Известия вузов. Математика
2015, №8, с. 51–63

http://old.kpfu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

О.С. КУДРЯВЦЕВА

ГОЛОМОРФНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ КРУГА В СЕБЯ С ИНВАРИАНТНЫМ ДИАМЕТРОМ И ОГРАНИЧЕННЫМ ИСКАЖЕНИЕМ

Аннотация. Рассматривается задача вложения голоморфного отображения единичного круга в себя с инвариантным диаметром и ограниченным искажением в однопараметрическую полугруппу. При этом требуется, чтобы элементы однопараметрической полугруппы обладали теми же свойствами, что и исходное отображение. Установлены критерии вложимости, решение приводится в терминах функции Кёнигса.

Ключевые слова: однопараметрическая полугруппа, дробные итерации, инфинитезимальная образующая, функция Кёнигса, неподвижные точки.

УДК: 517.546

1. Введение

Данная работа является продолжением исследований, связанных с возможностью вложения голоморфного отображения в однопараметрическую полугруппу. Задача вложения естественно возникает в тех областях естествознания, где при описании процессов используется динамика голоморфного отображения. В теории аналитических функций данная задача впервые появилась как задача дробного итерирования. Она состоит в том, чтобы для заданной функции f найти (в случае существования) семейство функций $f^t, t \geqslant 0$, удовлетворяющее условиям

$$f^0(z) = z, \quad f^1(z) = f(z) \;\text{ и }\; f^{t+s}(z) = f^t \circ f^s(z) \;\text{ для всех }\; s \geqslant 0, \quad t \geqslant 0.$$

В истории развития задачи дробного итерирования выделяются следующие случаи. Самые первые исследования относятся к работам Е. Шрёдера [1] и Г. Кёнигса [2] и касаются локального случая, т. е. когда функция f и ее итерации дифференцируемы в комплексном смысле в окрестности (для каждой итерации — своя окрестность) общей неподвижной точки. Е. Шрёдер связал задачу дробного итерирования с решением функционального уравнения, а Г. Кёнигс ввел конструкцию, являющуюся решением этого уравнения, и показал существование дробных итераций f^t, $t \geqslant 0$, функции f лишь при незначительных на нее ограничениях.

Позже задача дробного итерирования изучалась для целых и мероморфных функций. Полученные здесь результаты оказались противоположными локальному случаю. Так, в

Поступила 08.01.2014

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 12-01-00434-а), а также в рамках проекта по повышению конкурентоспособности университетов Российской Федерации среди ведущих мировых научно-образовательных центров (Программа “5топ100”), проводимого на базе Московского физико-технического института.

работах [3], [4] показано, что существование дробных итераций возможно лишь для дробно-линейных функций.

Далее получило развитие направление, связанное с изучением аналитических в некоторой области функций, принимающих значения из этой же области (обычно в качестве такой области выбирается единичный круг или полуплоскость). Существенное влияние на развитие этого направления оказали работы [5]–[7]. Это направление, в отличие от первых двух, более разнообразно с точки зрения получаемых результатов, и, кроме того, его активное развитие стимулируется широким кругом приложений, например, в теории случайных ветвящихся процессов, в некоммутативной теории вероятностей, в теории композиционных операторов. Значимость этого направления и возросший к нему в последнее время интерес связаны также с новыми приложениями уравнения Лёвнера, такими как SLE (Shramm (stochastic) – Löwner evolution), которые привели к решению ряда трудных задач в различных областях естествознания.

Значительное продвижение в исследовании задачи дробного итерирования было получено, когда семейство дробных итераций стали рассматривать как однопараметрическую полугруппу. Как и в общей дифференциальной динамике, однопараметрическая полугруппа голоморфных отображений вполне характеризуется инфинитезимальной образующей. Другим способом задания однопараметрической полугруппы является функция Кёнигса, общая для всех ее элементов. При этом описание однопараметрических полугрупп тесно связано с анализом неподвижных точек отображения. Именно в терминах неподвижной точки, являющейся локально равномерным пределом последовательности итераций, записывается классическая формула Берксона–Порты [5], которая описывает множество всех инфинитезимальных образующих однопараметрических полугрупп голоморфных отображений единичного круга в себя.

В классе всех голоморфных отображений единичного круга в себя выделяются интересные для исследования подклассы с заданными свойствами. В связи с приложениями важной задачей является описание всех однопараметрических полугрупп, элементы которых принадлежат этим подклассам, в терминах их инфинитезимальных образующих и функций Кёнигса. Ключевым результатом, дающим возможность изучения вопросов вложимости голоморфного отображения в однопараметрическую полугруппу с заданными граничными свойствами, является аналог формулы Берксона–Порты [8], [9]. Так, в ([8], теоремы 3 и 5) получено интегральное представление классов функций Кёнигса, которые соответствуют вложимым голоморфным отображениям единичного круга в себя с заданным поведением в граничной точке. Аналогичное представление выделено для вложимых отображений с внутренней и граничной неподвижными точками и вещественными коэффициентами Тейлора [10].

В данной работе в терминах функции Кёнигса установлены критерии вложимости в классе голоморфных отображений единичного круга в себя с инвариантным диаметром и ограниченным искажением.

2. Однопараметрические полугруппы и функция Кёнигса

Пусть $\mathfrak{P}$ — совокупность всех голоморфных в единичном круге $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функций f, принимающих значения из $\mathbb{D}$. Тогда $\mathfrak{P}$ образует топологическую полугруппу относительно операции композиции и топологии локально равномерной в $\mathbb{D}$ сходимости, роль единицы в которой играет тождественное преобразование $f(z) \equiv z$. Пусть $\mathfrak{L}$ — некоторая подполугруппа полугруппы $\mathfrak{P}$. Будем рассматривать $\mathbb{R}^+ = \{t \in \mathbb{R} : t \geqslant 0\}$ как аддитивную полугруппу с обычной топологией вещественных чисел.

Определение 1. Под *однопараметрической полугруппой* в $\mathfrak{P}\,(\mathfrak{L})$ понимается непрерывный гомоморфизм $t \mapsto f^t$, действующий из полугруппы $\mathbb{R}^+$ в полугруппу $\mathfrak{P}(\mathfrak{L})$.

