Известия вузов. Математика *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
2008, № 9, с. 11–18 *e-mail: izvuz.matem@ksu.ru*

А.Ф. ГАЛИМЯНОВ, Д.Э. САЙФУЛЛИНА

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБОБЩЕННОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА ПЕРВОГО РОДА

Аннотация. Работа посвящена точным и приближенным методам (в первую очередь, прямым методам) решения интегро-операторного уравнения. При этом значительное внимание уделено теоретическому обоснованию метода коллокации решения указанного уравнения в смысле общей теории приближенных методов Л.В. Канторовича.

Ключевые слова: интегро-операторное уравнение, пространство вектор-функций, метод коллокации, итерационный метод.

УДК: 517.648 : 519.642

Abstract. This paper is dedicated to exact and approximate methods (first of all, direct ones) for the solution of integro-operational equations. The most attention is paid to the theoretical substantiation of the collocation method for the solution of the mentioned equation within the general theory of approximate methods developed by L.V. Kantorovich.

Keywords: integro-operational equation, space of vector-valued functions, collocation method, iterative method.

Данная работа посвящена точным и приближенным методам (в первую очередь, прямым методам) решения интегро-операторного уравнения

$$A\overline{\varphi} \equiv \gamma + \int_0^t \varphi(\tau)\,d\tau + T(\varphi;t) = f(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{0.1}$$

Здесь γ — искомый параметр, $\varphi(t)$ — искомая функция, $f(t)$ —данная непрерывная функция, T — данный линейный (в том числе, интегральный) оператор, а $\overline{\varphi} = (\gamma, \varphi)$ — искомая вектор–функция.

1. О существовании и единственности решения

Введем необходимые для дальнейшего изложения обозначения: $\mathbb{R}$ — множество всех вещественных чисел; $C = C[0,1]$ — пространство всех непрерывных на $[0,1]$ функций с обычной нормой

$$\|\varphi\|_C = \max_{0\leqslant t\leqslant 1} |\varphi(t)|, \quad \varphi \in C;$$

$\overline{C} = \{\overline{\varphi}\}$ — пространство вектор–функций $\overline{\varphi} = (\gamma, \varphi)$, где $\gamma \in \mathbb{R}$, $\varphi \in C$, с нормой

$$\|\overline{\varphi}\| = |\gamma| + \|\varphi\|_C \quad (\gamma \in \mathbb{R},\ \varphi \in C);$$

Поступила 27.10.2006

$C^1 = C^1[0,1]$ — пространство всех непрерывно дифференцируемых на $[0,1]$ функций с нормой

$$\|f\|_{C^1} = |f(0)| + \max_{0\leqslant t\leqslant 1} |f'(t)|, \quad f \in C^1.$$

Заметим,что пространства C и C^1 с указанными в них нормами являются полными линейными нормированными, т.е. B-пространствами.

Теорема 1. *Пусть $T : \overline{C} \to C^1$ — вполне непрерывный оператор, а однородное уравнение*

$$A\overline{\varphi} = 0, \quad \overline{\varphi} \in \overline{C}, \tag{1.1}$$

соответствующее уравнению (0.1)*, имеет в пространстве $\overline{C}$ лишь тривиальное решение $\overline{\varphi} = 0 \Leftrightarrow \varphi = 0,\ \gamma = 0$.*
Тогда оператор $A : \overline{C} \to C^1$ непрерывно обратим, а следовательно, уравнение (0.1) *имеет единственное решение $\overline{\varphi}^* = (\gamma^*, \varphi^*) \in \overline{C}$, где $\gamma^* \in \mathbb{R}$, $\varphi^* \in C$, при любой правой части $f \in C^1$.*

Доказательство. Рассмотрим вспомогательное уравнение

$$G\overline{\varphi} \equiv \gamma + \int_0^t \varphi(\tau)\, d\tau = f(t), \quad \overline{\varphi} = (\gamma, \varphi) \in \overline{C}, \quad f \in C^1. \tag{1.2}$$

