Известия вузов. Математика *http://old.kpfu.ru/journals/izv_vuz/*
2013, № 8, с. 66–79 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

Р.Г. САЛАХУДИНОВ

ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЕВКЛИДОВЫХ ГРАНИЧНЫХ МОМЕНТОВ ОДНОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ

Аннотация. Рассматриваются интегральные функционалы односвязной области, зависящие от функции расстояния до границы области. Доказано изопериметрическое неравенство, обобщающее теоремы, получаемые методом симметризации Шварца. Рассмотрено обобщение результата: для L^p-норм функции расстояния доказан аналог неравенства Л.Е. Пейна для жесткости кручения области, при этом в сравнении с неравенством Пейна найдены новые экстремальные области, отличные от круга.

Ключевые слова: функция расстояния до границы области, неравенство Боннезена, изопериметрические неравенства, евклидовы моменты области относительно границы, жесткость кручения, изопериметрическая монотонность.

УДК: 517.5 : 517.956

1. Введение

Пусть G — односвязная область на плоскости, $\rho(x, G)$ — расстояние от точки x до границы ∂G области G. Рассмотрим геометрический функционал

$$\mathbf{I}_p(G) = \int_G \rho(x, G)^p \mathrm{dA},$$

называемый евклидовым моментом области относительно границы порядка p.

Евклидовы моменты различных порядков появляются в ряде проблем математической физики. Так в [1] показано, что евклидовый момент области появляется в задаче о максимальной высоте груды песка, занимающей фиксированную площадь.

Другим ярким примером приложения евклидовых моментов области является решение задачи, восходящей к работам В. Сен-Венана, о двусторонней оценке жесткости кручения односвязной области через один и тот же геометрический функционал области или некоторую их комбинацию. В 1995 г. Ф.Г. Авхадиев [2] показал, что евклидовый момент инерции ($p = 2$) области и жесткости кручения области являются сравнимыми величинами в классе односвязных областей, а именно, сравнимыми в смысле Г. Полиа и Г. Сегё [3]. Более того, были получены двусторонние оценки

$$\mathbf{I}_2(G) \le \mathbf{P}(G) \le 64\mathbf{I}_2(G) \tag{1}$$

Поступила 05.05.2012

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты № 12-01-97013-р_поволжье_а и № 11-01-00762-а.

для жесткости кручения

$$\mathbf{P}(G) := 2 \iint\limits_{G} v(x,G)\,\mathrm{dA},$$

где $v = v(x,G)$ — решение уравнения Пуассона $\triangle v = -2$ с граничным условием $v = 0$. В нашей работе [4] было доказано, что левое неравенство в (1) может быть улучшено, а именно показано, что

$$c := \inf_{G} \frac{\mathbf{P}(G)}{\mathbf{I}_2(G)} \geq \frac{3}{2},$$

причем эта последняя оценка тоже не является точной. Существует гипотеза, согласно которой $c = 3$ и круг является единственной экстремальной областью. Некоторые обобщения неравенств (1) на многомерный случай получены в работах [5] и [6]. Отметим, что евклидовы моменты появляются также в вариационных задачах математической физики [7].

Функционал $\mathbf{I}_p(G)$ можно рассматривать как естественное обобщение площади области. В [2] было доказано, что классы областей с ограниченным евклидовым моментом инерции ($p = 2$) и с ограниченной жесткостью кручения совпадают. В свою очередь, каждому значению параметра p соответствует некоторый класс областей с $\mathbf{I}_p(G) < \infty$.

Помимо неравенств (1) далее было установлено, что евклидовы моменты области и жесткость кручения обладают схожими изопериметрическими свойствами. Одним из наиболее важных неравенств для жесткости кручения (например, [8]) является неравенство Сен-Венана–Полиа

$$\mathbf{P}(G) \leq \frac{\mathbf{A}(G)^2}{2\pi}, \tag{2}$$

где $\mathbf{A}(G)$ — площадь области G. Аналоги неравенства Сен-Венана–Полиа были доказаны в работе [9] и для евклидовых моментов — в [10].

Л.Е. Пейн [11] показал, что в действительности последнее неравенство является следствием более сильного изопериметрического неравенства. А именно, справедливо неравенство

$$\mathbf{A}(G)^2 - 2\pi\,\mathbf{P}(G) \geq \left(\mathbf{A}(G) - 2\pi\,\mathbf{v}(G)\right)^2, \tag{3}$$

где $\mathbf{v}(G) = \sup\limits_{(x,y)\in G} v(x,y)$. В обоих неравенствах равенство достигается тогда и только тогда, когда G — круг.

Таким образом, логичным является предположение о существовании аналога неравенства Пейна для евклидовых моментов области. В данной статье будет доказано, что такое неравенство имеет место. Неожиданным является тот факт, что в неравенстве появляются новые экстремальные области, отличные от круга.

Далее статья организована следующим образом. Во втором разделе описываются основные результаты. В разделе 3 приведены доказательства основных утверждений. В заключительном разделе излагаются некоторые следствия из основных утверждений и замечания к ним.

2. Основные результаты и следствия

Пусть G — односвязная область со спрямляемой границей и $\mathbf{L}(G)$ — длина ее границы. Положим $\boldsymbol{\rho}(G) := \sup\limits_{x\in G} \rho(x,G)$. Для произвольной односвязной области со спрямляемой границей на плоскости Т. Боннезеном было доказано неравенство (например, [12])

$$\mathbf{L}(G)^2 - 4\pi\mathbf{A}(G) \geq \left(\mathbf{L}(G) - 2\pi\boldsymbol{\rho}(G)\right)^2, \tag{4}$$

уточняющее классическое изопериметрическое неравенство. Хорошо известно, что, в отличии от классического изопериметрического неравенства, не только круг является экстремальной областью в последнем неравенстве. Будем называть любую экстремальную область в неравенстве (4) областью типа Боннезена.

Области типа Боннезена образуют двупараметрическое семейство выпуклых областей. Обозначим через $B(r,d)$ $(r>0,\ d\geq 0)$ область типа Боннезена, состоящую из двух полукругов радиуса r и прямоугольника со сторонами d и $2r$ (см. рис. 1).

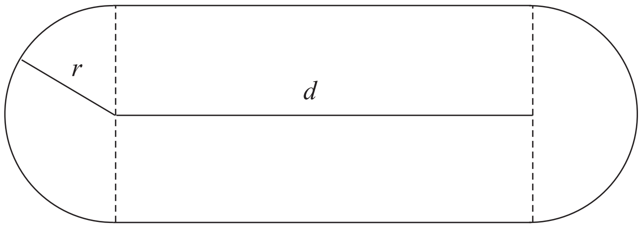

Рис. 1. Пример области типа Боннезена

Поставим область $B(\boldsymbol{\rho}(G),d)$ в соответствие односвязной области G, причем параметр d определим из равенства
$$\mathbf{A}(B(\boldsymbol{\rho}(G),d))=\mathbf{A}(G).$$
Так как $\mathbf{A}(B(\boldsymbol{\rho}(G),d))=\pi\boldsymbol{\rho}(G)^2+2d\boldsymbol{\rho}(G)$, то
$$d=\frac{\mathbf{A}(G)-\pi\boldsymbol{\rho}(G)^2}{2\boldsymbol{\rho}(G)}.$$

Таким образом, ставим области G в соответствие область, которая имеет ту же самую площадь и максимальный круг, содержащийся в области, а также является экстремальной областью в неравенстве Боннезена. В дальнейшем область типа Боннезена, соответствующую G, будем кратко обозначать через B, опуская параметры, если это не вызовет недоразумений.

