ТРУДЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ЦЕНТРА
ИМЕНИ Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО

ТОМ 53

ЛОБАЧЕВСКИЕ ЧТЕНИЯ – 2016

Материалы
Пятнадцатой молодежной
школы-конференции
(Казань, 24 – 29 ноября 2016 г.)

Казанское математическое общество
2016

Казанское математическое общество
Российская Федерация,
Республика Татарстан, 420008,
Казань, ул. Кремлевская, 35
Институт математики и механики
им. Н.И. Лобачевского
Казанского (Приволжского)
федерального университета

Kazan Mathematical Society,
Lobachevski Institute of
Mathematics and Mechanics
Kazan (Volga region) Federal
University, 35, Kremlevskaya str.
Kazan, Republic of Tatarstan,
420008, Russian Federation

Российский фонд фундаментальных исследований

Издание осуществлено при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-31-10492 мол-г)

УДК 51+533
ББК 22.1 – 22.1
Т78

Печатается по рекомендации Редакционно-издательского совета Казанского математического общества

Научные редакторы – Ю. А. Альпин, Д. В. Бережной, В. И. Жегалов, С. Р. Насыров, Е. Н. Сосов, Л. Р. Шакирова
Составитель – Валеева Р.Р.

Т78 Труды Математического центра имени Н. И. Лобачевского. Т. 53 / Казанское математическое общество. «Лобачевские чтения – 2016» ***// Материалы Пятнадцатой молодежной научной школы-конференции (под общей редакцией С. Р. Насырова).*** **– Казань: Издательство Казанского математического общества, Изд-во Академии наук РТ, 2016. – Т. 53. – 179 с.**

ISBN 978-5-9690-0326-2

Сборник содержит материалы Пятнадцатой молодежной научной школы-конференции «Лобачевские чтения – 2016», организованной на базе Института математики и механики им. Н. И. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета. Школа-конференция проведена в Казани с 24 по 29 ноября 2016 года при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и центра превосходства в области математического образования.

Книга предназначена для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов, специализирующихся в различных областях математики, механики и их приложений.

УДК 51+533
ББК 22.1 – 22.1

ISBN 978-5-9690-0326-2

© Казанское математическое общество, 2016
© Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2016
© Издательство Академии наук РТ, 2016

ПРЕДИСЛОВИЕ

В этом сборнике представлены материалы молодежной школы-конференции «Лобачевские чтения-2016». Подобные школы проводятся в Казанском университете ежегодно, начиная с 2001 года. Школа 2016 года проходила с 24 по 29 ноября. Она посвящена памяти известного казанского математика члена-корреспондента Академии наук Республики Татарстан доктора физико-математических наук профессора Билсура Габдулхаева Габдулхаева (1936-2008), основателя кафедры теории функций и приближений, восьмидесятилетие со дня рождения которого отмечалось в конце октября этого года. В сборнике содержится статья учеников Б. Г. Габдулхаева, в ней описываются его основные научные результаты. Кроме того, в этом томе опубликованы тезисы докладов молодых ученых – участников школы-конференции.

С.Р.Насыров, председатель оргкомитета

Ю. Р. Агачев, А. Ф. Галимянов,
Е. К. Липачёв, А. В. Ожегова
Казанский (Приволжский) федеральный Университет,
jagachev@gmail.com, anis_59@mail.ru,
Evgeny.Lipachev@kpfu.ru, Ozhegovaalla@gmail.com

О НАУЧНОМ НАСЛЕДИИ БИЛСУРА ГАБДУЛХАЕВИЧА ГАБДУЛХАЕВА

Памяти научного руководителя

1936–2008

Габдулхаев Билсур Габдулхаевич, доктор физ.-мат. наук, профессор Казанского университета, окончил среднюю школу в деревне Янгулово (Балтасинский район, РТ) в 1955 году и поступил в Казанский сельскохозяйственный институт. Там

студент Б.Г. Габдулхаев слушает высшую математику у доцента Гумера Мирсаидовича Шайдукова, заметившего его незаурядные математические способности. По предложению Шайдукова Габдулхаев в следующем 1956 году поступает на физико–математический факультет Казанского университета, блестяще сдав вступительные экзамены на специальность “Математика”. С этого времени его жизнь неразрывно связана с Казанским университетом. Будучи студентом, он интенсивно занимается научно-исследовательской работой под руководством зав. кафедрой математического анализа, профессора Бориса Михайловича Гагаева, а после окончания в 1961 г. с отличием механико-математического факультета Казанского университета, поступает к нему же в очную аспирантуру. Но уже через 5 месяцев по предложению Гагаева Б.Г. Габдулхаев начинает работать ассистентом кафедры математического анализа, ведя до 30 часов занятий в неделю, совмещая работу с учебой в заочной аспирантуре. С этого времени и до последнего месяца своей жизни Билсур Габдулхаевич увлеченно обучает студентов своему любимому делу — науке математике. За время профессиональной деятельности он читает дисциплины по основным разделам высшей математики и специальные математические курсы в Казанском университете и педагогическом институте.

В 1966 г. Б.Г. Габдулхаев защищает кандидатскую диссертацию на тему “Некоторые вопросы теории приближенных методов и их приложения к сингулярным интегральным уравнениям” [9]. Диссертация была высоко оценена как руководителем, так и оппонентами. В частности, член-корр. АН СССР В.К. Иванов предложил в том же году защитить ее как докторскую диссертацию. Однако Габдулхаев отказывается, и в этом проявляется его исключительная скромность и высокая

требовательность к себе. В 70-е годы Билсур Габдулхаевич работает по приглашению в Болгарии доцентом Пловдивского и Софийского университетов, а также сотрудничает с Болгарской Академией наук.

В 1986 г. в Математическом институте АН УССР (г. Киев) Б.Г. Габдулхаев защищает докторскую диссертацию в форме научного доклада на тему “Оптимальные аппроксимации решений линейных задач и прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений” [82]. В отзыве официального оппонента, крупного специалиста по математической физике и вычислительным методам, профессора С.Г. Михлина отмечается, что докторская диссертация Габдулхаева является выдающимся вкладом в математику.

Научные исследования Б.Г. Габдулхаев и его учеников достаточно быстро нашли практическое применение при решении задач аэрогидромеханики, электродинамики, компьютерной томографии и др. Под его руководством выполнен ряд хозяйственных договоров с промышленными предприятиями. Б.Г. Габдулхаев понимал важность использования компьютерных технологий в научных исследованиях и первый компьютерный класс на мехмате (ранее были только дисплейные) появился по инициативе Билсура Габдулхаевича на средства хоздоговора, руководимого им. Его стараниями, при поддержке декана мехмата Владимира Владимировича Вишневского, в 1988 году была создана кафедра теории функций и приближений, одной из задач которой являлось внедрение компьютерных технологий в научную и педагогическую деятельность факультета. С момента создания кафедры и до конца своей жизни Б.Г. Габдулхаев был заведующим этой кафедры. Также был открыт филиал кафедры в г. Набережные Челны (НГПИ).