Покажем, что оператор $G : \overline{C} \to C^1$ непрерывно обратим и

$$\|G\|_{\overline{C}\to C^1} = \|G^{-1}\|_{C^1\to\overline{C}} = 1. \tag{1.3}$$

Ясно, что для любой $\overline{\varphi} \in \overline{C}$ в силу (1.2) имеем

$$\|G\overline{\varphi}\|_{C^1} = |G(\overline{\varphi}; 0)| + \left\| \frac{d}{dt} G(\overline{\varphi}; t) \right\|_C = |\gamma| + \|\varphi(t)\|_C = \|\overline{\varphi}\|_{\overline{C}}. \tag{1.4}$$

Отсюда получаем

$$\|G\|_{\overline{C}\to C^1} = 1. \tag{1.5}$$

Для любой функции $f \in C^1$ из (1.2) находим $\gamma = f(0) \equiv \gamma*$, $\varphi(t) = f'(t) \equiv \varphi^*(t)$, т.е. оператор $G : \overline{C} \to C^1$ линейно обратим и

$$G^{-1}f = \overline{\varphi}^* = (\gamma^*, \varphi^*) = (f(0), f'(t)).$$

Поэтому для любой $f \in C^1$ имеем

$$\|G^{-1}f\|_{\overline{C}} = \|\overline{\varphi}^*(t)\|_{\cdot} = |f(0)| + \|f'(t)\|_C = \|f\|_{C^1}.$$

Отсюда

$$\|G^{-1}\|_{C^1\to\overline{C}} = 1. \tag{1.6}$$

Из (1.4) и (1.5) следуют соотношения (1.3).

Запишем уравнение (0.1) в эквивалентном операторном виде

$$A\overline{\varphi} \equiv G\overline{\varphi} + T\varphi = f \quad \left(\overline{\varphi} \in \overline{C},\ \ \varphi \in C,\ \ f \in C^1\right). \tag{1.7}$$

Ясно, что в силу (1.3) уравнение (1.7) эквивалентно операторному уравнению вида

$$K\overline{\varphi} \equiv \overline{\varphi} + G^{-1}T\varphi = G^{-1}f \quad (\overline{\varphi},\ \ G^{-1}f \in \overline{C},\ \ \varphi \in C). \tag{1.8}$$

В силу (1.3) и условия теоремы оператор $G^{-1}T : \overline{C} \to \overline{C}$ является вполне непрерывным, а следовательно, (1.7) является приводящимся к уравнению Фредгольма второго рода в B-пространстве $\overline{C}$. Отсюда и из известного результата С.М. Никольского (напр., [1], гл. 13, § 5) следует требуемое утверждение. □

Теорема 2. *Пусть*

$$q \equiv \|T\|_{C \to C^1} < 1. \tag{1.9}$$

Тогда уравнение (0.1) *имеет единственное решение* $\overline{\varphi}^* = (\gamma^*; \varphi^*) \in \overline{C}$, *где* $\gamma^* \in \mathbb{R}$, $\varphi^* \in C$, *при любой правой части* $f \in C^1$, *причем*

$$\|\overline{\varphi}^*\|_{\overline{C}} = |\gamma^*| + \|\varphi^*\|_C \leqslant \frac{|f(0)| + \|f'(t)\|_C}{1-q} = \frac{\|f\|_{C^1}}{1-q}.$$

Следствие. В условиях теоремы 2 оператор $A : \overline{C} \to C^1$ имеет непрерывный линейный обратный и

$$\|A^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1-q}, \quad A^{-1} : C^1 \to \overline{C}.$$

Доказательство. Поскольку уравнение (0.1) эквивалентно уравнению (1.8), а в силу (1.3) и (1.9) имеем

$$\|G^{-1}T\|_{\overline{C} \to \overline{C}} \leqslant q < 1,$$

утверждение теоремы следует из известного принципа сжатых отображений в B-пространствах. □

Теорема 3. *В условиях теоремы* 2 *единственное решение* $\overline{\varphi}^* = (\gamma^*, \varphi^*) \in \overline{C}$ *уравнения* (0.1) *можно найти итерационным методом*

$$\gamma^i + \int_0^t \varphi^i(\tau)\, d\tau = f(t) - T(\varphi^{i-1}; t), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{1.10}$$