Это означает, что семейство $\{f^t\}_{t\geqslant 0}$ функций из $\mathfrak{P}(\mathfrak{L})$ удовлетворяет условиям

(i) $f^0(z) \equiv z$,

(ii) $f^{t+s}(z) = f^t \circ f^s(z)$ при $s \geqslant 0$, $t \geqslant 0$,

(iii) $f^t(z) \to z$ локально равномерно в $\mathbb{D}$ при $t \to 0$.

Поскольку элементы f^t однопараметрической полугруппы при целых неотрицательных значениях t являются натуральными итерациями $f^n = f \circ f^{n-1}$, $n = 2, 3, \dots$, функции $f = f^1$, то при $t \geqslant 0$ они называются *дробными итерациями* функции f.

Определение 2. Функция $f \in \mathfrak{P}(\mathfrak{L})$ *вложима в однопараметрическую полугруппу* в $\mathfrak{P}(\mathfrak{L})$, если существует такая однопараметрическая полугруппа $t \mapsto f^t$ в $\mathfrak{P}(\mathfrak{L})$, что $f^1 = f$.

Приведем основные результаты, касающиеся однопараметрических полугрупп $t \mapsto f^t$ в $\mathfrak{P}$. Всякая однопараметрическая полугруппа в $\mathfrak{P}$ дифференцируема по t [5] и характеризуется своей *инфинитезимальной образующей*

$$\frac{\partial}{\partial t} f^t(z)\Big|_{t=0} = \lim_{t\to 0} \frac{f^t(z) - z}{t} = v(z)$$

посредством дифференциального уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} f^t(z) = v(f^t(z)) \tag{1}$$

с начальным условием $f^t(z)|_{t=0} = z$.

Исследование вида инфинитезимальной образующей тесно связано с анализом таких инвариантов, как неподвижные точки отображения. Известно (например, [6], [11]), что функции f^t, $t \geqslant 0$, имеют общее множество неподвижных точек, среди которых выделяется так называемая *точка Данжуа–Вольфа* q (например, [12]), обладающая следующим свойством притяжения: $f^t(z) \to q$ локально равномерно в $\mathbb{D}$ при $t \to \infty$. Эта точка может располагаться как внутри единичного круга $\mathbb{D}$, так и на его границе $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. В последнем случае неподвижность точки q понимается в смысле углового предела, т. е. существует угловой предел $\lim\limits_{z\to q} f(z) = q$. В силу принципа гиперболической метрики (например, [13]) все другие неподвижные точки, если они есть, для нетривиальной однопараметрической полугруппы ($f^t(z) \not\equiv z$) должны лежать только на $\mathbb{T}$. В терминах точки Данжуа–Вольфа q формулируется общий вид инфинитезимальных образующих однопараметрических полугрупп, известный как формула Берксона–Порты,

$$v(z) = (q - z)(1 - \overline{q}z)p(z), \tag{2}$$

где p — голоморфная в $\mathbb{D}$ функция с неотрицательной вещественной частью. Если же элементы однопараметрической полугруппы, кроме точки Данжуа–Вольфа, имеют дополнительные неподвижные точки, в которых угловые производные конечны, то формула Берксона–Порты (2) преобразуется к виду, установленному в работах [8], [9].

Как уже отмечалось, задание однопараметрических полугрупп, кроме инфинитезимального описания, возможно посредством функции Кёнигса. Пусть функция $f \in \mathfrak{P}$ отлична от дробно-линейного преобразования единичного круга $\mathbb{D}$ на себя и имеет внутреннюю точку Данжуа–Вольфа $q \in \mathbb{D}$. Если $f'(q) \neq 0$, то (например, [12], гл. VI, § 44) существует предел

$$F(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^n(z) - q}{(f'(q))^n}\,,$$

который представляет собой непостоянную аналитическую в единичном круге $\mathbb{D}$ функцию и называется *функцией Кёнигса.* Поскольку

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{n+1}(z)-q}{\left(f'(q)\right)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{f^n\left(f(z)\right)-q}{f'(q)\,\left(f'(q)\right)^n} = \frac{1}{f'(q)}\,F(f(z)),$$

то функция Кёнигса является решением функционального уравнения Шрёдера

$$F(f(z)) = f'(q)F(z)$$

и, кроме того, является единственным решением этого уравнения в классе аналитических в $\mathbb{D}$ функций с нормировкой $F(q)=0, F'(q)=1$.

Допустим теперь, что $t \mapsto f^t$ — однопараметрическая полугруппа в $\mathfrak{P}$ с внутренней точкой Данжуа–Вольфа $q\in\mathbb{D}$. В силу единственности решения задачи Коши (1) для обыкновенного дифференциального уравнения, воспроизводящего однопараметрическую полугруппу по инфинитезимальной образующей, функции f^t, $t\geqslant 0$, однолистны в $\mathbb{D}$ и, следовательно, $\left(f^t\right)'(q)\neq 0$ (здесь и далее запись $\left(f^t\right)'(q)$ означает производную функции $f^t(z)$ по переменной z, вычисленную в точке $z=q$). Поэтому существует предел

$$F(z) = \lim_{t\to\infty} \frac{f^t(z)-q}{\left(f^t\right)'(q)},$$

который представляет собой непостоянную аналитическую в единичном круге $\mathbb{D}$ функцию, удовлетворяющую условиям $F(q)=0, F'(q)=1$. Непостоянная функция F, как предел последовательности однолистных функций, также однолистна. Поскольку

$$\lim_{s\to\infty} \frac{f^{s+t}(z)-q}{\left(f^{s+t}\right)'(q)} = \lim_{s\to\infty} \frac{f^s\left(f^t(z)\right)-q}{\left(f^s\right)'(q)\,\left(f^t\right)'(q)} = \frac{1}{\left(f^t\right)'(q)}\,F(f^t(z)),$$

то функция F является решением функционального уравнения Шрёдера

$$F\left(f^t(z)\right) = \left(f^t\right)'(q)\,F(z). \tag{3}$$

Таким образом, с каждой однопараметрической полугруппой $t\to f^t$ в $\mathfrak{P}$ с точкой Данжуа–Вольфа $q\in\mathbb{D}$ однозначно ассоциируется функция F, которая, очевидно, является функцией Кёнигса для функции $f=f^1$ и может быть использована для получения дробных итераций функции f посредством функционального уравнения Шрёдера (3).