Научные исследования на кафедре под руководством Габдулхаева велись на стыке теории функций и приближений, функционального анализа и интегральных уравнений, вычислительной математики и математической физики. Эти исследования в сочетании с компьютерными технологиями имели практическую значимость. В конце 80-х – начале 90-х годов кафедра сотрудничала с Государственным Институтом прикладной оптики Министерства обороны в рамках хозяйственного договора. В результате сформировалось еще одно научное направление, связанное с разработкой и обоснованием приближенных методов решения задач дифракции и распространения электромагнитных волн. Кафедра активно участвовала в работе Научно-технического общества по приборостроению им. С.И. Вавилова. Предложен новый подход к решению задач компьютерной томографии.

С 1974 года по настоящее время работает созданный Б.Г. Габдулхаевым межвузовский научный семинар “Теория аппроксимации и ее приложения”. Следует отметить, что на каждом семинаре Билсур Габдулхаевич ставил актуальные научные задачи, обсуждал возможные пути их решения, проявляя при этом эрудицию и уникальную память.

Б.Г. Габдулхаев создал казанскую научную школу “Теория аппроксимации и интегральные уравнения”, подготовил сорок кандидатов и четырех докторов физико-математических наук по специальностям: 01.01.01 – математический анализ; 01.01.02 – дифференциальные уравнения (в том числе для Белоруссии, Болгарии, Египта, Молдовы и Таджикистана) [174, 193, 203]. Заметим, что при проведении научных исследований своих учеников он много внимания уделял вопросам корректного оформления результатов этих исследований.

В течение десяти лет (1998–2008 гг.) Габдулхаев был членом редколлегии международного научного журнала “Известия вузов. Математика” (Russian Mathematics), до этого в течение 10 лет (1970–1980 гг.) был заместителем главного редактора этого журнала. Он являлся рецензентом многих научных журналов по математике, участвовал в работе трех диссертационных советов по защите кандидатских и докторских диссертаций по математике.

В 1992 г. Б.Г. Габдулхаев избран членом-корреспондентом Академии наук РТ и исполнял обязанности председателя Научного совета по математике, а последние 10 лет – председателя Научного совета по математике и механике.

Б.Г. Габдулхаев в 1996 г. на основании заключения независимых экспертов из разных стран мира Американским Биографическим Институтом (АБИ США) признан человеком, добившимся выдающихся успехов в области высшей математики. В 1996 г. фамилия Габдулхаева рекомендована для включения в “Международный справочник 500 влиятельных лиц” по разделу “Наука”. Он награжден золотой медалью АБИ США.

За заслуги в области математического образования Билсур Габдулхаевич был удостоен звания “Заслуженный деятель науки Республики Татарстан”, а также награжден медалью “Ветеран труда”.

Б.Г. Габдулхаев получил следующие **основополагающие научные результаты**.

— Построил общую теорию приближенных методов функционального анализа, основанную на односторонней обратимости аппроксимирующих операторов и ориентированную на применения к широким классам операторных уравнений, задача решения которых может быть поставлена как корректно,

так и некорректно.

— На основе указанной теории разработал со строгим теоретико-функциональным обоснованием прямые и проекционные методы решения различных классов (линейных и нелинейных, одномерных и многомерных, корректных и некорректных) сингулярных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений с ядрами Гильберта, Коши, Адамара и с полярно-логарифмическими ядрами, заданными как на конечном отрезке, так и на всей вещественной оси.

— Разработал основы полиномиальных и сплайновых приближений функций в пространствах Гёльдера, Никольского и Соболева. В частности, им решена проблема наилучших приближений операторами полиномиальной интерполяции. Конструктивно доказано, что в весовых пространствах Соболева экстремальными являются операторы Лагранжа по экстремальным точкам многочленов Чебышева и установлены практически эффективные двусторонние оценки погрешности в универсальных терминах конструктивной теории функций. Указанная проблема решена также в пространствах периодических функций Соболева.

— Установил теоремы существования, единственности и устойчивости решений ряда классов регулярных и сингулярных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, в том числе для уравнений с малыми параметрами при старших производных.

— Создал теорию наилучших конечномерных приближений решений операторных уравнений в нормированных пространствах и на ее основе решил проблему оптимизации вычислительных методов для различных классов регулярных интегральных и обыкновенных дифференциальных уравнений, син-

гулярных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. Им получены в определенном смысле окончательные (в том числе неулучшаемые) результаты, которые применены к решению конкретных классов уравнений из аэрогидромеханики, теории упругости, электродинамики, теории теплопроводности и массового обслуживания.

— Построил оптимальные полиномиальные и сплайновые методы, а также решил основные задачи по построению, теоретическому обоснованию и оптимизации квадратурных и кубатурных формул для одномерных и многомерных сингулярных интегралов.

— Решил проблему оптимальной саморегуляризации некорректно поставленных задач, описываемых интегральными уравнениями первого рода с разностными логарифмическими и полярными ядрами в главной части интегральных операторов. Им получены неулучшаемые результаты относительно погрешностей как известных, так и предложенных новых прямых методов.

Полученные результаты прежде всего базировались на двух построенных им теориях.

I. Теория приближенных методов решения линейных операторных уравнений в банаховых и гильбертовых пространствах

Эта теория трактуется Габдулхаевым как продолжение и дальнейшее развитие хорошо известной общей теории приближенных методов, предложенной лауреатом Нобелевской премии академиком АН СССР Леонидом Витальевичем Канторовичем для операторных уравнений второго рода и приводящихся к ним. С другой стороны, она обусловлена прило-

жениями к широким классам уравнений (в первую очередь, к сингулярным интегральным и интегро-дифференциальным уравнениям и краевым задачам теории функций комплексных переменных), задача решения которых может быть поставлена как корректно, так и некорректно.

1) В общей теории Канторовича существенное значение имеет требование о том, чтобы операторы точного и приближенного уравнений одновременно являлись линейными непрерывными операторами второго рода или же приводящимися к ним в определенном смысле. В теории же Габдулхаева эти операторы могут быть любыми линейными (аддитивными и однородными) операторами, в том числе она справедлива одновременно как для уравнений второго рода, так и для уравнений, приводящихся к ним. (Имеются в виду сингулярные интегральные и интегро-дифференциальные уравнения и краевые задачи теории функций комплексных переменных в связи с их приближенными методами решения. Это обстоятельство явилось, по существу, основной причиной появления данной теории).