при любом начальном приближении $\overline{\varphi}^0 = (\gamma^0, \varphi^0) \in \overline{C}$, *где* $\gamma^0 \in \mathbb{R}$, $\varphi^0 \in C$. *Метод* (1.10) *сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем* $q < 1$. *В частности, если начальное приближение выбирается по формуле* $\overline{\varphi}^0 = G^{-1}f = (f(0), f'(t))$, *то погрешность* i*-го приближения* $\overline{\varphi}^* - \overline{\varphi}^i$ *может быть оценена неравенствами*

$$\|\overline{\varphi}^* - \overline{\varphi}^i\|_{\overline{C}} \equiv |\gamma^* - \gamma^i| + \|\varphi^*(t) - \varphi^i(t)\|_C \leqslant$$
$$\leqslant \frac{q^{i+1}}{1-q}\{|f(0)| + \|f'(t)\|_C\} \equiv \frac{q^{i+1}\|f\|_{C^1}}{1-q}, \quad i = 1, 2, \ldots \tag{1.11}$$

Доказательство. В силу (1.3) метод (1.10) эквивалентен методу

$$\overline{\varphi}^i = G^{-1}f - G^{-1}T\varphi^{i-1} \quad (i = 1, 2, \ldots). \tag{1.12}$$

В свою очередь, (1.12) является методом простой итерации для операторного уравнения второго рода (1.8), эквивалентного исходному уравнению (0.1). Поэтому в силу соотношений (1.9) и (1.3) требуемое утверждение следует из известных результатов (см., напр., [1], с. 213–214) по линейным итерационным методам. □

2. Об устойчивости решения

Уравнению (0.1) поставим в соответствие интегро-операторное уравнение вида

$$A_\varepsilon \overline{\varphi} \equiv \gamma + \int_0^t \varphi(\tau)\, d\tau + T_\varepsilon(\varphi; t) = f_\varepsilon(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \quad \varepsilon > 0, \tag{2.1}$$

где f_ε и T_ε — некоторые аппроксимации элементов уравнения (0.1): правой части уравнения $f(t)$ и оператора T соответственно.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия*

а) *оператор* $A : \overline{C} \to C^1$ *непрерывно обратим*;

б) $\|T - T_\varepsilon\|_{C\to C^1} \leqslant \varepsilon$.

Тогда существует $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}^+$ *такое, что при всех* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *уравнение* (2.1) *имеет единственное решение*

$$\varphi_\varepsilon = (\gamma_\varepsilon,\, \varphi_\varepsilon) \in \overline{C} \quad (\gamma_\varepsilon \in \mathbb{R}, \quad \varphi_\varepsilon \in C)$$

при любых $f_\varepsilon \in C^1$, *причем*

$$\|\overline{\varphi}_\varepsilon\|_{\overline{C}} = \mathcal{O}(\|\overline{\varphi}^*\|_{\overline{C}}), \quad \varepsilon \to +0.$$

Если, кроме того, выполнено условие

в) $\|f - f_\varepsilon\|_{C^1} \leqslant \varepsilon$,

то приближенные решения $\overline{\varphi}_\varepsilon(t)$ *сходятся к точному решению* $\overline{\varphi}^*(t)$ *в пространстве* $\overline{C}$ *со скоростью*

$$\|\overline{\varphi}^* - \overline{\varphi}_\varepsilon\|_{\overline{C}} = \mathcal{O}(\varepsilon), \quad \varepsilon \to +0. \tag{2.2}$$

При всех $\varepsilon > 0$ *таких, что*

$$p_\varepsilon = \varepsilon\|A^{-1}\|_{C^1\to\overline{C}} < 1, \tag{2.3}$$

справедлива оценка погрешности

$$\|\overline{\varphi}^* - \overline{\varphi}_\varepsilon\|_{\overline{C}} \leqslant \frac{p_\varepsilon}{1-p_\varepsilon}\{1 + \|A^{-1}\|\,\|f\|_{C^1}\} = \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Доказательство. В силу условия б) теоремы для любой $\overline{\varphi} = (\gamma,\, \varphi) \in \overline{C}$ имеем

$$\|A\overline{\varphi} - A_\varepsilon\overline{\varphi}\|_{C^1} = \|T\varphi - T_\varepsilon\varphi\|_{C^1} \leqslant \varepsilon\|\varphi\|_C \leqslant \varepsilon\|\overline{\varphi}\|_{\overline{C}}, \quad \overline{\varphi} = (\gamma, \varphi) \in \overline{C}.$$