Замечание. Пусть $t\mapsto f^t$ — однопараметрическая полугруппа в $\mathfrak{P}$ с точкой Данжуа–Вольфа $q\in\mathbb{D}$, инфинитезимальной образующей v и функцией Кёнигса F. Тогда

$$F'(z)\,v(z) = v'(q)\,F(z). \tag{4}$$

Действительно, дифференцируя (1) по z и полагая $z=q$, получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dt}\left(f^t\right)'(q) = v'(q)\left(f^t\right)'(q)$$

с начальным условием $\left(f^t\right)'(q)\big|_{t=0}=1$, интегрирование которого по t приводит к равенству

$$\left(f^t\right)'(q) = e^{v'(q)t}.$$

Таким образом, уравнение (3) можно записать в виде

$$F\left(f^t(z)\right) = e^{v'(q)t}\,F(z).$$

Дифференцируя последнее равенство по t и полагая $t=0$, получаем (4).

В случае граничной точки Данжуа–Вольфа $q \in \mathbb{T}$ нет полного аналога определения функции Кёнигса как предела некоторой нормированной последовательности итераций (например, [12], гл. VI, § 45–47). Однако с каждой однопараметрической полугруппой $t \mapsto f^t$ в $\mathfrak{P}$ с точкой Данжуа–Вольфа $q \in \mathbb{T}$ можно однозначно ассоциировать функцию K, которая удовлетворяет функциональному уравнению Абеля

$$K\left(f^t(z)\right) = K(z) + t, \tag{5}$$

$t \geqslant 0$, и также может быть использована для получения дробных итераций.

Действительно, пусть $t \mapsto f^t$ — однопараметрическая полугруппа в $\mathfrak{P}$ с точкой Данжуа–Вольфа $q \in \mathbb{T}$ и v — ее инфинитезимальная образующая. Инфинитезимальную образующую v в силу формулы Берксона–Порты (2) можно представить в виде

$$v(z) = \frac{q(1-\overline{q}z)^2}{p(z)},$$

где p — голоморфная с неотрицательной вещественной частью в $\mathbb{D}$ функция. Если предположить, что найдется точка $z_0 \in \mathbb{D}$ такая, что $\operatorname{Re} p(z_0) = 0$, то в силу принципа открытости аналитических функций функция p тождественно равна мнимой константе, что отвечает однопараметрической полугруппе дробно-линейных преобразований единичного круга на себя. Поэтому будем предполагать, что $\operatorname{Re} p(z) > 0$ при $z \in \mathbb{D}$. Определим голоморфную в $\mathbb{D}$ функцию K посредством равенств $K(0) = 0$ и

$$K'(z) = \frac{1}{v} = \frac{p(z)}{q(1-\overline{q}z)^2}. \tag{6}$$

Это определение корректно, поскольку $\mathbb{D}$ — односвязная область. Кроме того, для функции $L(z) = z/(q-z)$, которая отображает $\mathbb{D}$ на полуплоскость, выполняется равенство $K'(z)/L'(z) = p(z)$. Отсюда следует, что K является близкой к выпуклой функцией (например, [14], с. 583). В частности, K однолистна в $\mathbb{D}$. Кроме того, образ $K(\mathbb{D})$ единичного круга обладает тем свойством, что вместе с каждой точкой $w \in K(\mathbb{D})$ он содержит и весь луч $\{w + t : t \geqslant 0\}$. Действительно, пусть $w_0 \in K(\mathbb{D})$, т. е. $w_0 = K(z_0)$ при некотором $z_0 \in \mathbb{D}$. Тогда кривая $w(t) = K\left(f^t(z_0)\right)$, $t \geqslant 0$, содержится в $K(\mathbb{D})$ и $w(0) = w_0$. При этом

$$\frac{d}{dt}\, w(t) = K'\left(f^t(z_0)\right) v\left(f^t(z_0)\right) = 1,$$

т. е. $w(t) = w_0 + t$, $t \geqslant 0$. Таким образом, при всех $t \geqslant 0$ выполняется равенство

$$K\left(f^t(z)\right) = K(z) + t, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Итак, с каждой однопараметрической полугруппой $t \mapsto f^t$ в $\mathfrak{P}$ с точкой Данжуа–Вольфа $q \in \mathbb{T}$ однозначно ассоциируется функция K, которая является решением уравнения Абеля (5) при всех $t \geqslant 0$ и удовлетворяет условию $K(0) = 0$. Функция K называется *функцией Кёнигса* однопараметрической полугруппы $t \mapsto f^t$ в случае граничной точки Данжуа–Вольфа. Как следует из геометрических свойств функции K, однопараметрическая полугруппа $t \mapsto f^t$ восстанавливается с помощью своей функции Кёнигса посредством равенства

$$f^t(z) = K^{-1}\left(K(z) + t\right), \quad t \geqslant 0.$$

3. Критерии вложимости

Обозначим через $\mathfrak{D}$ подполугруппу полугруппы $\mathfrak{P}$, которую образуют функции $f \in \mathfrak{P}$, оставляющие инвариантным вещественный диаметр, монотонно возрастающие на вещественном диаметре и имеющие на нем ограниченное искажение. Более точно, $\mathfrak{D}$ — совокупность голоморфных отображений $f : \mathbb{D} \mapsto \mathbb{D}$, удовлетворяющих условиям

1) $\operatorname{Im} f(x) = 0$ при $x \in (-1,1)$, $\lim\limits_{x\to\pm 1} f(x) = \pm 1$,
2) $f'(x) > 0$ при $x \in (-1,1)$ и $\sup\limits_{x\in(-1,1)} f'(x) < \infty$.