Теорема 1. *Пусть G — односвязная область конечной площади. Пусть $Q(t)$ — непостоянная, абсолютно непрерывная функция на $(0,\boldsymbol{\rho}(G))$, и $dQ(t)\geq 0$. Тогда справедливы неравенства*
$$\int_G Q(\rho(x,G))\,\mathrm{dA}\leq\int_B Q(\rho(x,B))\,\mathrm{dA}\leq\int_{[G]_S} Q(\rho(x,[G]_S))\,\mathrm{dA},$$
где B — область типа Боннезена, соответствующая G, а $[G]_S$ — результат симметризации Щварца области G.

Равенство в левом неравенстве достигается тогда и только тогда, когда G совпадает с B, а в правом неравенстве — тогда и только тогда, когда B — круг.

В частности, полагая $Q(t)=t^2$, получим неравенство
$$\mathbf{I}_2(G)\leq\mathbf{I}([G]_S)=\frac{\mathbf{A}(G)^2}{2\pi}.$$
Таким образом, теорема 1 является геометрическим аналогом неравенства (2). Правое неравенство
$$\int_G Q(\rho(x,G))\,\mathrm{dA}\leq\int_{[G]_S} Q(\rho(x,[G]_S))\,\mathrm{dA}$$

является следствием неубывания функции расстояния до границы области при симметризации Шварца ([8], с. 51). Левое неравенство теоремы 1 находит применение при доказательстве последующих результатов.

Применим новое понятие в теории изопериметрических неравенств математической физики — изопериметрическую монотонность функционала по параметру. Впервые это понятие появилось в работах Дж. Херша [13] в связи с известной гипотезой Полиа–Сеге о изопериметрическом неравенстве между жесткостью кручения и основной частотой колебания. Позднее гипотеза о монотонности была доказана М.-Т. Кехлер-Джобин [14]: это неравенство Полиа–Сеге–Кехлер-Джобин.

Поясним более подробно идею Дж. Херша на основе результата, доказанного в работе [10] для евклидовых моментов области. Ниже ограничимся только плоским случаем.

Рассмотрим геометрический функционал области

$$\left(\frac{\alpha(\alpha-1)}{2\pi}\int_G \rho(x,G)^{\alpha-2}\,\mathrm{dA}\right)^{1/\alpha} = \mathbf{f}(\alpha)$$

как функцию параметра α. В [10] показано, что если область G не совпадает с кругом, то функция $\mathbf{f}(\alpha)$ является строго убывающей. В случае, когда область совпадает с кругом, значение функции равно радиусу круга и не зависит от параметра α. Это означает, что для фиксированных значений α_1 и α_2 с условием $\alpha_1 < \alpha_2$ имеет место изопериметрическое неравенство $\mathbf{f}(\alpha_1) \geq \mathbf{f}(\alpha_2)$, причем равенство $\mathbf{f}(\alpha_1) = \mathbf{f}(\alpha_2)$ возможно лишь для областей, для которых $\mathbf{f}(\alpha) \equiv \mathrm{const}$.

Рассмотрим новый геометрический функционал

$$\mathbf{F}(p) := \frac{p+1}{\boldsymbol{\rho}(G)^{p+1}}\left(\mathbf{I}_p(G) - \frac{2\pi\boldsymbol{\rho}(G)^{p+2}}{(p+1)(p+2)}\right),$$

где $p > -1$. Иногда будем подчеркивать зависимость функционала от области, обозначая его через $\mathbf{F}(p,G)$.

Центральной в данной работе является

Теорема 2. *Пусть G — односвязная область и $\mathbf{I}_{p_0}(G) < +\infty$ для некоторого $p_0 \in [-1,\infty)$. Тогда*

1) *если G не совпадает с экстремалью в неравенстве Боннезена, то $\mathbf{F}(p)$ — строго убывающая функция для $p \geq p_0$,*

2) *если G совпадает с одной из экстремалей в неравенстве Боннезена, то $\mathbf{F}(p) \equiv \mathrm{const}$, для $p \in [-1,+\infty)$.*

Следствие. В условиях теоремы 2 имеем

1) если область G не совпадает с кругом, то $\mathbf{f}(\alpha)$ строго убывающая функция при $\alpha > p_0$,

2) если область G совпадает с кругом, то $\mathbf{f}(\alpha) \equiv r$ при $\alpha > 1$, где r — радиус круга G.

3. Доказательства основных утверждений

Ниже будем использовать стандартные обозначения для оценок на линиях и множествах уровня функции $\rho(x,G)$ [8]:

$$G(\mu) := \{x \in G \mid \rho(x,G) > \mu\}, \quad \mathbf{a}(\mu) \equiv \mathbf{A}(G(\mu)) := \int_{G(\mu)} \mathrm{dA},$$

$$\mathbf{l}(\mu) := \mathbf{L}(G(\mu)) \ \ (0 \leq \mu < \boldsymbol{\rho}(G)), \quad \mathbf{l}(\boldsymbol{\rho}(G)) := \lim_{\mu\to\boldsymbol{\rho}(G)} \mathbf{l}(\mu).$$

Например, для области $B(r,d)$ получим $\mathbf{l}(\boldsymbol{\rho}(B)) = 2d$.

Ключевой при доказательстве основных утверждений является

Лемма 1. *Пусть G — односвязная область конечной площади. Тогда справедливы следующие неравенства*:

$$\mathbf{l}(\boldsymbol{\rho}(G)) + \pi(\boldsymbol{\rho}(G) - \mu) \le \frac{\mathbf{a}(\mu)}{\boldsymbol{\rho}(G) - \mu} \le \frac{\mathbf{A}(G)}{\boldsymbol{\rho}(G)} - \pi\mu, \tag{5}$$

где $0 \le \mu \le \boldsymbol{\rho}(G)$. Случаи равенства возможны только для областей, являющихся экстремалями в неравенстве Боннезена.

Доказательство. Покажем вначале, что если две области не пересекаются и для каждой из них справедливо неравенство Боннезена, то и для объединения областей оно также справедливо.