Поэтому

$$\|A - A_\varepsilon\|_{\overline{C}\to C^1} \leqslant \varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \tag{2.4}$$

Обозначим через $\varepsilon_0 > 0$ наибольшее из решений неравенства $p_\varepsilon < 1$. Тогда в силу (2.3), (2.4), (2.1) и (1.8) из теоремы функционального анализа об обратимости оператора, близкого к обратимому оператору (напр., [1], с. 211–212) выводится первая часть утверждения теоремы с оценкой (2.2). Для получения второго утверждения теоремы достаточно воспользоваться методом доказательства теорем 5 и 7 ([1], гл. 1). $\square$

3. Метод коллокации

Поскольку уравнение (0.1), как правило, точно не решается, то желательно разработать приближенные методы его решения с соответствующим теоретическим обоснованием. Ниже для этой цели предлагается использовать коллокационный метод при специальном выборе узлов коллокации.

Приближенное решение уравнения (0.1) будем искать в виде вектор-функции

$$\overline{\varphi}_n(t) = (\gamma_n,\, \varphi_n(t)) \in \overline{C}, \tag{3.1}$$

где

$$\gamma_n \in \mathbb{R} \quad \text{и} \quad \varphi_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k t^{k-1}, \quad \alpha_k \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.2}$$

Неизвестные коэффициенты $\gamma_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ будем определять из условий

$$A(\overline{\varphi}_n;\, t_j) = f(t_j), \quad j = \overline{0, n}, \tag{3.3}$$

где $\{t_j\}_0^n$ — некоторая система узлов из [0, 1].

Условия (3.3) эквивалентны следующей системе линейных алгебраических уравнений (кратко СЛАУ):

$$\gamma_n + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{k}\, t_j^k + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k T(t^{k-1};\, t_j) = f(t_j), \quad j = \overline{0, n}. \tag{3.4}$$

Для вычислительной схемы (0.1), (3.1)–(3.4) справедлива

Теорема 5. *Пусть выполнены условия*

а) *уравнение* (0.1) *имеет единственное решение* $\overline{\varphi}^* = (\gamma^*, \varphi*) \in \overline{C}$ *при любой правой части* $f \in C^1$;

б) *узлы коллокации выбраны по формуле*

$$t_j = \cos^2 \frac{j\pi}{2n}, \quad j = \overline{0, n}; \tag{3.5}$$

в) *существуют производные*

$$\frac{d}{dt} T(\varphi;\, t) \in \mathrm{Lip}_M\, \alpha, \quad \varphi \in C, \quad M = M_0 \|\varphi\|_C,$$

где M_0 *— положительная постоянная, не зависящая от* φ, *и*

$$\frac{d}{dt} f(t) \in \mathrm{Lip}_{\,M_1}\, \alpha, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \quad 0 < \alpha \leqslant 1,$$

а M_1 *— положительная постоянная.*

Тогда при всех $n \geqslant n_0$ (*число* $n_0 \in \mathbb{N}$ *определяется сглаживающими свойствами оператора* $T : C \to C^1$) *СЛАУ* (3.4), (3.5) *имеет единственное решение* $\gamma_n^*, \alpha_1^*, \ldots,\, \alpha_n^* \in \mathbb{R}$. *Приближенные решения*

$$\overline{\varphi}_n^*(t) = (\gamma_n^*,\, \varphi_n^*(t)) \in \overline{C},$$

где

$$\varphi_n^*(t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^*\, t^{k-1}, \quad \gamma_n^* \in \mathbb{R},$$