Решение задачи вложимости в классе функций $\mathfrak{D}$ естественным образом расслаивается на три случая в зависимости от наличия или отсутствия внутренней неподвижной точки функции $f \in \mathfrak{D}$. Если $f \in \mathfrak{D}$ имеет внутреннюю неподвижную точку, то эта точка может лежать только на вещественном диаметре. Это следует из теоремы Данжуа–Вольфа (например, [12], гл. VI, § 43) и того, что натуральные итерации функции $f \in \mathfrak{D}$ на вещественном диаметре принимают вещественные значения. Если же $f \in \mathfrak{D}$ и $f(x) \neq x$ для всех $x \in (-1,1)$, то выражение $f(x) - x$ сохраняет знак. Таким образом, условия

1) $f(q) = q$ при некотором $q \in (-1,1)$,
2) $f(x) > x$ для всех $x \in (-1,1)$,
3) $f(x) < x$ для всех $x \in (-1,1)$,

связанные с наличием или отсутствием внутренней неподвижной точки, позволяют выполнить разбиение класса функций $\mathfrak{D}$ на три непересекающихся подкласса.

Следующие теоремы исчерпывают все возможные ситуации относительно наличия или отсутствия внутренней неподвижной точки функции $f \in \mathfrak{D}$ и дают полное решение задачи вложимости в классе функций $\mathfrak{D}$.

Теорема 1. *Пусть $f \in \mathfrak{D}$ и $f(q) = q$ при некотором $q \in (-1,1)$. Тогда если f вложима в однопараметрическую полугруппу в $\mathfrak{D}$, то ее функция Кёнигса имеет вид*

$$F(z) = (z-q)\,\frac{1-qz}{1-q^2}\left(\frac{1+q}{1+z}\right)^{2\gamma_1}\left(\frac{1-q}{1-z}\right)^{2\gamma_2}\exp\left\{\gamma_3\int_{[-1,1]}\ln\frac{1-2xq+q^2}{1-2xz+z^2}d\mu(x)\right\} \tag{7}$$

с некоторыми $\gamma_1, \gamma_2 > 0$, $\gamma_3 \geqslant 0$, $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 1$, и вероятностной мерой μ на $[-1,1]$. Под степенными функциями и логарифмом понимаются ветви, принимающие значения единица и нуль соответственно при $z = q$.

Обратно, всякая функция F вида (7) однолистна в $\mathbb{D}$, отображает $\mathbb{D}$ на звездную относительно начала координат область и является функцией Кёнигса для функций $f(z) = F^{-1}(\beta F(z))$, $0 < \beta < 1$. При этом функции f принадлежат $\mathfrak{D}$, $f(q) = q$ и вложимы в однопараметрическую полугруппу в $\mathfrak{D}$.

Теорема 2. *Пусть $f \in \mathfrak{D}$ и $f(x) - x$ сохраняет знак для всех $x \in (-1,1)$. Тогда если f вложима в однопараметрическую полугруппу в $\mathfrak{D}$, то ее функция Кёнигса имеет вид*

$$K(z) = \lambda_1 \ln\frac{1+\sigma z}{1-\sigma z} + \lambda_2\frac{\sigma z}{(1-\sigma z)^2} + \lambda_3\int_{[-\sigma,\sigma)}\ln\frac{1-2xz+z^2}{(1-\sigma z)^2}\frac{d\mu(x)}{1-\sigma x} \tag{8}$$

с некоторыми $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 \geq 0$, $\lambda_3 \geq 0$ и вероятностной мерой μ на $[-\sigma,\sigma)$, где $\sigma = \operatorname{sgn}(f(x) - x)$, и под $[a,b)$, если $a > b$, понимается $(b,a]$. Под логарифмами понимаются ветви, принимающие значения нуль при $z = 0$.

Обратно, всякая функция K вида (8) однолистна в $\mathbb{D}$, отображает $\mathbb{D}$ на область, которая с каждой точкой $w \in K(\mathbb{D})$ содержит и весь луч $\{w + t : t \geq 0\}$, и является функцией Кёнигса для функций $f(z) = K^{-1}(K(z) + 1)$. Функции f принадлежат $\mathfrak{D}$, обладают следующим свойством: $f(x) - x$ сохраняет знак для всех $x \in (-1,1)$, причем $\operatorname{sgn}(f(x) - x) = \sigma$, и вложимы в однопараметрическую полугруппу в $\mathfrak{D}$.

Для доказательства теоремы 1 понадобится

Лемма. *Для любых* $z \in \mathbb{D}$, $q \in (-1,1)$, $\gamma_1, \gamma_2 > 0$, $\gamma_3 \geq 0$, $\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3 = 1$, *и вероятностной меры* μ *на* $[-1,1]$ *справедливо равенство*

$$1-2qz+q^2+(z-q)(1-qz)\bigg(-2\gamma_1\frac{1}{1+z}+2\gamma_2\frac{1}{1-z}+2\gamma_3\int_{[-1,1]}\frac{x-z}{1-2xz+z^2}d\mu(x)\bigg)=$$
$$=\gamma_1(1+q)^2\frac{1-z}{1+z}+\gamma_2(1-q)^2\frac{1+z}{1-z}+\gamma_3\int_{[-1,1]}\frac{(1-z^2)(1-2qx+q^2)}{1-2x+z^2}d\mu(x). \quad (9)$$

Доказательство. Замечая, что

$$\frac{(z-q)(1-qz)}{1+z}=(1-q^2)\bigg(-\frac{1}{2}\frac{1+q}{1-q}\frac{1-z}{1+z}+\frac{1}{2}-\frac{qz}{1-q^2}+\frac{q^2}{1-q^2}\bigg),$$
$$\frac{(z-q)(1-qz)}{1-z}=(1-q^2)\bigg(\frac{1}{2}\frac{1-q}{1+q}\frac{1+z}{1-z}-\frac{1}{2}+\frac{qz}{1-q^2}-\frac{q^2}{1-q^2}\bigg),$$