Действительно, пусть G_1 и G_2 — две области, для которых справедливо неравенство Боннезена (4), т. е.

$$\mathbf{L}(G_i) \ge \frac{\mathbf{A}(G_i)}{\boldsymbol{\rho}(G_i)} + \pi\boldsymbol{\rho}(G_i), \quad i = 1, 2.$$

Предположим дополнительно, что $\mathbf{L}(G_1 \cap G_2) = 0$ и $\boldsymbol{\rho}(G_1) > \boldsymbol{\rho}(G_2)$. Тогда получим

$$\mathbf{L}(G_1 \cup G_2) = \mathbf{L}(G_1) + \mathbf{L}(G_2) \ge \frac{\mathbf{A}(G_1) + \mathbf{A}(G_2)}{\boldsymbol{\rho}(G_1)} + \mathbf{A}(G_2)\left(\frac{1}{\boldsymbol{\rho}(G_2)} - \frac{1}{\boldsymbol{\rho}(G_1)}\right) +$$
$$+ \pi(\boldsymbol{\rho}(G_1) + \boldsymbol{\rho}(G_2)) > \frac{\mathbf{A}(G_1) + \mathbf{A}(G_2)}{\boldsymbol{\rho}(G_1)} + \pi\boldsymbol{\rho}(G_1) = \frac{\mathbf{A}(G_1 \cup G_2)}{\boldsymbol{\rho}(G_1 \cup G_2)} + \pi\boldsymbol{\rho}(G_1 \cup G_2).$$

Множества $G(\mu)$ состоят из объединения односвязных областей, исключая случай $\mu = \boldsymbol{\rho}(G)$. В этом легко убедиться, предположив противное.

Таким образом, к $G(\mu)$ можно применить неравенство Боннезена. Запишем его в более удобной форме

$$\mathbf{a}(\mu) + \pi\boldsymbol{\rho}(G(\mu))^2 \le \mathbf{l}(\mu)\boldsymbol{\rho}(G(\mu)).$$

Далее, известно (например, [8]), что для почти всех μ справедливы равенства

$$-\frac{\mathrm{d}\mathbf{a}(\mu)}{\mathrm{d}\mu} = \mathbf{l}(\mu), \quad \boldsymbol{\rho}(G(\mu)) = \boldsymbol{\rho}(G) - \mu.$$

Тогда неравенство Боннезена для множества $G(\mu)$ примет вид

$$\mathbf{a}'(\mu)(\boldsymbol{\rho}(G) - \mu) + \mathbf{a}(\mu) \le -\pi(\boldsymbol{\rho}(G) - \mu)^2.$$

Последнее неравенство эквивалентно

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\left[\frac{\mathbf{a}(\mu)}{\boldsymbol{\rho}(G) - \mu}\right] \le -\pi. \tag{6}$$

Функция $\mathbf{a}(\mu)$ — липшицева функция в интервале $[0, \boldsymbol{\rho}(G))$ ([8], с. 7). Следовательно, функция $\mathbf{a}(\mu)(\boldsymbol{\rho}(G)-\mu)^{-1}$ равна определенному интегралу с переменным верхним пределом от своей производной. Учитывая неравенство (6), отсюда вытекает, что $\mathbf{a}(\mu)(\boldsymbol{\rho}(G)-\mu)^{-1}$ является убывающей и неотрицательной функцией. Таким образом, существует предел функции $\mathbf{a}(\mu)(\boldsymbol{\rho}(G) - \mu)^{-1}$ при $\mu \to \boldsymbol{\rho}(G)$. Из равенства $\mathbf{a}(\boldsymbol{\rho}(G)) = 0$ и определения $\mathbf{l}(\boldsymbol{\rho}(G))$ вычислим

$$\lim_{\mu \to \boldsymbol{\rho}(G)} \frac{\mathbf{a}(\mu)}{\boldsymbol{\rho}(G) - \mu} = \mathbf{l}(\boldsymbol{\rho}(G)).$$

Проинтегрируем обе части (6) по $\mu \in [0, \mu_1]$ и $\mu \in [\mu_2, \boldsymbol{\rho}(G)]$, получим требуемые неравенства (5).

Случай равенства является следствием того факта, что все линии уровня B также ограничивают области типа Боннезена. $\square$

Доказательство теоремы 1. В области B можно также определить множества уровня и соответствующие функционалы области. Чтобы различать линии уровня областей, для функционалов области B сохраним введенные обозначения, снабдив их символом звездочка, так, например, $B(\mu^*) = \{x \in B \mid \rho(x, B) > \mu^*\}$ и $\mathbf{a}^*(\mu^*) = \mathbf{A}(B(\mu^*))$. В дальнейшем символ звездочка будет также означать, что функционал или параметр связан с некоторой областью типа Боннезена.

Хорошо известно (например, [8]), что $\rho(x, G)$ — липшицева функция. Следовательно, $\mathbf{a}(\mu)$ — непрерывная монотонно убывающая функция. Таким образом, корректно определена функция $\mu(\mathbf{a})$, обратная к $\mathbf{a}(\mu)$. Введем обозначение $G(\mathbf{a}) := G(\mu(\mathbf{a}))$.

Определим соответствие между областями $G(\mathbf{a})$ и $B(\mathbf{a}^*)$: $G(\mathbf{a})$ соответствует $B(\mathbf{a}^*)$ тогда и только тогда, когда $\mu(\mathbf{a}) = \mu^*(\mathbf{a}^*)$. В частности, при $\mathbf{a} = \mathbf{A}(G)$ получим $\mathbf{a}(0) = \mathbf{A}(G) = \mathbf{A}(B) = \mathbf{a}^*(0)$, т. е. значение $\mu = \mu^* = 0$ определяет, что область G соответствует области B.

Из леммы 1 и определения области B следует, что при заданном соответствии справедлива оценка

$$\mathbf{a}(\mu) \le \left(\frac{\mathbf{A}(G)}{\boldsymbol{\rho}(G)} - \pi\mu\right)(\boldsymbol{\rho}(G) - \mu) = \left(\frac{\mathbf{A}(B)}{\boldsymbol{\rho}(B)} - \pi\mu^*\right)(\boldsymbol{\rho}(B) - \mu^*) = \mathbf{a}^*(\mu^*), \tag{7}$$

где $0 \le \mu < \boldsymbol{\rho}(G)$. В силу неравенства Шмидта [8], примененного к области B, также имеем

$$\mathbf{a}^*(\mu^*) \le \mathbf{a}^{**}(\mu^*),$$

здесь $\mathbf{a}^{**}(\mu) := \mathbf{A}([G]_S(\mu))$ — площадь соответствующего множества уровня круга $[G]_S$.

Далее в условиях теоремы 1 воспользуемся определением интеграла по Лебегу и применим интегрирование по частям. Получим

$$\int_G Q(\rho(x, G))\,\mathrm{dA} = \int_0^{\mathbf{A}(G)} Q(\mu(\mathbf{a}))\,\mathrm{d}\mathbf{a} = \mathbf{A}(G)Q(0) - \\ - \int_0^{\mathbf{A}(G)} \mathbf{a}\,\mathrm{d}Q(\mu(\mathbf{a})) = \mathbf{A}(G)Q(0) + \int\limits_0^{\boldsymbol{\rho}(G)} \mathbf{a}(\mu)\,\mathrm{d}Q(\mu). \tag{8}$$

Из (7), (8) вытекают неравенства теоремы 1. Осталось заметить, что случаи равенства в левом неравенстве теоремы 1 совпадают со случаями равенства в лемме 1. В правом неравенстве теоремы 1 случаи равенства совпадают со случаями равенства в неравенстве Шмидта, т. е. в случае, когда область B совпадает с кругом. $\square$

При доказательстве теоремы 2 главную роль играет функционал

$$\mathbf{i}_p(\mu) := p\int_\mu^{\boldsymbol{\rho}(G)} t^{p-1}\mathbf{a}(t)\,\mathrm{d}t$$

при $p \ge p_0$ (> 0). В частности, ввиду представления (8) имеем $\mathbf{i}_p(0) = \mathbf{I}_p(G)$.