2) Отправной точкой для получения основных теорем в теории Канторовича является доказательство существования решения приближенного уравнения, что в ряде случаев эквивалентно существованию линейного непрерывного правого обратного оператора для аппроксимирующего оператора. Теория Габдулхаева строится в первую очередь на основании доказательства существования левого обратного оператора для аппроксимирующего оператора. Кроме того, как непосредственное обобщение теории Канторовича, строится также вариант теории приближенных методов, основанный на доказательстве существования правого обратного оператора для общего линейного приближенного уравнения.

3) В теории Канторовича основные операторы предполагаются линейными непрерывными, причем участвующий в приближенном уравнении оператор проектирования P является проекционным. Однако на практике встречаются и такие приближенные методы, в которых это предположение не выполняется (такая ситуация возникает, например, при исследовании сходимости в среднем метода механических квадратур решения сингулярных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений). В связи с этим Габдулхаев рассматривает такой вариант общей теории, когда указанные операторы или же некоторые из них являются неограниченными, причем оператор P может и не быть проекционным.

4) Ввиду большой практической значимости специально исследуются прямые методы. В частности, рассматриваются вопросы устойчивости, обусловленности и практической реализации таких методов через специально построенные аппроксимативно-итерационные методы.

5) В теории Канторовича рассматриваются лишь такие уравнения, задача решения которых поставлена в классическом смысле корректно. Вариант общей теории Габдулхаева приспособлен для применения и к некорректно поставленным задачам. В частности, предлагаются и исследуются два прямых метода решения некорректных задач в сепарабельных гильбертовых пространствах.

6) Предлагается теоретическое обоснование метода наименьших квадратов и метода минимальных невязок для линейных операторных уравнений в парах нормированных пространств.

II. Теория оптимизации вычислительных методов

В настоящее время для приближенного решения различных классов математических задач имеются многочисленные результаты, в связи с чем и возникла важная и трудная задача построения и исследования наиболее точных и экономически выгодных методов решения задач, т.е. возникла, по определению академиков А.Н. Колмогорова, Л.В. Канторовича, Г.И. Марчука, С.М. Никольского, С.Л. Соболева, А.Н. Тихонова, Н.С. Бахвалова, К.И. Бабенко, В.К. Иванова и Н.П. Корнейчука *проблема оптимизации вычислительных методов*.

Указанная проблема чрезвычайно сложна и, естественно, в ее решении сделаны лишь первые шаги. С точки зрения приложений здесь особенно актуальными являются исследования, связанные с точностными характеристиками вычислительных методов, что приводит к проблеме построения теории наилучших конечномерных приближений решений операторных уравнений в функциональных пространствах.

В ряде работ Габдулхаева построена теория наилучших конечномерных приближений решений операторных уравнений в нормированных и гильбертовых пространствах. Она трактуется как теория оптимизации по точности прямых и проекционных методов, и именно в этом смысле она нашла многочисленные применения при оптимизации по точности конечномерных методов решения различных классов операторных уравнений. В частности, на ее основе решена проблема оптимизации вычислительных методов для таких уравнений, как: а) регулярные интегральные уравнения; б) обыкновенные дифференциальные уравнения; в) сингулярные интегральные уравнения с ядрами Гильберта и Коши; г) сингулярные интегро-

дифференциальные уравнения; д) многомерные регулярные и сингулярные интегральные уравнения; е) некорректные интегральные уравнения первого рода с разностными ядрами в главной части интегрального оператора; ж) нелинейные регулярные и сингулярные интегральные уравнения.

Кроме того, решена также задача построения, исследования и оптимизации квадратурных и кубатурных формул для сингулярных интегралов, понимаемых в смысле главного значения.

При этом были установлены роль и место таких классических методов, как методы Галеркина, моментов, наименьших квадратов, коллокаций, механических квадратур и сплайн-методы, в классах тех или иных аппроксимативных методов, а также построены оптимальные по порядку и асимптотически оптимальные полиномиальные и сплайновые методы.

Теория основывается на многочисленных хорошо известных результатах по теории приближения функций полиномами и сплайнами, а также на аппроксимационных числах компактных операторов и на теории поперечников множеств в функциональных пространствах, развитой в трудах советских математиков (А.Н. Колмогоров, К.И. Бабенко, С.Б. Стечкин, В.М. Тихомиров, Н.П. Корнейчук, Б.С. Кашин, Ю.Н. Субботин, П.Л. Ульянов, Р.С. Исмагилов и др.). Габдулхаеву впервые удалось связать теорию оптимизации с колмогоровским, проекционным и линейным поперечниками компактных множеств в линейных нормированных пространствах, что позволило получить приведенные выше результаты по оптимальным прямым методам решения функциональных уравнений.

П.Л. Ульянов и Б.Г. Габдулхаев

Б.Г. Габдулхаев опубликовал более двухсот научных работ, три монографии и несколько обзорных работ по современным проблемам теории функций и приближений, функционального анализа, интегральных и интегро–дифференциальных уравнений, а также учебные пособия для студентов–математиков.

Список научных работ Билсура Габдулхаевича Габдулхаева

1. Об одном интерполяционном методе решения сингулярных интегральных уравнений с ядром Гильберта // Итоговая научная аспирантская конф. КГУ за 1962 г. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1962. – С. 158–162.

2. Об устойчивости решений сингулярных интегральных уравнений // Сборник аспирантских работ КГУ. Математика – физика. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1964. – С. 6–8.

3. Об одном прямом методе решения сингулярных интегральных уравнений // Итоговая научная конференция Казанск. ун-та за 1963 г. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1964. – С. 5–6.

4. О приближенном решении сингулярных интегральных уравнений методом механических квадратур // Доклады III Сибирской конф. по математике и механике. – Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1964. – С. 92–94.

5. Об одном прямом методе решения интегральных уравнений // Известия вузов. Математика. – 1965. – № 3. – С. 51–60.

6. О приближенном решении сингулярных интегральных уравнений методом механических квадратур // Известия вузов. Математика. – 1965. – № 5. – С. 43–51.

7. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов и их некоторые применения // Функциональный анализ и теория функций. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1965 (1966). – С. 7–17.

8. Заметка об общей теории приближенных методов анализа // Там же. – С. 18–31.

9. Некоторые вопросы теории приближенных методов и их приложения к сингулярным интегральным уравнениям // Кандидатская диссертация. – Казань, Казанск. ун-т, 1966. – 193 с.

10. Об аппроксимации тригонометрическими полиномами и погрешности квадратурных формул для сингулярных интегралов // Функциональный анализ и теория функций. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1967. – № 4. – С. 54–74.

11. Об одном общем квадратурном процессе для сингулярных интегралов // Там же. – С. 75–90.

12. Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений методом механических квадратур // Доклады АН

СССР. – 1968. – Т. 179, № 2. – С. 260–263.

13. Об одном общем квадратурном процессе и его применении к приближенному решению сингулярных интегральных уравнений // Доклады АН СССР. – 1968. – Т. 179, № 3. – С. 515–517.

14. Некоторые вопросы приближенных методов // Функциональный анализ и теория функций. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1968. – № 5. – С. 20–29.

15. О некоторых некорректных задачах // Там же. – С. 30–37.

16. Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений в исключительных случаях // Там же. – С. 38–43.

17. Некоторые вопросы теории приближенных методов, I // Известия вузов. Математика. – 1968. – № 9. – С. 16–28.

18. Некоторые вопросы теории приближенных методов, II // Известия вузов. Математика. – 1968. – № 10. – С. 21–29.

19. Квадратурные и кубатурные формулы для сингулярных интегралов и их некоторые приложения // Международная конференция по конструктивной теории функций. Резюме докладов. Варна. – София, 1970. – С. 3–4.

20. Кубатурные формулы для многомерных сингулярных интегралов, I // Труды Ин-та математики АН Болгарии. - София, 1970. – Т. 11. – С. 181–196.

21. Некоторые вопросы теории приближенных методов, III // Годишник Софийск. ун-т. Матем. фак-т, 1968/1969г. – София: Изд-во Софийского ун-та, 1970. – Т. 63. – С. 39–51.

22. О методе механических квадратур для сингулярных интегральных уравнений // Научни трудове на ВПИ г. Пловдив. – 1970. – Т. 8, кн. 2. – С. 9–16 (совм. с Душковым П.Н.).

23. Полигональный метод решения линейных уравнений // Там же. – 1971. – Т. 9, кн. 1. – С. 9–26 (совм. с Жечевым Й.И.).

24. Некоторые вопросы теории приближенных методов, IV // Известия вузов. Математика. – 1971. – № 6. – С. 15–23.

25. Прямые методы решения некоторых операторных уравнений, I // Известия вузов. Математика. – 1971. – № 11. – С. 33–44.

26. Прямые методы решения некоторых операторных уравнений, II // Известия вузов. Математика. – 1971. – № 12. – С. 28–38.

27. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов и метод механических квадратур для сингулярных интегральных уравнений // Труды Международной конференции по конструктивной теории функций. Варна, 1970. – София: Изд-во Болг. АН, 1972. – С. 35–49.

28. Прямые методы решения некоторых операторных уравнений, III // Известия вузов. Математика. – 1972. – № 4. – С. 32–43.

29. К численному решению интегральных уравнений методом механических квадратур // Известия вузов. Математика. – 1972. – № 12. – С. 23–39.

30. О прямых методах решения сингулярных интегральных уравнений первого рода // Известия вузов. Математика. – 1973. – № 7. – С. 12–24 (совм. с Душковым П.Н.).

31. О методе сплайн-коллокации для интегральных уравнений// Приложения функционального анализа к приближенным вычислениям. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1974. – С. 7–14 (совм. с Ахметовым С.М.).

32. О полигональном методе решения интегральных уравнений со слабой особенностью // Там же. – С. 37–57 (совм. с

Душковым П.Н.).

33. Прямые методы решения уравнения теории крыла // Известия вузов. Математика. – 1974. – № 2. – С. 29–44.

34. Прямые методы решения некоторых операторных уравнений, IV // Известия вузов. Математика. – 1974. – № 3. – С. 18–31.

35. Решение операторных уравнений методом уточняющих итераций // Известия вузов. Математика. – 1974. – № 5. – С. 66–80.

36. Квадратурно-итерационный метод решения нелинейных сингулярных интегральных уравнений // Известия вузов. Математика. – 1974. – № 11. – С. 4–15.

37. Метод механических квадратур для сингулярных интегральных уравнений // Известия вузов. Математика. – 1974. – № 12. – С. 3–14 (совм. с Душковым П.Н.).

38. О сходимости полигонального метода решения слабосингулярных интегральных уравнений // Функциональный анализ и его приложения. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1975. – С. 60–72 (совм. с Горловым В.Е.).

39. Аппроксимация полиномами и сплайнами решений сингулярных интегральных уравнений // Тезисы научных сообщений Международной конференции по теории приближения функций. – Калуга, 1975. – М.: Наука, 1975. – С. 26–27.

40. Аппроксимация в H-пространствах и ее приложения // Там же. – С. 132–133.

41. Аппроксимация в H-пространствах и приложения // Доклады АН СССР. – 1975. – Том 223, № 6. – С. 1293–1296.

42. Кубатурные формулы для многомерных сингулярных интегралов, II // Известия вузов. Математика. – 1975. – № 4. – С. 3–13.

43. Сплайн-методы решения одного класса сингулярных интегро-дифференциальных уравнений // Известия вузов. Математика. – 1975. – № 6. – С. 14–24.

44. Приближенное решение многомерных сингулярных интегральных уравнений, I // Известия вузов. Математика. – 1975. – № 7. – С. 30–41.

45. Борис Михайлович Гагаев // Известия вузов. Математика. – 1975. – № 10. – С. 100–101 (совм. с Лаптевым Б.Л. и Норденом А.П.).

46. Приближенное решение многомерных сингулярных интегральных уравнений, II// Известия вузов. Математика. – 1976. – № 1. – С. 30–41.

47. Решение нелинейных сингулярных интегральных уравнений методом редукции//Известия вузов. Математика. – 1976. – № 2. – С. 3–13 (совм. с Горловым В.Е.).

48. Оптимальные методы решения некоторых классов линейных задач // Известия вузов. Математика. – 1976. – № 6. – С. 20–35.

49. Кубатурные формулы для сингулярных интегралов // Известия вузов. Математика. – 1976. – № 7. – С. 100–105 (совм. с Онеговым Л.А.).

50. Квадратурные формулы с кратными узлами для сингулярных интегралов // Доклады АН СССР. – 1976. – Том 227, № 3. – С. 531–534.

51. О квадратурных и кубатурных формулах для сингулярных интегралов // Теория функций и функциональный анализ. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1976. – С. 22–46 (совм. с Онеговым Л.А.).

52. К численной реализации прямых методов решения операторных уравнений // Там же. – С. 46–55.

53. Об оптимальных алгоритмах решения сингулярных интегральных уравнений // Известия вузов. Математика. – 1976. – № 11. – С. 13–23 (совм. с Горловым В.Е.).

54. Аппроксимация полиномами и сплайнами решений слабо сингулярных интегральных уравнений // Труды Международной конференции по теории приближения функций. – М.: Наука, 1977. – С. 89–93.