и учитывая, что $\gamma_3 = 1-\gamma_1-\gamma_2$, получаем

$$1-2qz+q^2+(z-q)(1-qz)\bigg(-2\gamma_1\frac{1}{1+z}+2\gamma_2\frac{1}{1-z}+2\gamma_3\int_{[-1,1]}\frac{x-z}{1-2xz+z^2}d\mu(x)\bigg)=$$
$$=\gamma_1(1+q)^2\frac{1-z}{1+z}+\gamma_2(1-q)^2\frac{1+z}{1-z}+\gamma_3(1-2qz+q^2)+2\gamma_3(z-q)(1-qz)\int_{[-1,1]}\frac{x-z}{1-2xz+z^2}d\mu(x)=$$
$$=\gamma_1(1+q)^2\frac{1-z}{1+z}+\gamma_2(1-q)^2\frac{1+z}{1-z}+\gamma_3\int_{[-1,1]}\frac{(1-z^2)(1-2qx+q^2)}{1-2xz+z^2}d\mu(x). \quad \square$$

Доказательство теоремы 1. Пусть функция $f \in \mathfrak{D}$, $f(q) = q$ при некотором $q \in (-1,1)$, является вложимой в однопараметрическую полугруппу в $\mathfrak{D}$, т.е. существует такая однопараметрическая полугруппа $t \mapsto f^t$ в $\mathfrak{D}$, что $f^1 = f$. Пусть также v — инфинитезимальная образующая однопараметрической полугруппы $t \mapsto f^t$ и F — ее функция Кёнигса. Покажем, что функция F допускает представление (7) с некоторой вероятностной мерой μ на $[-1,1]$.

Отметим, что для элементов f^t, $t \geqslant 0$, однопараметрической полугруппы $t \mapsto f^t$ точка q является точкой Данжуа–Вольфа, а точки $a_1 = -1$ и $a_2 = 1$ являются граничными неподвижными точками, в которых функции f^t, $t \geqslant 0$, имеют конечные угловые производные. Последнее следует из условия ограниченности искажения функций $f \in \mathfrak{D}$ на вещественном диаметре.

В силу аналога формулы Берксона–Порты ([8], предложение 1; [9], теорема 3), а также с учетом инвариантности вещественного диаметра при отображении функциями из $\mathfrak{D}$ инфинитезимальную образующую v однопараметрической полугруппы $t \mapsto f^t$ в $\mathfrak{D}$ с неподвижной точкой q, $q \in (-1,1)$, можно представить в виде

$$v(z)=\frac{\alpha(q-z)(1-qz)}{\lambda_1\,\frac{1-z}{1+z}+\lambda_2\,\frac{1+z}{1-z}+\delta p(z)}, \quad (10)$$

где $\alpha > 0$, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\delta \geqslant 0$ и функция $p \in C_r$. Под классом C_r понимается совокупность аналитических в $\mathbb{D}$ функций p, удовлетворяющих условиям $\operatorname{Re} p(z) > 0$ при $z \in \mathbb{D}$, $p(0) = 1$, и производные $p^{(n)}(0) \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$. Отметим, что для функций $p \in C_r$ справедливо интегральное представление (например, [15], с. 520)

$$p(z)=\int_{[-1,1]}\frac{1-z^2}{1-2xz+z^2}d\nu(x), \quad (11)$$

где ν — вероятностная мера на $[-1,1]$.

Обозначив

$$g(z)=\lambda_1\frac{1-z}{1+z}+\lambda_2\frac{1+z}{1-z}+\delta p(z),$$

из равенства (4) с учетом (10) получаем

$$\frac{F'(z)}{F(z)}=\frac{v'(q)}{v(z)}=\frac{(1-q^2)g(z)}{g(q)(z-q)(1-qz)}= \\ =\frac{(1-q^2)}{g(q)(z-q)(1-qz)}\left(\lambda_1\frac{1-z}{1+z}+\lambda_2\frac{1+z}{1-z}+\delta p(z)\right). \quad (12)$$

Полагая

$$\gamma_1=\frac{\lambda_1}{g(q)}\frac{1-q}{1+q},\quad \gamma_2=\frac{\lambda_2}{g(q)}\frac{1+q}{1-q},\quad \gamma_3=\frac{\delta\rho}{g(q)},$$

где

$$\rho=\int_{[-1,1]}\frac{1-q^2}{1-2xq+q^2}d\nu(x),$$

ν — вероятностная мера на $[-1,1]$, получаем числа, удовлетворяющие условиям: $\gamma_1>0$, $\gamma_2>0$, $\gamma_3\geq 0$, $\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3=1$. Используя эти обозначения, соотношение (12) запишем в виде

$$\frac{F'(z)}{F(z)}=\frac{1}{(z-q)(1-qz)}\left(\gamma_1(1+q)^2\frac{1-z}{1+z}+\gamma_2(1-q)^2\frac{1+z}{1-z}+\gamma_3\frac{1-q^2}{\rho}p(z)\right). \quad (13)$$

Применяя теперь интегральное представление (11) и определяя на $[-1,1]$ вероятностную меру μ посредством равенства

$$d\mu(x)=\frac{1}{\rho}\frac{1-q^2}{1-2xq+q^2}d\nu(x),$$

из соотношения (13) получаем

$$\frac{F'(z)}{F(z)}=\frac{1}{(z-q)(1-qz)}\left(\gamma_1(1+q)^2\frac{1-z}{1+z}+\gamma_2(1-q)^2\frac{1+z}{1-z}+\right. \\ \left.+\gamma_3\int_{[-1,1]}\frac{(1-z^2)(1-2qx+q^2)}{1-2xz+z^2}d\mu(x)\right). \quad (14)$$

Так как функция F однолистна в единичном круге $\mathbb{D}$ и $F(q)=0$, $F'(q)=1$, то функция $F(z)/(z-q)$ не обращается в нуль в $\mathbb{D}$ и можно выделить однозначную ветвь логарифма $\ln(F(z)/(z-q))$, которая обращается в нуль при $z=q$. Из (14) с учетом равенства (9), установленного в лемме, получаем дифференциальное соотношение для функции Кёнигса

$$\frac{d}{dz}\ln\frac{F(z)}{z-q}=\frac{F'(z)}{F(z)}-\frac{1}{z-q}=\frac{-2\gamma_1}{1+z}+\frac{2\gamma_2}{1-z}+2\gamma_3\int_{[-1,1]}\frac{x-z}{1-2xz+z^2}d\mu(x)-\frac{q}{1-qz}.$$

Интегрируя это равенство по z, получаем

$$\ln\frac{F(z)}{z-q}=\ln\frac{1-qz}{1-q^2}+2\gamma_1\ln\frac{1+q}{1+z}+2\gamma_2\ln\frac{1-q}{1-z}+\gamma_3\int_{[-1,1]}\ln\frac{1-2xq+q^2}{1-2xz+z^2}d\mu(x),$$

где под логарифмами понимаются ветви, обращающиеся в нуль при $z=q$. Потенцируя теперь последнее равенство, приходим к формуле (7) для функции Кёнигса F.