Лемма 2. *Пусть G — односвязная область и $\mathbf{I}_p(G) < \infty$ $(p \ge p_0)$. Тогда для $0 \le \mu \le \boldsymbol{\rho}(G)$ справедливо неравенство*

$$\mathbf{i}_p(\mu) \le \left[\frac{\mathbf{I}_p(G)}{\boldsymbol{\rho}(G)^{p+1}} \frac{\boldsymbol{\rho}(G)^{p+1} - (p+1)\boldsymbol{\rho}(G)\mu^p + p\mu^{p+1}}{(\boldsymbol{\rho}(G) - \mu)^2} - \frac{\pi p \mu^p}{p+2}\right](\boldsymbol{\rho}(G) - \mu)^2. \tag{9}$$

Неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда G является областью типа Боннезена.

Доказательство. Прежде всего заметим, что неравенство (9) при $\mu = 0$ и $\mu = \boldsymbol{\rho}(G)$ обращается в равенство. Поэтому далее будем считать $0 < \mu < \boldsymbol{\rho}(G)$.

В работе [10] показано, что из условия $\mathbf{I}_p(G) < \infty$ следует, что множества уровня области G имеют конечную площадь, т. е. $\mathbf{a}(\mu) < \infty$ $(\mu > 0)$, хотя площадь самой области может быть бесконечной.

В области $G(\mu)$ рассмотрим множества уровня функции $\rho(x, G(\mu))$. Очевидно,

$$\rho(x, G(\mu)) = \rho(x, G) - \mu \quad (x \in G(\mu)), \quad \mathbf{b}(s) = \mathbf{a}(s + \mu) \quad (0 \le s \le \boldsymbol{\rho}(G(\mu))),$$

где $\mathbf{b}(s)$ — площадь множества уровня функции $\rho(x, G(\mu))$. Тогда, применяя представление (8), нетрудно получить

$$\int_{G(\mu)} (\rho(x, G(\mu)) + \mu)^p \, \mathrm{dA} = \mathbf{a}(\mu)\mu^p + \int_0^{\boldsymbol{\rho}(G(\mu))} \mathbf{b}(s) \, \mathrm{d}(s + \mu)^p = \mathbf{a}(\mu)\mu^p + \int_\mu^{\boldsymbol{\rho}(G)} \mathbf{a}(t) \, \mathrm{d}t^p.$$

Таким образом,

$$\mathbf{i}_p(\mu) = \int_{G(\mu)} (\rho(x, G(\mu)) + \mu)^p \, \mathrm{dA} - \mathbf{a}(\mu)\mu^p. \tag{10}$$

Пусть $B(\mu)$ — область типа Боннезена, соответствующая $G(\mu)$. В частности, имеет место равенство

$$\mathbf{a}(\mu) = \mathbf{A}(B(\mu)). \tag{11}$$

Применим теорему 1 к области $G(\mu)$, полагая $Q(t) = (t + \mu)^p$. Получим

$$\int_{G(\mu)} (\rho(x, G(\mu)) + \mu)^p \, \mathrm{dA} \le \int_{B(\mu)} (\rho(x, B(\mu)) + \mu)^p \, \mathrm{dA}.$$

Из равенств (10), (11) и последнего неравенства следует

$$\mathbf{i}_p(\mu) \le \int\limits_0^{\boldsymbol{\rho}(G(\mu))} \mathbf{b}^*(s) \, \mathrm{d}(s + \mu)^p = \int\limits_\mu^{\boldsymbol{\rho}(G)} \mathbf{b}^*(t - \mu) \, \mathrm{d}t^p.$$

Введем обозначение

$$\mathbf{i}_p^{\#}(\mu) := \int_\mu^{\boldsymbol{\rho}(G)} \mathbf{b}^*(t - \mu) \, \mathrm{d}t^p.$$

Функция $b^*(t - \mu)$ не совпадает с $\mathbf{a}^*(t)$, так как согласно определению $B(\mu)$ и неравенству (7) справедливо неравенство

$$\mathbf{A}(B(\mu)) \le \mathbf{a}^*(\mu).$$

Таким образом,

$$\mathbf{i}_p(\mu) \le \mathbf{i}_p^{\#}(\mu), \tag{12}$$

где $0 < \mu < \boldsymbol{\rho}(G)$.

Далее вычислим правую часть неравенства (12). Учтем, что линии уровня функции $\rho(x, \widehat{B})$ области типа Боннезена $\widehat{B}$ также ограничивают область типа Боннезена. Из леммы 1 следует формула для вычисления площади множества уровня для области типа Боннезена

$$\mathbf{a}^*(t) = \left(\frac{\mathbf{A}(\widehat{B})}{\boldsymbol{\rho}(\widehat{B})} - \pi t \right) (\boldsymbol{\rho}(\widehat{B}) - t), \tag{13}$$

где $0 \le t \le \boldsymbol{\rho}(\widehat{B})$.

Удобно применить последнюю формулу не для области $B(\mu)$, а для другой области. Для этого определим область $\widehat{B}$ так, чтобы граница области $B(\mu)$ являлась линией уровня, расположенной на расстоянии μ от границы $\widehat{B}$. Тогда $\boldsymbol{\rho}(\widehat{B}) = \boldsymbol{\rho}(G)$. Из определения $\widehat{B}$ следует, что область зависит от переменной μ, более того, площадь $\widehat{B}$ не совпадает с площадью области G.

Непосредственные вычисления и простые алгебраические преобразования с применением формулы (13) при $t = \mu$ показывают

$$\mathbf{i}_p^{\#}(\mu) = p\int_{\mu}^{\boldsymbol{\rho}(G)} t^{p-1}\left(\frac{\mathbf{A}(\widehat{B})}{\boldsymbol{\rho}(\widehat{B})} - \pi t\right)(\boldsymbol{\rho}(\widehat{B}) - t)\,\mathrm{d}t = \frac{\mathbf{A}(B(\mu))y'(\mu)(\boldsymbol{\rho}(G)-\mu) + \pi y(\mu)}{(p+1)(p+2)},$$

где $y(\mu) = (p+2)\boldsymbol{\rho}(G)\mu(\boldsymbol{\rho}(G)^p - \mu^p) - p(\boldsymbol{\rho}(G)^{p+2} - \mu^{p+2})$.

Ниже будут использоваться в вычислениях первая и вторая производные функции $y(\mu)$

$$y'(\mu) = (p+2)\left(\boldsymbol{\rho}(G)^{p+1} - (p+1)\boldsymbol{\rho}(G)\mu^p + p\mu^{p+1}\right),$$
$$y''(\mu) = -(p+2)(p+1)p\mu^{p-1}(\boldsymbol{\rho}(G) - \mu).$$

Теперь покажем, что функционал $\mathbf{i}_p^{\#}(\mu)$ полностью определяется через функционалы $\mathbf{I}_p(G)$ и $\boldsymbol{\rho}(G)$.