55. Поперечники и оптимизация квадратурных формул для сингулярных интегралов // Доклады АН СССР. – 1977. – Т. 234, № 3. – С. 513–516.

56. Прямые методы решения уравнения теории струй // Дифференц. уравнения. – 1977. – Т. 13, № 7. – С. 1299–1307.

57. Поперечники и оптимизация численных методов решения сингулярных интегральных уравнений // Известия вузов. Математика. – 1977. – № 8. – С. 95–98.

58. Оптимизация численных методов решения линейных задач // Известия вузов. Математика. – 1977. – № 10. – С. 37–49.

59. Компактная аппроксимация одного класса сингулярных интегро-дифференциальных уравнений // Математический анализ. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1978. – С. 24–32.

60. Оптимальные методы решения интегральных уравнений // Материалы конференции “Методы алгебры и функц. анализа при исследовании семейств операторов”. – Тарту: Изд-во Тартуск. ун-та, 1978. – С. 55–57.

61. Оптимизация проекционных методов решения дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1978. – Т. 14, № 10. – С. 1888–1899.

62. Об оптимальных квадратурных формулах для сингулярных интегралов // Известия вузов. Математика. – 1978. – № 3. – С. 24–39.

63. Полиномиальные аппроксимации по В.К. Дзядыку решений сингулярных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений // Известия вузов. Математика. – 1978. – № 6. – С. 51–62.

64. Оптимизация численных методов решения интегральных уравнений // Известия вузов. Математика. – 1978. – № 11. – С. 34–46.

65. Оптимизация коллокационных методов // Доклады АН СССР. – 1979. – Т. 247, № 5. – С. 1033–1037.

66. Оптимизация квадратурных формул с кратными узлами для сингулярных интегралов // Известия вузов. Математика. – 1979. – № 12. – С. 62–66 (совм. с Шариповым Р.Н.).

67. Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1980. – 232 с. (монография).

68. Конечномерные аппроксимации сингулярных интегралов и прямые методы решения особых интегральных и интегро-дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Математический анализ, том 18. – М.: Изд-во АН СССР, 1980. – С. 251–307.

69. Оптимизация коллокационных методов решения интегральных и дифференциальных уравнений // Известия вузов. Математика. – 1980. – № 1. – С. 3–11.

70. Прямые методы решения нелинейных сингулярных интегро-диффернциальных уравнений с периодическими коэффициентами // IX Международная конференция по нелинейным колебаниям. Тезисы докладов. – Киев: Изд-во “Наукова думка” АН УССР, 1981. – С. 80.

71. Оптимальные аппроксимации решений линейных уравнений // Доклады Республиканского симпозиума по дифференциальным и интегральным уравнениям. – Одесса: Изд-во

Одесск. ун-та, 1982. – С. 205–206.

72. Оптимальные квадратурные формулы для сингулярных интегралов // Труды Международной конференции по конструктивной теории функций. Варна, 1981. – София: Изд-во Болг. АН, 1983. – С. 47–51 (совм. с Велевым Г.Д.).

73. Оптимизация квадратурных методов решения интегральных уравнений // Доклады АН СССР. – 1983. – Т. 271, № 1. – С. 20–25.

74. Наилучшие приближения решений функциональных уравнений // Тезисы докладов Международной конференции по теории приближения функций. – Киев: Изд-во АН УССР, 1983. – С. 44.

75. Оптимальные аппроксимации решения краевой задачи Римана // Доклады АН УССР. – 1983. – Серия А, № 6. – С. 7–9 (совм. с Тихоненко Н.Я.).

76. Оптимальные методы решения сингулярных интегральных уравнений // Доклады конференции “Интегральные уравнения в прикладном моделировании”. – Киев, 1983, часть 2. – С. 68–69.

77. Сплайн-метод решения одного класса сингулярных интегро-дифференциальных уравнений // Там же. – С. 72–73 (совм. с Велевым Г.Д., Гильмановым Р.А.).

78. Экстремальные задачи теории сингулярных кубатур // Всесоюзная Школа по теории функций, посвященная 100-летию акад. Н.Н. Лузина. – Кемерово: Изд-во Кемер. ун-та, 1983. – С. 29.

79. Наилучшие приближения решений функциональных уравнений и оптимизация численных методов // Труды Международной конференция по конструктивной теории функций. Варна, 1984. – София: Изд-во Болг. АН, 1984. – С. 18–26 (совм.

с Велевым Г.Д.).

80. Оптимальные полиномиальные аппроксимации решений дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1984. – Т. 20, № 10. – С. 1813–1816 (совм. с Леоновым А.И.).

81. Наилучшие квадратурные формулы для сингулярных интегралов // Международная конференция по конструктивной теории функций. Тезисы докладов. – София: Изд-во Болг. АН, 1984. – С. 131 (совм. с Велевым Г.Д., Шариповым Р.Н.).

82. Оптимальные аппроксимации решений линейных задач и прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений // Докторская диссертация в форме научного доклада. – Киев, МИАН УССР, 1985. – 48 с.

83. О приближенных решениях сингулярных интегральных уравнений // Сообщения АН ГССР. – 1985. – Т. 117, № 2. – С. 249-252 (совм. с Хазириши Э.О.).

84. Аппроксимационные числа линейных операторов и оптимизация приближенных методов решения функциональных уравнений // Конструктивная теория функций и функциональный анализ. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1985. – Вып. V. – С. 15–26.

85. Оптимальные методы решения сингулярных интегральных уравнений первого рода // Доклады Всесоюзного симпозиума “Метод дискретных особенностей в задачах математической физики”. – Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1985. – С. 28–29.

86. Численная реализация на ЭВМ метода механических квадратур для сингулярных интегральных уравнений / Деп. в ВИНИТИ Казанским ун-том 24.07.1985, № 5368-85 Деп. – 24 с. (совм. с Агачевым Ю.Р., Галимяновым А.Ф.).

87. Прямые методы решения одного класса сингулярных интегральных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1986. –

Т. 22, № 3. – С. 496–503 (совм. с Хазириши Э.О.).

88. Квадратурные методы решения сингулярных интегральных уравнений / Деп. в ВИНИТИ Казанским ун-том 22.08.1986, № 6054-В86 Деп. – 27 с. (совм. с Галимяновым А.Ф.).

89. Оптимизация прямых методов решения интегральных уравнений I-рода с логарифмической особенностью // Интегральные уравнения в прикладном моделировании. Часть 1. – Киев, 1986. – С. 22–23.

90. Оптимальные проекционные методы решения слабо сингулярных интегральных уравнений I-рода // Метод дискретных особенностей в задачах математической физики и его роль в развитии численного эксперимента на ЭВМ. – Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1987. – С. 41–43.