Покажем обратное. Пусть функция F имеет вид (7). Дифференцируя равенство (7), получаем

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \frac{1-2qz+q^2}{(z-q)(1-qz)} - 2\gamma_1 \frac{1}{1+z} + 2\gamma_2 \frac{1}{1-z} + 2\gamma_3 \int_{[-1,1]} \frac{x-z}{1-2xz+z^2} d\mu(x).$$

Отсюда и из равенства (9) имеем

$$(z-q)(1-qz)\frac{F'(z)}{F(z)} = \gamma_1(1+q)^2\frac{1-z}{1+z} + \gamma_2(1-q)^2\frac{1+z}{1-z} + \gamma_3 \int_{[-1,1]} \frac{(1-z^2)(1-2qx+q^2)}{1-2xz+z^2} d\mu(x).$$

Обозначив

$$\rho = \int_{[-1,1]} \frac{1-2xq+q^2}{1-q^2} d\mu(x),$$

определим на $[-1,1]$ вероятностную меру ν с помощью равенства

$$d\nu(x) = \frac{1}{\rho}\,\frac{1-2xq+q^2}{1-q^2} d\mu(x).$$

Тогда

$$(z-q)(1-qz)\,\frac{F'(z)}{F(z)} = \gamma_1\,(1+q)^2\,\frac{1-z}{1+z} + \gamma_2\,(1-q)^2\,\frac{1+z}{1-z} + \\ + \rho\,(1-q^2)\,\gamma_3 \int_{[-1,1]} \frac{1-z^2}{1-2xz+z^2} d\nu(x).$$

Следовательно, при $z \in \mathbb{D}$

$$\operatorname{Re}\left\{(z-q)(1-qz)\,\frac{F'(z)}{F(z)}\right\} > 0.$$

Покажем теперь, что функция F является звездообразной в единичном круге $\mathbb{D}$ ([14], с. 507). Пусть

$$\zeta = L(z) = \frac{q-z}{1-qz}$$

и $\Phi(\zeta) = F\left(L^{-1}(\zeta)\right)$. Тогда функция Φ будет удовлетворять следующим условиям: $\Phi(0) = F(q) = 0$, $\Phi\,'(0) \neq 0$ и $\Phi(\zeta) \neq 0$ при $\zeta \in \mathbb{D}$. Кроме того,

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{\zeta\,\Phi'(\zeta)}{\Phi(\zeta)}\right\} = \operatorname{Re}\left\{\frac{L(z)\,F'(z)}{L\,'(z)\,F(z)}\right\} = \frac{1}{1-q^2}\operatorname{Re}\left\{(z-q)(1-qz)\,\frac{F'(z)}{F(z)}\right\} > 0$$

при $\zeta \in \mathbb{D}$. Таким образом, функция F является звездообразной в единичном круге $\mathbb{D}$, и это свойство функции F позволяет определить семейство $\{f^t\}_{t\geqslant 0}$:

$$f^t(z) = F^{-1}\left(e^{-t}\,F(z)\right) \quad \text{для всех} \quad t \geqslant 0.$$

Очевидно, отображение $t \mapsto f^t$ представляет собой однопараметрическую полугруппу, элементы которой являются голоморфными отображениями единичного круга $\mathbb{D}$ в себя, сохраняющими точку q. Кроме того, отображение $t \mapsto f^t$ является однопараметрической полугруппой в $\mathfrak{D}$. Действительно, инфинитезимальная образующая v однопараметрической полугруппы $t \mapsto f^t$ в терминах функции F записывается в виде

$$v(z) = \frac{\partial}{\partial t}\,F^{-1}\left(e^{-t}\,F(z)\right)\Big|_{t=0} = -\,\frac{F(z)}{F'(z)}.$$

Однако вычисления, проведенные выше, показывают, что

$$(z-q)(1-qz)\,\frac{F'(z)}{F(z)}=\gamma_1\,(1+q)^2\,\frac{1-z}{1+z}+\gamma_2\,(1-q)^2\,\frac{1+z}{1-z}+\rho\,(1-q^2)\,\gamma_3\,p(z),$$

где $\gamma_1,\gamma_2>0$, $\gamma_3\geqslant 0$, $\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3=1$, $\rho>0$, $p\in C_r$. Следовательно, инфинитезимальная образующая v соответствует виду (10). Это означает, что $t\mapsto f^t$ является однопараметрической полугруппой в $\mathfrak{D}$ с точкой Данжуа–Вольфа $q\in(-1,1)$, а F является ее функцией Кёнигса. $\square$

Доказательство теоремы 2. Пусть $f\in\mathfrak{D}$, $f(x)-x$ сохраняет знак для всех $x\in(-1,1)$ и существует однопараметрическая полугруппа $t\mapsto f^t$ в $\mathfrak{D}$ такая, что $f^1=f$.

Отметим сначала, что для любой функции $f\in\mathfrak{D}$, для которой выполняется условие $f(x)>x$ при всех $x\in(-1,1)$, точка $q=1$ является точкой Данжуа–Вольфа. Действительно, поскольку f монотонно возрастает на вещественном диаметре и выполняется неравенство $f(0)>0$, то $f^n(0)>0$, $n=2,3,\dots$. По теореме Данжуа–Вольфа это означает, что точка Данжуа–Вольфа $q>0$, а поскольку она не является внутренней точкой, то $q=1$. Аналогично, для любой функции $f\in\mathfrak{D}$, для которой $f(x)<x$ при всех $x\in(-1,1)$, точкой Данжуа–Вольфа является точка $q=-1$.