сходятся при $n \to \infty$ *к точному решению* $\overline{\varphi}^* = (\gamma^*, \varphi^*) \in \overline{C}$ *уравнения* (0.1) *в пространстве* $\overline{C}$ *со скоростью*

$$\|\overline{\varphi}^* - \overline{\varphi}_n^*\|_{\overline{C}} = \mathcal{O}\bigg(\frac{\ln n}{n^\alpha}\bigg), \quad 0 < \alpha \leqslant 1.$$

Доказательство. Обозначим через $\mathbb{H}_m$ множество всех алгебраических многочленов степени не выше m, где $m + 1 \in \mathbb{N}$. Положим

$$X_n = \mathbb{H}_{n-1} \bigcap C, \quad Y_n = \mathbb{H}_n \bigcap C^1,$$

$$\overline{X}_n = \{\overline{x}_n\}, \quad \overline{x}_n = (\gamma_n,\, x_n), \quad \gamma_n \in \mathbb{R}, \quad x_n \in \mathbb{H}_{n-1}.$$

Очевидно, $\overline{X}_n \subset \overline{C}$, $Y_n \subset C^1$ и $\dim \overline{X}_n = \dim Y_n = n + 1 < \infty$.

Введем оператор проектирования $\mathcal{L}_n : C^1 \to Y_n$ по формуле

$$\mathcal{L}_n(f;\, t) = \sum_{j=0}^{n} f(t_j)\, l_j(t), \quad f \in C^1,$$

где $l_j(t)$ — фундаментальные многочлены Лагранжа по узлам (3.5). Поэтому в силу (3.3) СЛАУ (3.4) эквивалентна операторному уравнению

$$A_n \overline{\varphi}_n \equiv \mathcal{L}_n A \overline{\varphi}_n = \mathcal{L}_n f \quad (\overline{\varphi}_n \in \overline{X}_n,\ \mathcal{L}_n f \in Y_n). \tag{3.6}$$

Поскольку $\mathcal{L}_n^2 = \mathcal{L}_n$ и $\mathcal{L}_n\mathbb{H}_n = \mathbb{H}_n$, $G\overline{X}_n \subset \mathbb{H}_n$, уравнение (3.6) эквивалентно операторному уравнению вида

$$A_n\overline{\varphi}_n \equiv G\overline{\varphi}_n + \mathcal{L}_nT\varphi_n = \mathcal{L}_nf \quad (\overline{\varphi}_n \in \overline{X}_n, \quad \varphi_n \in X_n, \quad \mathcal{L}_nf \in Y_n). \tag{3.7}$$

Докажем близость уравнений (1.7) и (3.7) в смысле теорем 7 и 14 ([2], гл. 1). Для правых частей указанных уравнений имеем

$$\delta_n \equiv \|f(t) - \mathcal{L}_n(f;t)\|_{C^1} = |f(0) - \mathcal{L}_n(f;0)| + \left\|\frac{d}{dt}[\,f(t) - \mathcal{L}_n(f;t)]\right\|_C. \tag{3.8}$$

Из (3.5) видно, что $t_n = 0$ является одним из узлов коллокации исследуемого метода; поэтому $f(0) = \mathcal{L}_n(f;0)$. Тогда формула (3.8) принимает вид

$$\delta_n \equiv \|f(t) - \mathcal{L}_n(f;t)\|_{C^1} = \left\|\frac{d}{dt}[\,f(t) - \mathcal{L}_n(f;t)]\right\|_C.$$

Отсюда в силу условия в) теоремы из основного результата работы [3] находим

$$\delta_n \equiv \|f(t) - \mathcal{L}_n(f;t)\|_{C^1} \leqslant (c_1\ln n)E_{n-1}(f')_C, \quad n-1 \in \mathbb{N}, \tag{3.9}$$