Из определения функционала $\mathbf{i}_p(\mu)$ и области $B(\mu)$ следуют равенства

$$[\mathbf{i}_p(\mu)]' = -p\mu^{p-1}\mathbf{a}(\mu) = -p\mu^{p-1}\mathbf{A}(B(\mu)). \tag{14}$$

Далее, подставив в неравенство (12) выражение $\mathbf{i}_p^{\#}(\mu)$ и воспользовавшись последними равенствами, получим дифференциальное неравенство

$$-[\mathbf{i}_p(\mu)]' + \left[\mathbf{i}_p(\mu) - \frac{\pi y(\mu)}{(p+1)(p+2)}\right]\frac{y''(\mu)}{y'(\mu)} \geq 0. \tag{15}$$

Из выражения второй производной функции $y(\mu)$ следует, что $y''(\mu)$ не положительна на $[0, \boldsymbol{\rho}(G)]$. Заметим также, что значение $\mu = \boldsymbol{\rho}(G)$ обращает функцию $y'(\mu)$ в нуль. Следовательно, $y'(\mu) > 0$ на $[0, \boldsymbol{\rho}(G))$.

Домножая (15) на $[y'(\mu)]^{-1}$, приведем неравенство к виду

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\left[\frac{\mathbf{i}_p(\mu)}{y'(\mu)}\right] \leq -\frac{\pi y(\mu)y''(\mu)}{(p+1)(p+2)\left(y'(\mu)\right)^2}. \tag{16}$$

Проинтегрировав неравенство по отрезку $[0, \mu]$, получим

$$\frac{\mathbf{i}_p(\mu)}{y'(\mu)} - \frac{\mathbf{I}_p(G)}{(p+2)\boldsymbol{\rho}(G)^{p+1}} \leq -\frac{\pi}{(p+1)(p+2)}\int_0^{\mu}\frac{y(\mu)y''(\mu)}{\left(y'(\mu)\right)^2}\,\mathrm{d}\mu =$$
$$= \frac{\pi}{(p+1)(p+2)}\int_0^{\mu} y(\mu)\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{y'(\mu)}\right) = \frac{\pi}{(p+1)(p+2)}\times$$
$$\times\left(\frac{y(\mu)}{y'(\mu)}\bigg|_0^{\mu} - \int_0^{\mu}\frac{\mathrm{d}(y(\mu))}{y'(\mu)}\right) = \frac{\pi}{(p+1)(p+2)}\left(\frac{y(\mu)}{y'(\mu)} + \frac{p\boldsymbol{\rho}(G)}{p+2} - \mu\right).$$

Воспользовавшись определением функции $y(\mu)$, упростим выражение в последних скобках, получим

$$\mathbf{i}_p(\mu) \leq \frac{\mathbf{I}_p(G)y'(\mu)}{(p+2)\boldsymbol{\rho}(G)^{p+1}} - \frac{\pi p\mu^p(\boldsymbol{\rho}(G) - \mu)^2}{(p+2)}.$$

С учетом выражения для $y'(\mu)$ последнее неравенство совпадает с (9) и (12) в силу аналитического выражения функционала $\mathbf{i}_p^{\#}(\mu)$.

Наконец, если проинтегрировать неравенство (16) по $\mu \in [\mu_1, \boldsymbol{\rho}(G)]$, то получим точную нижнюю оценку для $\mathbf{i}_p(\mu_1)$, выраженную через $\mathbf{l}(\boldsymbol{\rho}(G))$ и $\boldsymbol{\rho}(G)$. $\square$

Доказательство теоремы 2. Разобьем доказательство на два случая: 1) $p_0 > 0$; 2) $p_0 \le 0$.

1) Рассмотрим $q > p$ $(\ge p_0)$. Используя представление (8) и формулу (14), получим

$$\mathbf{I}_q(G) = \int_0^{\mathbf{A}(G)} \mu(\mathbf{a})^q \,\mathrm{dA} = q\int_0^{\boldsymbol{\rho}(G)} \mu^{q-1}\mathbf{a}(\mu)\mathrm{d}\mu = -\frac{q}{p}\int_0^{\boldsymbol{\rho}(G)} \mu^{q-p}\,\mathrm{d}\mathbf{i}_p(\mu). \tag{17}$$

По новому, отличному от случая, рассмотренного в теореме 1, определим область типа Боннезена, соответствующую G. Обозначим эту область через $B_0 = B_0(\boldsymbol{\rho}(G), d)$, причем второй параметр d однозначно определим из равенства $\mathbf{I}_p(B_0(\boldsymbol{\rho}(G), d)) = \mathbf{I}_p(G)$, так как $\mathbf{I}_p(G) > \mathbf{I}_p(B_0(\boldsymbol{\rho}(G), 0))$ (предполагается, что область G не является кругом) и функционал $\mathbf{I}_p(B_0(\boldsymbol{\rho}(G), d))$ является строго возрастающим как функция параметра d. Чтобы различать функционалы областей G и B_0, сохранив обозначения, снабдим их символом “$\natural$”.

Следствием определения области B_0 и леммы 2 является тот факт, что правая часть неравенства (9) — аналитическое выражение функционала $\mathbf{i}_p^\natural(\mu)$, а следовательно, имеет место неравенство

$$\mathbf{i}_p(\mu) \le \mathbf{i}_p^\natural(\mu), \tag{18}$$

где $0 \le \mu \le \boldsymbol{\rho}(G)$.

Функционал $\mathbf{F}(p)$ для области типа Боннезена является тождественной константой, которая совпадает со вторым параметром области. Этот факт можно легко установить, если подставить формулу (13) в (8) при $Q(t) = t^p$.

Таким образом,

$$\mathbf{F}(p) = \mathbf{F}(p, G) = \mathbf{F}(p, B_0) = \mathbf{F}^\natural(p),$$

здесь использовано определение и свойства области B_0.

Установим соответствие между областями $G(\mu)$ и $B_0(\mu^\natural)$. Пусть μ соответствует $\mu^\natural$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{i}_p(\mu) = \mathbf{i}_p^\natural(\mu^\natural)$. Тогда из (18) следует $\mu(\mathbf{i}_p) \le \mu^\natural(\mathbf{i}_p^\natural)$ при $\mathbf{i}_p = \mathbf{i}_p^\natural$.

Учитывая (17), неравенство $\mathrm{d}\mathbf{i}_p(\mu) \le 0$, определение B_0 и последнее неравенство, получим

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(q) = \frac{q+1}{\boldsymbol{\rho}(G)^{q+1}}\left(-\frac{q}{p}\int_0^{\boldsymbol{\rho}(G)} \mu^{q-p}\,\mathrm{d}\mathbf{i}_p(\mu) - \frac{2\pi\boldsymbol{\rho}(G)^{p+2}}{(p+1)(p+2)}\right) \le \\ \le \frac{q+1}{\boldsymbol{\rho}(B_0)^{q+1}}\left(-\frac{q}{p}\int_0^{\boldsymbol{\rho}(B_0)} (\mu^\natural)^{q-p}\,\mathrm{d}\mathbf{i}_p^\natural(\mu) - \frac{2\pi\boldsymbol{\rho}(B_0)^{p+2}}{(p+1)(p+2)}\right) = \mathbf{F}^\natural(q) = \mathbf{F}^\natural(p) = \mathbf{F}(p).\end{aligned}$$

Случаи равенства совпадают со случаями равенства в лемме 2. Это завершает доказательство случая 1).