91. Один новый полиномиальный оператор и его приложения // Теория приближения функций. Труды Международной конференции. – М.: Наука, 1987. – С. 98–100 (совм. с Ермолаевой Л.Б.).

92. Оптимизация прямых методов решения периодической краевой задачи // Третья международная конференция по дифференц. уравнениям и применениям. – София: Изд-во Болг. АН, 1987. – С. 75–78 (совм. с Велевым Г.Д.).

93. Сходимость и устойчивость общего проекционного метода решения сингулярных интегральных уравнений первого рода // Исследования по краевым задачам и их приложениям. – Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 1987. – С. 25–33.

94. Оптимизация квадратурных формул для сингулярных интегралов Коши и Адамара // Конструктивная теория функций и функциональный анализ. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1987. – С. 3–48 (совм. с Шариповым Р.Н.).

95. Новый способ обоснования прямых методов решения

сингулярных интегральных уравнений // Дифференц. и интегральн. уравнения и их прилож. – Одесса: Изд-во Одесск. ун-та, 1987. – Часть 1. – С. 50–51 (совм. с Суховым Р.Н., Хайруллиной А.М.).

96. Best approximations of solutions of singular integral equations of the first kind // Proc. Int. Conf. of Constructive Theory of Functions, 1987. – Sofia, 1988. – P. 471–477 (совм. с Велевым Г.Д.).

97. Приближенные методы решения сингулярных интегро-дифференциальных уравнений на разомкнутых контурах / Деп. в ВИНИТИ 11.02.1988, № 1167-В88 Деп. – 31 с. (совм. с Ахмадиевым М.Г.).

98. К численному решению полных сингулярных интегральных уравнений // Актуальные вопросы теории краевых задач и их приложения. – Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 1988. – С. 138–146.

99. Сходимость и устойчивость общего проекционного метода решения сингулярных интегральных уравнений второго рода // Там же. – С. 30–40 (совм. с Ахмадиевым М.Г.).

100. Оптимальные методы решения операторных уравнений // Труды Международной конференции по численным методам и приложениям. – София, 1988. – София: Изд-во Болг. АН, 1989. – С. 545–552 (совм. с Велевым Г.Д.).

101. Сходимость и устойчивость общего проекционного метода решения слабо сингулярных интегральных уравнений первого рода // Доклады Всесоюзного симпозиума “Методы дискретных особенностей в задачах математической физики”. – Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1989. – Часть 1. – С. 59–62.

102. Сходимость и устойчивость метода подобластей для слабосингулярного интегрального уравнения первого рода //

Там же. – С. 62–64 (совм. с Ермолаевой Л.Б.).

103. Приближенное решение функционального уравнения Амбарцумяна // Доклады АН СССР. – 1989. – Т. 304, № 2. – С. 322–325 (совм. с Аминовым Р.Х.).

104. Оптимизация прямых методов решения сингулярных интегральных уравнений I-рода с отрицательным индексом // Доклады Международного симпозиума по оптимальным вычислительным алгоритмам. Варна, 1989. – София: Изд-во Болг. АН, 1989. – С. 150–151 (совм. с Велевым Г.Д.).

105. Численные методы решения сингулярных интегральных уравнений с монотонными операторами // Краевые задачи и их приложения. - Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 1989. – С. 32–39 (совм. с Рахимовым И.К.).

106. Устойчивость метода ортогональных многочленов и её следствия // Тезисы докладов Всесоюзной конференции “Смешанные задачи механики деформируемого тела”, 1989. – Часть 1. – Одесса: Изд-во Одесск. ун-та, 1989. – С. 73 (совм. с Валеевой Р.Т.).

107. Численные методы решения одного класса интегральных уравнений // Доклады конференции “Интегральные уравнения в прикладном моделировании”. – Одесса: Изд-во Одесск. ун-та, 1989. – С. 55–56 (совм. с Ермолаевой Л.Б.).

108. Проекционные методы решения одного класса интегро-дифференциальных уравнений // Материалы междун. конф. по дифференциальным уравнениям и применениям. Болгария, Руссе, 1989. – Руссе, 1989. – С. 60.

109. Оптимальные методы решения слабо сингулярных интегральных уравнений I-рода // Экстремальные задачи теории приближения и их приложения. Тезисы докл. республиканской научной конференции. 29–31 мая 1990г. Киев, 1990. –

С. 33 (совм. с Валеевой Р.Т.).

110. Об оптимальных алгоритмах приближенного решения нелинейных сингулярных интегральных уравнений // Там же. – С. 34 (совм. с Рахимовым И.К.).

111. Оптимизация сингулярных квадратур в пространствах Гёльдера // Тезисы докладов Международной конференции по конструктивной теории функций. Варна, 1991. – София: Изд-во Болг. АН, 1991. – С. 85 (совм. с Велевым Г.Д.).

112. Об одном новом способе решения слабо сингулярного интегрального уравнения I-рода // Методы дискретных особенностей в задачах математической физики. Тезисы докладов V Всесоюзн. симпозиума. Часть 2. – Одесса: Изд-во Одесск. ун-та, 1991. – С. 14–15 (совм. с Валеевой Р.Т.).

113. К обоснованию методов квадратур и кубатур для сингулярных интегральных уравнений // Конструктивная теория функций и функциональный анализ. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1992. – Вып. 8. – С. 33–51 (совм. с Суховым Р.Н.).

114. Прямые методы решения одного класса интегральных уравнений // Краевые задачи и их приложения. – Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 1992. – С. 50–59 (совм. с Апайчевой Л.А.).

115. Оптимизация вычислительных методов: теория и приложения // Тезисы докладов Международной конференции “Лобачевский и современная геометрия”, часть 2. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1992. – С. 89–90.

116. Численный анализ сингулярных интегральных уравнений и краевых задач ТФКП // Там же. – С. 90.

117. Сплайн-метод решения слабо сингулярного интегрального уравнения первого рода // Тезисы докладов республиканской научно-технической конференции, посвященной 200-летию Н.И. Лобачевского. Т. 2. – Одесса: Изд-во Одесск. ун-та,

1992. – С. 60–61 (совм. с Валеевой Р.Т.).

118. Прямые методы решения одного класса сильно сингулярных интегральных уравнений / Деп. в ВИНИТИ Казанск. ун-том 04.09.92, № 2722-В92. – 29 с. (совм. с Самиром Ашуром).

119. Spline approximations of integral and differential equiations solutions / Intern. conf. in Approxim. theory and Funct. analysis. – Italy, Maratea, 1992. – P. 52 (совм. с Ахметовым С.М.).

120. Optimization of projection methods for solution of singular integral equations / Там же. – P. 53 (совм. с Велевым Г.Д.).