Таким образом, $t\mapsto f^t$ — однопараметрическая полугруппа в $\mathfrak{D}$ с точкой Данжуа–Вольфа $q=\sigma$, где $\sigma=\operatorname{sgn}(f(x)-x)$. Отметим также, что из определения класса функций $\mathfrak{D}$ следует, что для элементов f^t, $t\geqslant 0$, этой однопараметрической полугруппы точка $a=-\sigma$ является граничной неподвижной точкой, в которой функции f^t, $t\geqslant 0$, имеют конечные угловые производные.

В силу аналога формулы Берксона–Порты ([8], теорема 1, лемма 2), а также с учетом инвариантности вещественного диаметра при отображении функциями из $\mathfrak{D}$ инфинитезимальная образующая v рассматриваемой однопараметрической полугруппы имеет вид

$$v(z)=\frac{\alpha(\sigma-z)(1-\sigma_z)}{\frac{1-\sigma z}{1+\sigma z}+\delta p(z)},\tag{15}$$

где $\alpha>0$, $\delta\geqslant 0$ и функция $p\in C_r$.

Воспользуемся интегральным представлением (11) функций $p\in C_r$ и перепишем равенство (6), определяющее функцию Кёнигса K однопараметрической полугруппы $t\mapsto f^t$:

$$\begin{aligned}K'(z)&=\frac{1}{\alpha(\sigma-z)(1-\sigma z)}\left(\frac{1-\sigma z}{1+\sigma z}+\delta\int_{[-1,1]}\frac{1-z^2}{1-2xz+z^2}d\nu(x)\right)=\\&=\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\sigma}{1-z^2}+\delta\sigma\nu(\{\sigma\})\frac{1+\sigma z}{(1-\sigma z)^3}+\delta\int_{[-\sigma,\sigma)}\frac{1}{1-\sigma x}\left(\frac{1}{\sigma-z}+\frac{z-x}{1-2xz+z^2}\right)d\nu(x)\right),\end{aligned}$$

где ν — вероятностная мера на $[-1,1]$. Под $[a,b)$, если $a>b$, понимается $(b,a]$. Интегрирование этого равенства с учетом условия $K(0)=0$ приводит к представлению (8) функции Кёнигса

$$\begin{aligned}K(z)&=\frac{\sigma}{2\alpha}\ln\frac{1+z}{1-z}+\frac{\delta\sigma\nu(\{\sigma\})}{\alpha}\,\frac{z}{(1-\sigma z)^2}+\frac{\delta}{2\alpha}\int_{[-\sigma,\sigma)}\ln\frac{1-2xz+z^2}{(1-\sigma z)^2}\,\frac{d\nu(x)}{1-\sigma x}=\\&=\lambda_1\ln\frac{1+\sigma z}{1-\sigma z}+\lambda_2\frac{\sigma z}{(1-\sigma z)^2}+\lambda_3\int_{[-\sigma,\sigma)}\ln\frac{1-2xz+z^2}{(1-\sigma z)^2}\,\frac{d\mu(x)}{1-\sigma x},\end{aligned}$$

где $\lambda_1>0$, $\lambda_2,\lambda_3\geqslant 0$ и μ — вероятностная мера на $[-\sigma,\sigma)$. Под логарифмами понимаются ветви, обращающиеся в нуль при $z=0$. Сходимость интеграла в последнем равенстве обеспечивается тем, что

$$\lim_{x\to\sigma}\left(\frac{1}{1-\sigma x}\ln\frac{1-2xz+z^2}{(1-\sigma z)^2}\right)=\frac{2\sigma z}{(\sigma-z)^2}.$$

Обратно, пусть для некоторых $\lambda_1>0$, $\lambda_2,\lambda_3\geqslant 0$ и вероятностной меры μ на $[-\sigma,\sigma)$, где $\sigma=1$ или -1, определена функция K по формуле (8). Тогда

$$K'(z)=2\lambda_1\frac{\sigma}{1-z^2}+\lambda_2\frac{\sigma+z}{(1-\sigma z)^3}+2\lambda_3\int_{[-\sigma,\sigma)}\frac{\sigma+z}{(1-2xz+z^2)(1-\sigma z)}d\mu(x)=\frac{g(z)}{\sigma(1-\sigma z)^2},$$

где

$$g(z)=2\lambda_1\frac{1-\sigma z}{1+\sigma z}+\lambda_2\frac{1+\sigma z}{1-\sigma z}+2\lambda_3\int_{[-\sigma,\sigma)}\frac{1-z^2}{1-2xz+z^2}d\mu(x).$$

Так как $\operatorname{Re}g(z)>0$ при $z\in\mathbb{D}$, то K является близкой к выпуклой функцией и, следовательно, однолистной в $\mathbb{D}$. Для исследования геометрии образа $K(\mathbb{D})$ единичного круга $\mathbb{D}$ изучим свойства образов орициклов

$$H_\varrho(\sigma)=\left\{z\in\mathbb{D}:\operatorname{Re}\frac{1+\sigma z}{1-\sigma z}>\frac{1}{\varrho}\right\},$$

$\varrho>0$, при отображении их посредством K.