2) Из условия $\mathbf{I}_{p_0}(G) < \infty$ следует ограниченность площади области G и ограниченность евклидовых моментов более высокого порядка. Действительно,

$$\mathbf{I}_{p_0}(G) = \int_G \frac{\mathrm{d}x}{\rho(x, G)^{-p_0}} \ge \mathbf{A}(G)\boldsymbol{\rho}(G)^{p_0}.$$

Поэтому достаточно установить утверждение теоремы для отрицательных значений параметра p_0.

При доказательстве более удобно использовать линии уровня функции $\rho(x,G)^{-1}$. Введем обозначения

$$G(\eta) := \left\{x \in G \mid \rho(x,G)^{-1} > \eta\right\}, \qquad \mathbf{a}(\eta) \equiv \mathbf{A}(G(\eta)) := \int_{G(\eta)} \mathrm{dA}, \tag{19}$$

где $\boldsymbol{\rho}(G)^{-1} < \eta < \infty$. Таким образом, будем связывать с буквой η соответствующие функционалы для линий уровня функции $\rho(x,G)^{-1}$. Из определения для $\mathbf{a}(\eta)$ и $\mathbf{a}(\mu)$ имеем

$$\mathbf{a}(\eta) + \mathbf{a}(\mu) = \mathbf{A}(G), \tag{20}$$

где $\mu = \eta^{-1}$.

Пусть $0 > p \geq p_0$. Применяя определение интеграла по Лебегу и интегрирование по частям, получим

$$\mathbf{I}_p(G) = \int_G \left(\rho(x,G)^{-1}\right)^{-p} \mathrm{dA} = \int_0^{\mathbf{A}(G)} \eta(\mathbf{a})^{-p}\,\mathrm{d}\mathbf{a} = \mathbf{A}(G)\left(\boldsymbol{\rho}(G)^{-1}\right)^{-p} - \\ - p\int_0^{\mathbf{A}(G)} \eta(\mathbf{a})^{-p-1}\mathbf{a}\,\mathrm{d}\eta(\mathbf{a}) = -p\,\mathbf{A}(G)\int_0^{\boldsymbol{\rho}(G)^{-1}} \eta^{-p-1}\,\mathrm{d}\eta - \\ - p\int_{\boldsymbol{\rho}(G)^{-1}}^{\infty} \eta^{-p-1}\mathbf{a}(\eta)\,\mathrm{d}\eta = -p\int_0^{\infty}\eta^{-p-1}\widehat{\mathbf{a}}(\eta)\,\mathrm{d}\eta, \tag{21}$$

где

$$\widehat{\mathbf{a}}(\eta) := \begin{cases} \mathbf{A}(G), & 0 \leq \eta \leq \boldsymbol{\rho}(G)^{-1}; \\ \mathbf{a}(\eta), & \boldsymbol{\rho}(G)^{-1} < \eta < \infty. \end{cases}$$

Поставим в соответствие области G область B из теоремы 1.

Рассмотрим вспомогательный функционал

$$\mathbf{i}_p(\eta) = -p\int_\eta^\infty \eta^{-p-1}\widehat{\mathbf{a}}(\eta)\,\mathrm{d}\eta. \tag{22}$$

Из леммы 1 с учетом равенства (20) следует $\mathbf{a}(\eta) \geq \mathbf{a}^*(\eta)$. Таким образом,

$$\mathbf{i}_p(\eta) \geq \mathbf{i}_p^*(\eta). \tag{23}$$

Покажем теперь, что $\mathbf{i}_p^*(\eta)$ может быть представлена как функция от $\mathbf{I}_p(B)$, $\boldsymbol{\rho}(B)$ и η. Из определения (19), равенства (20) и леммы 1 находим выражение

$$\mathbf{a}^*(\eta) = \left(\frac{\mathbf{A}(B)}{\boldsymbol{\rho}(B)} + \pi\boldsymbol{\rho}(B)\right)\eta^{-1} - \pi\eta^{-2}.$$

Вначале предположим, что $\eta > \boldsymbol{\rho}(B)^{-1}$. Функционал $\mathbf{F}(p)$ является постоянным для области B, поэтому выражение в круглых скобках можно записать в виде

$$\frac{\mathbf{A}(B)}{\boldsymbol{\rho}(B)} + \pi\boldsymbol{\rho}(B) = (p+1)\left(\frac{\mathbf{I}_p(B)}{\boldsymbol{\rho}(B)^{p+1}} + \frac{2\pi\boldsymbol{\rho}(B)}{p+2}\right).$$

Подставляя найденные выражения в (22) и интегрируя, получим

$$\mathbf{i}_p^*(\eta) = -p\left(\frac{\mathbf{I}_p(B)}{\boldsymbol{\rho}(B)^{p+1}} + \frac{2\pi\boldsymbol{\rho}(B)}{p+2}\right)\eta^{-(p+1)} + \frac{\pi p}{p+2}\eta^{-(p+2)}.$$

Аналогичные выкладки можно провести и в случае $\eta \le \boldsymbol{\rho}(B)^{-1}$. Окончательно имеем

$$\mathbf{i}_p^*(\eta) = \begin{cases} \mathbf{I}_p(B) - \left(\dfrac{(p+1)\mathbf{I}_p(B)}{\boldsymbol{\rho}(B)^p} + \dfrac{p\pi\boldsymbol{\rho}(B)^2}{p+2}\right)\eta^{-p}, & 0 \le \eta \le \boldsymbol{\rho}(G)^{-1}; \\ -p\left(\dfrac{\mathbf{I}_p(B)}{\boldsymbol{\rho}(B)^{p+1}} + \dfrac{2\pi\boldsymbol{\rho}(B)}{p+2}\right)\eta^{-(p+1)} + \dfrac{\pi p}{p+2}\eta^{-(p+2)}, & \boldsymbol{\rho}(G)^{-1} < \eta < \infty. \end{cases} \tag{24}$$

Используя функционал $\mathbf{i}_p(\eta)$, получим новое представление евклидовых моментов области. Пусть $q > p$ и $q < 0$. Из (21) и (22) найдем

$$\mathbf{I}_q(G) = -q\int_0^\infty \eta^{-q-1}\widehat{\mathbf{a}}(\eta)\,\mathrm{d}\eta = -q\int_0^\infty \eta^{p-q}\eta^{-p-1}\widehat{\mathbf{a}}(\eta)\,\mathrm{d}\eta =$$
$$= \frac{q}{p}\int_0^\infty \eta^{p-q}\,\mathrm{d}\mathbf{i}_p(\eta) = \frac{q}{p}\int_0^{\mathbf{I}_p(G)} \eta(\mathbf{i}_p)^{p-q}\,\mathrm{d}\mathbf{i}_p. \tag{25}$$

По аналогии со случаем $p_0 \ge 0$ поставим в соответствие односвязной области G область $B_1(\boldsymbol{\rho}(G), d)$, причем параметр d определим из равенства $\mathbf{I}_p(B_1(\boldsymbol{\rho}(G), d)) = \mathbf{I}_p(G)$. Непосредственным следствием определения является равенство $\mathbf{F}^\ddagger(p) = \mathbf{F}(p)$, здесь и далее символом $\ddagger$ будем обозначать функционалы, относящиеся к области B_1.