где $E_m(\psi)$ — наилучшее равномерное приближение функции $\psi \in C$ алгебраическими полиномами степени не выше m, а c_k $(k = 1, 2, \dots)$ — здесь и далее вполне определенные положительные постоянные, не зависящие от $n \in \mathbb{N}$ и $f \in C^1$. Поскольку $f' \in \mathrm{Lip}_{M_1}\alpha$, то в силу условия в) доказываемой теоремы и первого следствия первой теоремы Джексона в непериодическом случае (напр., [4], ч. 1, гл. 6, § 2) имеем оценку

$$E_{n-1}(f')_C \leqslant M_1c_2\frac{1}{n^\alpha}, \quad 0 < \alpha \leqslant 1, \quad n-1 \in \mathbb{N}. \tag{3.10}$$

Из (3.9) и (3.10) для правых частей уравнений (1.7) и (3.7) следует оценка

$$\delta_n \equiv \|f(t) - \mathcal{L}_nf\|_{C^1} \leqslant M_1c_1c_2\frac{1}{n^\alpha}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.11}$$

Теперь докажем близость операторов A и A_n в пространстве $\overline{X}_n$. Для любого $\overline{\varphi}_n \in \overline{X}_n$, где $\overline{\varphi}_n = (\gamma_n, \varphi_n)$, а $\gamma_n \in \mathbb{R}$, $\varphi_n \in X_n$, из уравнений (1.7) и (3.7) находим

$$\begin{aligned}\|A\overline{\varphi}_n - A_n\overline{\varphi}_n\|_{C^1} &= \|(G\overline{\varphi}_n + T\overline{\varphi}_n) - (G\overline{\varphi}_n + \mathcal{L}_nT\overline{\varphi}_n)\|_{C^1} = \|T\overline{\varphi}_n - \mathcal{L}_nT\overline{\varphi}_n\|_{C^1} = \\ &= |\,T(\varphi_n;\,0) - (\mathcal{L}_nT)(\varphi_n;\,0)| + \left\|\frac{d}{dt}[T(\varphi_n;\,t) - (\mathcal{L}_nT)(\varphi_n;\,t)]\right\|_C.\end{aligned} \tag{3.12}$$

Так как $(\mathcal{L}_nT)(\varphi_n;\,0) = (T\varphi_n)(0)$, (3.12) принимает вид

$$\|A\overline{\varphi}_n - A_n\overline{\varphi}_n\|_{C^1} = \left\|\frac{d}{dt}[T(\varphi_n;\,t) - (\mathcal{L}_nT)(\varphi_n;\,t)]\right\|_C, \tag{3.13}$$

где $\overline{\varphi}_n(\gamma_n, \varphi_n) \in \overline{X}_n$, $\gamma_n \in \mathbb{R}$, $\varphi_n \in X_n$.

В силу (3.9)–(3.11), (3.13) и условия в) теоремы для любого $\overline{\varphi}_n \in \overline{X}_n$ получаем оценку

$$\|A\overline{\varphi}_n - A_n\overline{\varphi}_n\|_{C^1} \leqslant Mc_1c_2\frac{\ln n}{n^\alpha} \leqslant M_0c_1c_2\frac{\ln n}{n^\alpha}\|\varphi_n\|_C \leqslant M_0c_1c_2\frac{\ln n}{n^\alpha}\|\overline{\varphi}_n\|_{\overline{C}}, \quad n-1 \in \mathbb{N}.$$

Поэтому

$$\varepsilon_n \equiv \|A - A_n\|_{\overline{X}\to C^1} \leqslant M_0c_1c_2\frac{\ln n}{n^\alpha} \equiv \frac{c_3\ln n}{n^\alpha}, \quad 0 < \alpha \leqslant 1, \quad n-1 \in \mathbb{N}.$$

С помощью известной теоремы Арцела и условия в) теоремы можно показать, что оператор $T : C \to C^1$ является вполне непрерывным. Отсюда с учетом условия а) теоремы из доказанной выше теоремы 1 следует, что оператор $A : \overline{C} \to C^1$ непрерывно обратим.