Пусть $z=z(s)$, $-\infty<s<\infty$, — параметризация границы $\partial H_\varrho(\sigma)$ орицикла $H_\varrho(\sigma)$ такая, что при возрастании параметра s точка $z(s)$ движется по $\partial H_\varrho(\sigma)$ в положительном направлении, т. е. орицикл $H_\varrho(\sigma)$ остается слева. При этом

$$\operatorname{Im}\frac{1+\sigma z(s)}{1-\sigma z(s)}$$

будет строго монотонно убывать по s и

$$\frac{d}{ds}\operatorname{Im}\frac{1+\sigma z(s)}{1-\sigma z(s)}=\operatorname{Im}\frac{2\sigma z'(s)}{(1-\sigma z(s))^2}<0.$$

Кроме того, дифференцируя по s равенство $\operatorname{Re}\frac{1+\sigma z(s)}{1-\sigma z(s)}=\frac{1}{\varrho}$, получаем $\operatorname{Re}\frac{\sigma z'(s)}{(1-\sigma z(s))^2}=0$. Таким образом, при всех s, $-\infty<s<\infty$, выражение $\frac{\sigma z'(s)}{(1-\sigma z(s))^2}$ принимает значения на отрицательной части мнимой оси. Но тогда

$$\frac{d}{ds}\operatorname{Im}K\left(z(s)\right)=\operatorname{Im}\left\{K'\left(z(s)\right)\,z'(s)\right\}=\operatorname{Im}\left\{\frac{z'(s)\,g\left(z(s)\right)}{\sigma(1-\sigma z(s))^2}\right\}<0.$$

Это означает, что образ $K\left(H_\varrho(\sigma)\right)$ орицикла $H_\varrho(\sigma)$ представляет собой область, которая с каждой точкой w содержит и весь луч $\{w+t:t\geqslant 0\}$. Это свойство распространяется и на весь образ $K(\mathbb{D})$ единичного круга. Следовательно, при каждом $t>0$ корректно определены функции

$$f^t(z)=K^{-1}\left(K(z)+t\right).$$

Отображение $t\mapsto f^t$ представляет собой однопараметрическую полугруппу, элементы которой являются голоморфными отображениями единичного круга $\mathbb{D}$ в себя. Действительно, условия (i), (iii) определения 1 однопараметрической полугруппы выполнены и, кроме того, для любых $s,t\geqslant 0$ имеем

$$f^{t+s}(z)=K^{-1}\left(K(z)+t+s\right)=K^{-1}\left(K\circ K^{-1}\left(K(z)+s\right)+t\right)=f^t\circ f^s(z).$$

Инфинитезимальная образующая v однопараметрической полугруппы $t \mapsto f^t$ в терминах функции K записывается в виде

$$v(z) = \frac{\partial}{\partial t} \left(K^{-1}\left(K(z)+t\right)\right)\Big|_{t=0} = \frac{1}{K'(z)}.$$

Таким образом, вычисления, проведенные выше, показывают, что инфинитезимальная образующая v соответствует виду (15), а это означает, что $t \mapsto f^t$ является однопараметрической полугруппой в $\mathfrak{D}$ с точкой Данжуа–Вольфа $q = \sigma$. $\square$

Автор выражает искреннюю благодарность профессору В.В. Горяйнову за полезные замечания и обсуждение результатов работы.

Литература

[1] Schröeder E. *Über iterierte Funktionen*, Math. Ann. **3** (2), 296–322 (1871).
[2] Königs G. *Recherches sur les intégrales des certaines equations fonctionelle*, Ann. Ecole Norm. Sup. **1** (3), 3–41 (1884).
[3] Baker I.N. *Fractional iteration near a fixpoint of multiplier* 1, J. Australian Math. Soc. **4** (2), 143–148 (1964).
[4] Karlin S., McGregor J. *Embedding iterates of analytic functions with two fixed points into continuous groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **132** (1), 137–145 (1968).
[5] Berkson E., Porta H. *Semigroups of analytic functions and composition operators*, Michigan Math. J. **25** (1), 101–115 (1978).
[6] Cowen C.C. *Iteration and the solution of functional equations for functions analytic in the unit disk*, Trans. Amer. Math. Soc. **265** (1), 69–95 (1981).
[7] Горяйнов В.В. *Дробные итерации аналитических в единичном круге функций с заданными неподвижными точками*, Матем. сб. **182** (9), 1281–1299 (1991).
[8] Горяйнов В.В., Кудрявцева О.С. *Однопараметрические полугруппы аналитических функций, неподвижные точки и функция Кёнигса*, Матем. сб. **202** (7), 43–74 (2011).
[9] Горяйнов В.В. *Полугруппы аналитических функций в анализе и приложениях*, УМН **67** (6), 5–52 (2012).
[10] Кудрявцева О.С. *Функция Кёнигса и дробное итерирование аналитических в единичном круге функций с вещественными коэффициентами и неподвижными точками*, Изв. Сарат. гос. ун-та. Сер. Матем. Механ. Информ. **13** (1), 67–71 (2013).
[11] Contreras M.D., Díaz-Madrigal S., Pommerenke Ch. *Fixed points and boundary behaviour of the Koenigs function*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **29** (2), 471–488 (2004).
[12] Валирон Ж. *Аналитические функции* (ГИТТЛ, М., 1957).
[13] Ahlfors L.V. *Conformal invariants*: *topics in geometric function theory* (McGraw-Hill Book Company, New York, 1973).
[14] Голузин Г.М. *Геометрическая теория функций комплексного переменного* (Наука, М., 1966).
[15] Крейн М.Г., Нудельман А.А. *Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи* (Наука, М., 1973).

О.С. Кудрявцева

доцент, кафедра прикладной математики и информатики,
Волжский гуманитарный институт (филиал) Волгоградского государственного университета,
ул. 40 лет Победы, д. 11, г. Волжский, Волгоградская обл., 404133, Россия,

e-mail: Kudryavceva@vgi.volsu.ru

O.S. Kudryavtseva

Holomorphic maps of the disk into itself with invariant diameter and bounded distortion

Abstract. We consider a problem of embeddability of holomorphic map of the unit disk into itself with invariant diameter and bounded distortion into one-parameter semigroup. Here we require that the elements of one-parameter semigroup have the same properties as the original map does. We obtain embeddability criteria, the solution is given in terms of the Königs function.

Keywords: one-parameter semigroup, fractional iterates, infinitesimal generator, Königs function, fixed points.

O.S. Kudryavtseva

Associate Professor, Chair of Applied Mathematics and Information Science,
Volzhskii Institute of Humanities (Affiliation),
Volgograd State University,
11 Sorok Let Pobedy str., Volzhskii, Volgograd oblast, 404133 Russia,

`e-mail:` Kudryavceva@vgi.volsu.ru