Из (23) и (24) следует

$$\mathbf{i}_p(\eta) \ge \mathbf{i}_p^\ddagger(\eta), \tag{26}$$

$0 \le \eta \le \boldsymbol{\rho}(G)$. В частности, $\mathbf{i}_p(0) = \mathbf{I}_p(G) = \mathbf{I}_p(B_1) = \mathbf{i}_p^\ddagger(0)$.

Установим соответствие между областями $G(\eta)$ и $B_1(\eta^\ddagger)$. Пусть η соответствует $\eta^\ddagger$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{i}_p(\eta) = \mathbf{i}_p^\ddagger(\eta^\ddagger)$. При заданном соответствии $\eta \ge \eta^\ddagger$ из неравенства (26) имеем

$$\eta(\mathbf{i}_p)^{p-q} \le \eta^\ddagger(\mathbf{i}_p^\ddagger)^{p-q}.$$

Учитывая (25) и последнее неравенство, получим

$$\mathbf{F}(q) = \frac{q+1}{\boldsymbol{\rho}(G)^{q+1}}\left(\frac{q}{p}\int_0^{\mathbf{I}_p(G)} \eta(\mathbf{i}_p)^{p-q}\,\mathrm{d}\mathbf{i}_p - \frac{2\pi\boldsymbol{\rho}(G)^{p+2}}{(p+1)(p+2)}\right) \le$$
$$\le \frac{q+1}{\boldsymbol{\rho}(B_1)^{q+1}}\left(\frac{q}{p}\int_0^{\mathbf{I}_p(B_1)} \eta^\ddagger(\mathbf{i}_p^\ddagger)^{p-q}\,\mathrm{d}\mathbf{i}_p^\ddagger - \frac{2\pi\boldsymbol{\rho}(B_1)^{p+2}}{(p+1)(p+2)}\right) = \mathbf{F}^\ddagger(q) = \mathbf{F}^\ddagger(p) = \mathbf{F}(p).$$

Случаи равенства совпадают со случаями равенства в лемме 2. □

Доказательство следствия. Пусть $p > q$, тогда из теоремы 1 вытекает неравенство $\mathbf{F}(p) \le \mathbf{F}(q)$, которое можно записать в эквивалентной форме

$$\mathbf{I}_p(G) \le \frac{q+1}{p+1}\boldsymbol{\rho}(G)^{p-q}\mathbf{I}_q(G) - \frac{2\pi(p-q)\boldsymbol{\rho}(G)^{p+2}}{(p+1)(p+2)(q+2)}. \tag{27}$$

Применяя (27), получим

$$\frac{((q+1)(q+2)\mathbf{I}_q(G))^{\frac{p+2}{q+2}}}{(2\pi)^{\frac{p-q}{q+2}}(p+1)(p+2)} - \mathbf{I}_p(G) \ge \frac{((q+1)(q+2)\mathbf{I}_q(G))^{\frac{p+2}{q+2}}}{(2\pi)^{\frac{p-q}{q+2}}(p+1)(p+2)} -$$
$$- \frac{q+1}{p+1}\boldsymbol{\rho}(G)^{p-q}\mathbf{I}_q(G) + \frac{2\pi(p-q)\boldsymbol{\rho}(G)^{p+2}}{(p+1)(p+2)(q+2)} = \frac{((q+1)(q+2)\mathbf{I}_q(G))^{\frac{p+2}{q+2}}}{(2\pi)^{\frac{p-q}{q+2}}(p+1)(p+2)}\,F(x;q,p),$$

где

$$F(x;q,p) = 1 - \frac{p+2}{q+2}\,x^{p-q} + \frac{p-q}{q+2}\,x^{p+2} \quad \text{и} \quad x = \left(\frac{2\pi\boldsymbol{\rho}(G)^{q+2}}{(q+1)(q+2)\mathbf{I}_q(G)}\right)^{1/(q+2)}.$$

Очевидно, в случае $q \geq 0$ функционал $\mathbf{I}_q(G)$ монотонно возрастает при увеличении области. Следовательно,

$$\mathbf{I}_q(G) \geq \mathbf{I}_q(B(\boldsymbol{\rho}(G),0)) = \frac{2\pi\boldsymbol{\rho}(G)^{q+2}}{(q+1)(q+2)}.$$

В случае $q < 0$ последнее неравенство также имеет место, но в силу другого свойства. Действительно, применяя неравенство Шмидта ([8], с. 51) к области G, получим

$$\mathbf{I}_q(G) \geq \mathbf{I}_q([G]_S) = \frac{2\pi\boldsymbol{\rho}([G]_S)^{q+2}}{(q+1)(q+2)} \geq \frac{2\pi\boldsymbol{\rho}(G)^{q+2}}{(q+1)(q+2)}.$$

В обоих случаях равенство будет достигаться тогда и только тогда, когда область G совпадает с кругом. Таким образом, $x \in [0,\, 1]$.

Легко убедиться в том, что точка $x = 1$ является корнем второго порядка уравнения $F(x;q,p) = 0$ и производная

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x;q,p) = \frac{(p+2)(p-q)x^p}{q+2}(x - x^{-q-1})$$

отрицательна при $x \in (0,\, 1)$. Следовательно, $F(x;q,p) \geq 0$ при $x \in [0,\, 1]$ и $F(x;q,p) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 1$.

Таким образом, в условиях теоремы 1 справедливо

$$\frac{\left((2\pi)^{-1}(q+1)(q+2)\mathbf{I}_q(G)\right)^{(p+2)/(q+2)}}{(p+1)(p+2)} - \mathbf{I}_p(G) \geq 0.$$

При этом неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда $x = 1$, т. е. область G — круг. Осталось заметить, что последнее неравенство эквивалентно $\mathbf{f}(p+2) \leq \mathbf{f}(q+2)$. □

4. Замечания и следствия

1. В теореме 1 положим $Q(t) \equiv t$, тогда левое неравенство теоремы можно интерпретировать как решение задачи о высоте груды песка с фиксированной площадью и фиксированной шириной $2\boldsymbol{\rho}(G)$ (здесь под шириной области подразумеваем удвоенный супремум радиусов кругов, вписанных в область). Применение правого неравенства теоремы в более узком классе областей типа Боннезена приводит к решению задачи Дж. Ливитта и П. Унгара с фиксированной площадью, упомянутой во введении (в обоих задачах угол осыпания груды песка считается фиксированным и одинаковым).

2. Кроме упомянутых во втором разделе функционалов, Дж. Херш и К. Бэндл построили другие примеры физических и геометрических функционалов, обладающие свойством изопериметрической монотонности [13].

3. Следствием монотонности функционала $\mathbf{f}(\alpha)$ является неравенство между евклидовыми моментами различных порядков. Основным достоинством этого неравенства является то, что неравенство точное.

Можно получить другой порядковый результат более простым способом, например,

$$\mathbf{I}_p(G) < \boldsymbol{\rho}(G)^{p-q}\mathbf{I}_q(G), \tag{28}$$

где $p > q$. Неравенство (27), являющееся аналогом неравенства Пейна, построено на основе неравенства (28), в отличии от которого является точным.