Поэтому в силу (3.11) выполнены все условия теоремы 7 ([2], гл. 1), откуда следуют такие утверждения:

1) для всех $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих неравенствам

$$q_n = \|A^{-1}\|_{C^1 \to \overline{C}} \cdot \|A - A_n\|_{\overline{C} \to C^1} \leqslant \varepsilon_n \|A^{-1}\|_{C^1 \to \overline{C}} \leqslant c_3 \frac{\ln n}{n^\alpha} < 1,$$

операторное уравнение (3.7) (а следовательно, эквивалентная ему СЛАУ (3.4)–(3.5)) имеет единственное решение $\overline{\varphi}_n^* = (\gamma_n^*, \varphi_n^*) \in \overline{X}_n$, $\gamma_n^* \in \mathbb{R}$, $\varphi_n^* \in X_n$;

2) операторы $A_n : \overline{X}_n \to Y_n$ обратимы, а обратные операторы ограничены по норме в совокупности

$$\|A_n^{-1}\|_{Y_n \to \overline{X}_n} \leqslant c_4 < \infty; \tag{3.14}$$

3) приближенные решения $\overline{\varphi}_n^* = A_n^{-1} \mathcal{L}_n f$ при $n \to \infty$ сходятся к точному решению $\overline{\varphi}^* = (\gamma^*, \varphi^*)$, где $\gamma^* \in \mathbb{R}$, $\varphi^* \in C$, со скоростью

$$\|\overline{\varphi}^* - \overline{\varphi}_n^*\|_{\overline{C}} = |\gamma^* - \gamma_n^*| + \left\| \frac{d}{dt}[\varphi^*(t) - \varphi_n^*(t)] \right\|_C = \mathcal{O}(\varepsilon_n + \delta_n) = \mathcal{O}\left(\frac{\ln n}{n^\alpha}\right), \quad 0 < \alpha \leqslant 1. \qquad \square$$

Скорость сходимости метода коллокации устанавливает

Теорема 6. *Пусть функция* $f \in C^1$ *и оператор* $T : C \to C^1$ *таковы, что решение* $\overline{\varphi}^* = (\gamma^*, \varphi^*)$ *уравнения* (0.1) *удовлетворяет условию*

$$\varphi^* \in W^r H^\alpha \quad (r \in \mathbb{N}, \quad 0 < \alpha \leqslant 1).$$

Тогда в условиях теоремы 5 *метод коллокации* (0.1), (3.1)–(3.5) *сходится со скоростью*

$$\|\overline{\varphi}^* - \overline{\varphi}_n^*\|_{\overline{C}} = |\gamma^* - \gamma_n^*| + \left\| \frac{d}{dt}[\varphi^*(t) - \varphi_n^*(t)] \right\|_C = \mathcal{O}\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha}}\right), \quad r + \alpha > 0. \tag{3.15}$$

Доказательство. Применив к уравнениям (1.7) и (3.7) теорему 14 ([2], гл. 1), находим

$$\begin{aligned} \|\overline{\varphi}^* - \overline{\varphi}_n^*\|_{\overline{C}} &= \|(E - A_n^{-1} \mathcal{L}_n T)\, G^{-1} (G\varphi^* - \mathcal{L}_n G \varphi^*)\|_{\overline{C}} \leqslant \\ &\leqslant \|E - A_n^{-1} \mathcal{L}_n T\|_{\overline{C} \to \overline{C}} \cdot \|G^{-1}\|_{C^1 \to \overline{C}}\, \|G\varphi^* - \mathcal{L}_n G \varphi^*\|_{C^1} \leqslant \\ &\leqslant \{1 + \|A_n^{-1}\|_{Y_n \to \overline{X}_n} \|\mathcal{L}_n T\|_{\overline{C} \to C^1}\} \cdot \|G^{-1}\|_{C^1 \to \overline{C}} \cdot \|G\overline{\varphi}^* - \mathcal{L}_n G \overline{\varphi}^*\|_{C^1}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

В ходе доказательства теоремы 5 по существу было показано, что

$$\|\mathcal{L}_n T\|_{\overline{C} \to C^1} = \mathcal{O}(1), \quad n \to \infty. \tag{3.17}$$

Из соотношений (3.14), (3.16), (3.17) и (1.3) находим оценку

$$|\overline{\varphi}^* - \overline{\varphi}_n^*\|_{\overline{C}} = \mathcal{O}(\|G\overline{\varphi}^* - \mathcal{L}_n G \overline{\varphi}^*\|_{C^1}). \tag{3.18}$$

