Усп. матем. наук. – 1993. – Т. 48, № 5(293). – С. 183–184.

8. *Сосов Е.Н.* Геометрия Лобачевского и её применение в специальной теории относительности. Часть 2. Применение геометрии Лобачевского в специальной теории относительности. – Казань: Казан. ун-т, 2012. – 32 с.

9. *Матвеев О.А., Нестеренко Е.Л.* Универсальные алгебры в теории пространств аффинной связности, близких к симметрическим. – М.: Изд-во МГОУ, 2012. – 132 с.

Поступила в редакцию
02.11.12

Сосов Евгений Николаевич – доктор физико-математических наук, доцент кафедры геометрии Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: *Evgenii.Sosov@ksu.ru*