ЗАДАЧИ
студенческой олимпиады им. Н. И. Лобачевского
1 декабря 2020 г.

1. Прямая ℓ пересекает ветвь гиперболы в точках A_1 и A_2, а её асимптоты в точках B_1 и B_2. Доказать, что длины отрезков A_1B_1 и A_2B_2 равны.

2. Вычислить определённый интеграл $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{(2x+5)dx}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+4}$.

3. Найти геометрическое место точек $z \in \mathbb{C}$, для которых n-й член ряда

$$\frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots$$

превосходит по модулю все остальные члены этого ряда.

4. Доказать неравенство $|a^3 + b^3 + c^3 - 3abc| \leqslant (a^2 + b^2 + c^2)^{3/2}$, где $a, b, c \in \mathbb{R}$.

5. Дана целочисленная матрица A размера 2×2. Известно, что существует положительное число M, что $|\mathrm{tr}(A^k)| < M$ при любом натуральном k. Чему могут быть равны собственные значения матрицы A?
Напоминание: Следом $\mathrm{tr}(A)$ матрицы A называют сумму элементов главной диагонали.

6. На плоскости даны замкнутая непрерывная кривая γ, ограничивающая выпуклую область, и точка O внутри этой области. Доказать, что в кривую γ можно вписать треугольник ABC, такой что

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \mathbf{0}.$$

7. Пусть $z_1, \ldots, z_{101}$ – различные числа, среднее арифметическое которых равно 20. Чему может быть равна сумма

$$\frac{(z_1)^{101}}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)\ldots(z_1 - z_{101})} + \frac{(z_2)^{101}}{(z_2 - z_1)(z_2 - z_3)\ldots(z_2 - z_{101})} + \ldots + \frac{(z_{101})^{101}}{(z_{101} - z_1)(z_{101} - z_2)\ldots(z_{101} - z_{100})}?$$

8. За круглым столом сидит 13 хамелеонов: синих, зелёных и красных. В течение минуты каждый смотрит на двух своих соседей и выбирает себе следующий цвет. Если соседи у него одного цвета, он этот цвет и выбирает. А если разного, он выбирает третий возможный цвет. Каждую минуту раздаётся хлопок, и все хамелеоны одновременно перекрашиваются в выбранный ими следующий цвет. Доказать, что через несколько минут все они будут раскрашены так же, как в самом начале.

9. С кубом $x_0 \times y_0 \times z_0 = 1 \times 1 \times 1$ выполняют следующие операции: на первом шаге увеличивают первую сторону так, чтобы объём куба увеличился на 1 (т.е. он превращается в параллелепипед $x_1 \times y_0 \times z_0 = 2 \times 1 \times 1$), потом выполняют аналогичные шаги 2 и 3, увеличивая при этом вторую и третью сторону параллелепипеда так, чтобы объём после каждого шага увеличивался на 1. Так, после второго шага параллелепипед будет иметь размеры $x_1 \times y_1 \times z_0 = 2 \times \frac{3}{2} \times 1$, после третьего – $x_1 \times y_1 \times z_1 = 2 \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3}$. Далее шаги повторяются, размеры полученного параллелепипеда после шага $3n$ обозначим $x_n \times y_n \times z_n$. Чему равен предел $\frac{y_n}{z_n}$ при $n \to \infty$?

10. Класс $\mathscr{C}$ многочленов от трёх переменных x, y, z определен следующим образом:
1) Многочлены x, y, z, $x+1$, $y+1$, $z+1$ принадлежат $\mathscr{C}$;
2) Многочлен, отличный от x, y, z, $x+1$, $y+1$, $z+1$, принадлежит классу $\mathscr{C}$ тогда и только тогда, когда его можно представить в виде $f_1f_2 + f_2f_3 + f_1f_3$, где f_1, f_2, $f_3 \in \mathscr{C}$.
а) Существует ли $f \in \mathscr{C}$, такой что значение $f(x, y, z)$ чётно для всех целых x, y, z? (3 балла)
б) Существует ли $f \in \mathscr{C}$, такой что значение $f(x, y, z) + x + y + z$ чётно для всех целых x, y, z? (4 балла)

11. Бернхард построил равносторонний треугольник и провел в нём медианы. Оказалось, что их длины совпали с длинами сторон треугольника. В каком соотношении точка пересечения медиан делит медиану в этом треугольнике?