Поскольку $G\overline{\varphi}^* \equiv \gamma^* + \int\limits_0^t \varphi^*(\tau)\, d\tau$ и $\mathcal{L}_n^2 = \mathcal{L}_n$, имеем

$$\|G\overline{\varphi}^* - \mathcal{L}_n G \overline{\varphi}^*\|_{C^1} = \left\| \int_0^t \varphi^*(\tau)\, d\tau - \mathcal{L}_n \int_0^t \varphi^*(\tau)\, d\tau \right\|_{C^1} = \left\| \frac{d}{dt} \left[\int_0^t \varphi^*(\tau)\, d\tau - \mathcal{L}_n \int_0^t \varphi^*(\tau)\, d\tau \right] \right\|_C.$$

Отсюда с помощью (3.9) находим оценку

$$\|G\overline{\varphi}^* - \mathcal{L}_n G \overline{\varphi}^*\|_{C^1} \leqslant (c_1 \ln n) E_{n-1}(\varphi^*)_C, \quad n - 1 \in \mathbb{N}. \tag{3.19}$$

Применяя к правой части (3.19) первое следствие второй теоремы Джексона в алгебраическом случае (напр., [4], ч. 1, гл. 6, § 2), с учетом условия теоремы $\varphi^* \in W^r H^\alpha$ получаем оценку

$$\|G\overline{\varphi}^* - \mathcal{L}_n G \overline{\varphi}^*\|_{C^1} = \mathcal{O}\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha}}\right). \tag{3.20}$$

Из соотношений (3.18) и (3.20) следует требуемая оценка (3.15). □

Замечание 1. В ходе доказательства теорем 5 и 6 показано, что погрешность исследуемого метода может быть оценена с помощью формулы

$$\|\overline{\varphi}^* - \overline{\varphi}_n^*\|_{\overline{C}} = \mathcal{O}\{E_{n-1}(\varphi^*)_C \ln n\}. \tag{3.21}$$

Оценка (3.21), записанная в универсальных терминах теории приближения функций, может быть применена и в других классах функций $\{\varphi^*\} \subset C$, отличных от использованного выше. Однако эта оценка в случае другого, отличного от (3.5), выбора узлов не справедлива.

Замечание 2. С помощью результатов работ [2], [5]–[7] можно доказать, что оценки погрешности метода коллокации, установленные в теоремах 5 и 6, не могут быть улучшены по порядку. Ввиду громоздкости выкладок доказательства здесь не приводятся.

Литература

[1] Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ в нормированных пространствах.* – М.: Физматгиз, 1959. – 684 с.

[2] Габдулхаев Б.Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1980. – 232 с.

[3] Haverkamp R. *Approximationsfehler der Ableitungen von Interpolationspolynomen* // J. Approx. Theory. – 1980. – V. 30. – P. 180–196.

[4] Натансон И.П. *Конструктивная теория функций.* – М.: Гостехиздат, 1949. – 688 с.

[5] Тихомиров В.М. *Некоторые вопросы теории приближений.* – М.: Изд-во МГУ, 1976. – 304 с.

[6] Корнейчук Н.П. *Точные константы в теории приближения.* – М.: Наука, 1987. – 424 с.

[7] Габдулхаев Б.Г. *Наилучшие приближения решений операторных уравнений и оптимизация вычислительных методов* / Юбилейный сб. избранных тр. членов Академии наук Республики Татарстан. Отделение математики, механики и машиноведения. – Казань: Изд-во Фолиант, 2002. – С. 165–192.

А.Ф. Галимянов

доцент, кафедра теории функций и приближений,
Казанский государственный университет,
420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 18,

e-mail: anis.galimjanoff@ksu.ru

Д.Э. Сайфуллина

Казанский государственный университет,
420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 18,

e-mail: baxic81@mail.ru

A.F. Galimyanov

Associate Professor, Chair of Theory of Functions and Approximations,
Kazan State University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

e-mail: anis.galimjanoff@ksu.ru

D.E. Saifullina

Kazan State University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

e-mail: baxic81@mail.ru