121. Оптимальная саморегуляризация одного класса некорректных задач // Тезисы докладов Международного симпозиума “Методы дискретных особенностей в математической физике”. – Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1993. – 3 с.

122. Сходимость и устойчивость общего проекционного метода решения сингулярных интегральных уравнений // Там же. – 2 с.

123. Многомерные сингулярные интегральные уравнения с положительными операторами // Дифференц. уравнения. – 1993. – Т. 29, № 9. – С. 1504–1516.

124. Оптимизация вычислительных методов / Отчет научного руководителя по теме НИР за 1993 г. ОМММ АН РТ. – 21 с.

125. Операторы Лагранжа в пространствах Никольского-Соболева // Тезисы докладов Международной конференции “Теория приближений и задачи вычислительной математики”. – Днепропетровск: Изд-во Днепропетр. ун-та, 1993. – 2 с. (совм. с Ермолаевой Л.Б.).

126. Наилучшие приближения решений одной некорректной задачи // Там же. – 3 с.

127. Оптимизация приближенных методов решения сингулярных интегральных уравнений / Отчет по теме НИР РФФИ за 1994 г. (грант 94-01-00358-а). – 15 с.

128. Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений первого рода. – Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1994. – 288 с. (монография).

129. Наилучшие приближения решений уравнения первого рода // Алгебра и анализ. Тезисы докл. Междун. конф., посвященной 100-летию Н.Г. Чеботарева. Часть 2. – Казань: Изд-во КИПКК, 1994. – С. 37–38.

130. Операторы Лагранжа в пространствах Никольского-Соболева // Там же. – С. 38–39 (совм. с Ермолаевой Л.Б.).

131. Приближенное решение интегрального уравнения первого рода // Там же. – С. 29 (совм. с Валеевой Р.Т.).

132. Наилучшие приближения решений сингулярных интегральных уравнений первого рода / Отчет научного руководителя по теме НИР за 1994 г. ОМММ АН РТ. – 20 с.

133. Методы решения интегральных уравнений с частными интегральными операторами / Казанск. ун-т. – Казань, 1995. – 33 с. – Деп. в ВИНИТИ 27.10.95, № 2870-В95 (совм. с Ермиловой Е.Г.).

134. Проекционно-итеративные методы решения сингулярных интегральных уравнений / Отчет научного руководителя по теме НИР за 1995 г. ОМММ АН РТ. – 38 с.

135. Оптимизация приближенных методов решения сингулярных интегральных уравнений / Отчет по теме НИР РФФИ за 1995 г. (грант 94-01-00358-а). – 21 с.

136. Полиномы Лагранжа в пространствах Никольского-Соболева // Доклады Международной конференции “Функциональные пространства, теория приближений и нелинейный

анализ”. – М.: Изд-во ПАИМС, 1995. – С. 88–89.

137. Конечномерные приближения решений бисингулярного интегрального уравнения // Материалы межвузовской конференции “Теория функций и приложения”. – Казань: Изд-во Казанский фонд “Математика”, 1995. – С. 15–17.

138. Наилучшие приближения интерполяционными многочленами Лагранжа в пространствах Соболева // Там же. – С. 17–20.

139. Численный анализ сингулярных интегральных уравнений. Избранные главы. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1995. – 230 с. (монография).

140. Аппроксимативные методы решения слабо сингулярного интегрального уравнения первого рода / Деп. в ВИНИТИ Казанским педаг. ун-том 12.04.96, № 1191-В96. – 41 с. (совм. с Валеевой Р.Т.).

141. Аппроксимативно-итерационные методы решения слабо сингулярных интегральных уравнений первого рода / Деп. в ВИНИТИ Казанским педаг. ун-том 27.05.1996 № 1711-В96. – 16 с. (совм с Валеевой Р.Т.).

142. Оптимальные методы решения сингулярных интегральных уравнений I-рода // Теория функций и приближений. Труды 5-ой Всесоюзной зимней Школы. Саратов, 1990. – Саратов: Изд-во СГУ, 1996. – С. 31–34. (совм. с Хайруллиной А.М.).

143. Методы решения сингулярных интегральных уравнений с положительными операторами // Дифференц. уравнения. – 1997. – Т. 33, № 3. – С. 400–409.

144. Интерполяционные полиномы в пространствах Соболева // Известия вузов. Математика. – 1997. – № 5. – С. 7–19 (совм. с Ермолаевой Л.Б.).

145. Прямые методы решения слабосингулярных интегральных уравнений с неопределенными параметрами / Деп. в ВИНИТИ Казанск. ун-том 10.07.1996 г., № 2285-В96. – 16 с. (совм. с Сурай Л.А.).

146. Решение проблемы саморегуляризации некорректно поставленных задач // Алгебра и анализ. Материалы международной научной конференции, 1997. – Казань: Изд-во Казанского матем. об-ва, 1997. – С. 51–52.

147. Интегро-дифференциальные уравнения с параметрами // Там же. – С. 4–5 (совм. с Абрамовой В.В.).

148. Интервальные квадратурные формулы для сингулярных интегралов / Деп. в ВНИИТЭИ агропрома РФ 31.03.1997, № 17136 (БД НИИТЭИ агропрома, вып. 2.2, 1997). – 17 с. (совм. с Андриановой А.М.).

149. Optimization of projection methods for solution of singular integral equations // Годишник на висшите учебни заведения. Приложна математика. – София: Изд-во “Наука и изкуство”, 1996. – 12 с. (совм. с Велевым Г.Д.).

150. Дифференциально-операторные уравнения с параметрами / Тезисы докладов Международной научно-технической конференции (23-25 сентября 1997 г.). – Набережные Челны: Изд-во КамПИ,1997. – С. 14 (совм. с Абрамовой В.В.).

151. Оптимальные методы решения интегро-дифференциальных уравнений // Отчет по теме НИР АН РТ № 01-07/97 от 3 апреля 1997 г. – Казань, 1997. – 39 с.

152. Оптимизация численных методов: теория и приложения // Оптимизация численных методов. Тезисы докладов Международной научной конференции. – Уфа: ИМВЦ УНЦ РАН, 1998. – С. 30.

153. Наилучшие приближения решений операторных урав-

нений /Теория приближений и гармонический анализ. – Тезисы докладов Международной научной конференции. – Тула: Тул.ГУ, 1998. – С. 73–74 (совм. с Еникеевой С.Р.).

154. Интерполяция по экстремальным точкам многочленов Чебышева / Там же. – С. 74–75 (совм. с Ермолаевой Л.Б.).

155. Общая теория приближенных методов функционального анализа. – Казань: Изд-во Казан, ун-та, 1998. – 120 с. (совм. с Агачевым Ю.Р.).