4. Условие $\mathbf{I}_{p_0}(G) < \infty$ в теореме 2 и в следствии связано с классом допустимых односвязных областей. Отметим, что каждому значению параметра p_0 соответствует свой класс допустимых областей. При $p_0 = 0$ получим класс областей с ограниченной площадью. Центральным результатом в [2] является тот факт, что класс областей с $p_0 = 2$ совпадает с классом областей, для которых ограничена жесткость кручения области. Для различных значений p_0 классы не совпадают и вложены друг в друга, при этом большему значению параметра соответствует более широкий класс областей.

В [9] показано, что

$$\lim_{p\to -1}(p+1)\int_G R(x,G)^p \mathrm{dA} = \mathbf{L}(G)/2,$$

где $R(x,G)$ — конформный радиус области G в точке x. Применив классическое двустороннее неравенство [15] $\rho(x,G) \le R(x,G) \le 4\rho(x,G)$, получим

$$\mathbf{L}(G)/2 \le \lim_{p\to -1}(p+1)\mathbf{I}_p(G) \le 2\mathbf{L}(G).$$

Таким образом, при $p_0 = -1$ получаем наиболее узкий класс областей — с ограниченной длиной границы.

С другой стороны, в работе [16] доказано $\lim\limits_{p\to +\infty}(\mathbf{I}_p(G))^p = \boldsymbol{\rho}(G)$. Наиболее широкий класс областей ($p_0 \to +\infty$) совпадает с областями, для которых функционал $\boldsymbol{\rho}(G)$ ограничен.

5. Для областей с ограниченной площадью неравенство (27) примет вид

$$\mathbf{I}_p(G) \le \frac{\boldsymbol{\rho}(G)^p}{p+1}\mathbf{A}(G) - \frac{\pi p \boldsymbol{\rho}(G)^{p+2}}{(p+1)(p+2)}. \tag{29}$$

Положим в (29) $p = 2$, получим

$$\mathbf{A}(G)^2 - 6\pi\,\mathbf{I}_2(G) \ge (\mathbf{A}(G) - \pi\,\boldsymbol{\rho}(G))^2\,.$$

Здесь можно обнаружить связь с неравенством Пейна (3). Таким образом, неравенство (29) является аналогом неравенства Пейна для евклидовых моментов области относительно своей границы.

6. Отметим некоторые предельные случаи. Из [10] следует, что для областей с ограниченной длиной границы

$$\lim_{p\to -1}\mathbf{F}(p,G) = \lim_{p\to -1}\frac{p+1}{\boldsymbol{\rho}(G)^{p+1}}\left(\mathbf{I}_p(G) - \frac{2\pi\boldsymbol{\rho}(G)^{p+2}}{(p+1)(p+2)}\right) = \mathbf{L}(G) - 2\pi\boldsymbol{\rho}(G),$$

а также показано [16], что

$$\lim_{p\to +\infty}\mathbf{F}(p,G) = \lim_{p\to +\infty}\frac{p+1}{\boldsymbol{\rho}(G)^{p+1}}\left(\mathbf{I}_p(G) - \frac{2\pi\boldsymbol{\rho}(G)^{p+2}}{(p+1)(p+2)}\right) = \mathbf{l}(\boldsymbol{\rho}(G)).$$

В заключение отметим, что хотя неравенство $\mathbf{F}(0,G) \le \mathbf{F}(-1,G)$ будет совпадать с неравенством Боннезена (4), теорему 2 нельзя рассматривать как вариант доказательства неравенства Боннезена.

Литература

[1] Leavitt J., Ungar P. *Circle supports the largest sandpile*, Comment. Pure Appl. Math. **15**, 35–37 (1962).
[2] Авхадиев Ф.Г. *Решение обобщенной задачи Сен-Венана*, Матем. сборник **189** (12), 3–12 (1998).
[3] Полиа Г., Сегё Г. *Изопериметрические неравенства в математической физике* (Физматгиз, М., 1962).
[4] Salahudinov R.G. *An isoperimetric inequality for torsional rigidity in the complex plane*, J. Inequal. and Appl. **6**, 253–260 (2001).

[5] Bañuelos R., van den Berg M., Carroll T. *Torsional rigidity and expected lifetime of brownian motion*, J. London Math. Soc. (2) **66**, 499–512 (2002).
[6] Салахудинов Р.Г. *Двусторонние оценки l^p-нормы функции напряжения выпуклых областей в $\mathbb{R}^n$*, Изв. вузов. Матем., № 3, 41–49 (2006).
[7] Авхадиев Ф.Г. *Геометрические характеристики области, эквивалентные некоторым нормам операторов вложения*, Материалы международн. конф. и Чебышевские чтения **1**, 12–14 (1996).
[8] Bandle C. *Isoperimetric inequalities and applications* (Pitman Advanced Publishing Program, Boston, London, Melbourne, 1980).
[9] Avkhadiev F.G., Salahudinov R.G. *Isoperimetric inequalities for conformal moments of plane domains*, J. of Inequalities and Appl. **7** (4), 593–601 (2002).
[10] Salahudinov R.G. *Isoperimetric inequalities for l^p-norms of the distance function to the boundary*, Учен. зап. Казанск. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки **148** (2), 151–162 (2006).
[11] Payne L.E. *Some inequalities in the torsion problem for multiply connected regions*, Studies in Mathematical analysis and Related Topics: Essays in honor of G. Polya (Stanford University Press, Stanford, California, 1962), p. 270-280.
[12] Бураго Ю.Д., Залгаллер В.А. *Геометрические неравенства* (Наука, Ленинград, 1980).
[13] Hersch J. *Isoperimetric monotonicity — some properties and conjectures* (*connection between isoperimetric inequalities*), SIAM Rev. **30** (4), 551–577 (1988).
[14] Kohler-Jobin M.-Th. *Une propriété de monotonie isopérimétrique qui contient plusieurs théorèmes classiques*, C. R. Acad. Sci. Paris **284** (3), 917–920 (1977).
[15] Голузин Г.М. *Геометрическая теория функций комплексного переменного* (Наука, Л., 1966).
[16] Salakhudinov R.G. *Refined inequalities for euclidian moments of a domain with respect to its boundary*, SIAM J. Math. Anal. **44** (4), 2949–2961 (2012).

Р.Г. Салахудинов

доцент, кафедра математического анализа,
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

e-mail: rsalakhud@gmail.com

R.G. Salakhudinov

Isoperimetric properties of Euclidean boundary moments of a simply connected domain

Abstract. We consider integral functionals of a simply connected domain which depend on the distance to the domain boundary. We prove an isoperimetric inequality generalizing theorems derived by the Schwarz symmetrization method. For L^p-norms of the distance function we prove an analog of the Payne inequality for the torsional rigidity of the domain. In compare with the Payne inequality we find new extremal domains different from a disk.

Keywords: distance function to the boundary of a domain, Bonnesen inequality, isoperimetric inequalities, Euclidean moments of a domain with respect to the boundary, torsional rigidity, isoperimetric monotonicity.

R.G. Salakhudinov

Associate Professor, Chair of Mathematical Analysis,
Kazan (Volga Region) Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

e-mail: rsalakhud@gmail.com