156. Методы решения нелинейных сингулярных интегральных уравнений/ Отчет по теме НИР АН РТ № 05-01/98 от 3 апреля 1998 г. – Казань, 1998 г. – 44 с.

157. Методы решения интегральных уравнений с монотонными операторами // Теория функций, ее приложения и смежные вопросы. Материалы школы-конференции, посвященной 130-летию Д.Ф. Егорова. Казань, 1999. – Казань: Казанское математическое общ-во, 1999. – С. 60–61.

158. О погрешности численного дифференцирования //Там же. – С. 61–62.

159. Оптимизация интервальных квадратурных формул // Там же. – С. 20–21 (совм. с Андриановой А.М.).

160. Численный анализ сингулярных интегральных и интегро–дифференциальных уравнений. – Казань, 1999 (Монография в рукописи, 750с.).

161. Оптимизация прямых и проекционных методов решения операторных уравнений// Известия вузов. Математика. – 1999. – № 12. – С. 3–18.

162. Методы решения многомерных сингулярных интегральных уравнений. /Отчет по теме НИР АНТ. № 5 9.1.1/ 99(ФП). – Казань, 1999. – 40 с.

163. Оптимизация квадратурных формул для слабосингулярных интегралов/ Труды Математика. центра им. Н.И.Лобачевского. Том 5. Актуальные проблемы математики и механики. – Казань: Изд-во “Унипресс”, 2000. – С. 18–19 (совм. с Андриановой А.М.).

164. Об одном нелинейном сингулярном интегральном уравнении/ Там же. – С. 54–57.

165. Методы решения одного класса интегральных уравнений/ Там же. – С. 58–60 (совм. с Рахимовым И.К.).

166. Оптимизация проекционных методов решения сингулярных интегральных уравнений/ Дифференциальные и интегральные уравнения. Тезисы докладов Международной научной конференции. – Одесса: Изд-во АстроПринт, 2000. – С. 6.

167. Об одном новом прямом методе решения уравнения теории крыла/ Там же. – С. 61 (совм. с Закиевым М.И., Семеновым И.П.).

168. Оптимальные методы решения операторных уравнений и их приложения к слабосингулярным интегральным уравнениям/ Отчет по теме НИР АНТ. № 9 19/ 2000(Ф). – Казань, 2000. – 84 с.

169. Оптимальные проекционные решения краевых задач ТФКП / Отчет ВТК по теме НИР АНТ за 2000г. Казань, 2000.

170. Методы решения одного класса нелинейных сингулярных интегральных уравнений // Комплексный анализ, дифференциальные уравнения и смежные вопросы. Труды Международной научной конференции. Т. 3. – Уфа: Изд-во БГУ, 2000. – С. 10–16 (совм. с Агачевым Ю.Р., Рахимовым И.К.).

171. Оптимизация квадратурных формул в классе функций $H_k[\varphi]$ // Труды Математического центра им. Н.И. Лобачевского. Том 8. Теория функций, ее приложения и смежные

вопросы. – Казань: Изд-во “ДАС”, 2000. – С. 16–17 (совм. с Апайчевой Л.А.).

172. Аппроксимация в пространстве Зигмунда и ее приложения // Там же. – С. 28–30 (совм. с Аюповой Е.Ф.).

173. Оптимальные методы решения одного класса интегродифференциальных уравнений / Там же. – С. 61–63 (совм. с Ермолаевой Л.Б).

174. Кафедра теории функций и приближений // Механико-математический факультет Казанского университета. Очерки истории. / Под ред. В.В. Вишневского, В.В. Клокова и С.Р. Насырова. Казань, Казанский университет, 2000. – С. 86–98 (совм. с Липачевым Е.К.).

175. Оптимальные проекционные методы решения одного класса интегродифференциальных уравнений // Известия вузов. Математика. – 2001. – № 1. – С. 24–35 (совм. с Закиевым М.И., Семеновым И.П.).

176. Методы решения нелинейных сингулярных интегральных уравнений с монотонными операторами // Известия вузов. Математика. – 2001. – № 7. – С. 15–27 (совм. с Рахимовым И.К.).

177. Основы численного анализа (учебное пособие для студентов 3–5 курсов, в рукописи, 2001 г.). – 450 с.

178. Об одном прямом методе решения слабосингулярного интегрального уравнения первого рода. – Казань: Изд-во “Унипресс”, 2001. – С. 37–39 (совм. с Валеевой Р.Т.).

179. Методы решения слабосингулярного интегрального уравнения первого рода с неопределенными параметрами. – Казань: Изд-во “Унипресс”, 2001. – С. 52–57 (совм. с Ожеговой А.В.).

180. Об одном оптимальном сплайн-методе решения опера-

торных уравнений // Известия вузов. Математика. – 2002. – № 2. – С. 23–36.

181. Наилучшие приближения решений операторных уравнений и оптимизация вычислительных методов / Юбилейный сборник избранных трудов членов Академии наук Республики Татарстан. Отделение математики, механики и машиноведения. – Казань: Изд-во Фолиант, 2002. – С. 165–192.

182. Решение операторных и интегральных уравнений методом Боголюбова–Крылова //Известия вузов. Математика. – 2002. – № 10. – С. 34–47.

183. Оптимальные методы решения некорректных интегральных уравнений и краевых задач теории функций / Отчет о выполнении НИР АН РТ на средства НИОКР РТ (договор–подряда № 05-5.1-81/2001(Ф)). – Казань, 2002. – 70 с. (совм. с Агачевым Ю.Р., Галимяновым А.Ф., Липачевым Е.К. и др.).

184. Оптимизация прямых методов решения периодических краевых задач // Известия вузов. Математика. – 2002. – № 12. – С. 55–65.

185. Теоретико-функциональное обоснование метода осциллирующих функций для сингулярных интегральных уравнений. Отчет по теме НИР на средства Фонда НИОКР РТ (договор 05-5.1-68/ 2002(Ф) от 20.05.2002 г.). – Казань, 2002. – 47 с.

186. Оптимальные методы решения интегральных уравнений со специальными ядрами. Отчет по теме НИР на средства Фонда НИОКР РТ (договор 05-5.1-81/ 2002(Ф) от 20.05.2002 г.). – Казань, 2002. – 70 с.

187. Решение операторно–дифференциальных уравнений методом Боголюбова–Крылова. Отчет по теме НИР ОМММ АН РТ (договор 05-5.1.1/ 2002(ФП) от 20.04.2002 г.). – Казань,

2002. 37 с.

188. Об обращении многомерных сингулярных интегральных уравнений I рода // Известия вузов. Математика. – 2003. – № 10. – С. 13–25 (совм. с Валеевой Р.Т.).

189. Наилучшие приближения решений линейных уравнений и оптимизация вычислительных методов // Материалы шестой Казанской международной летней школы-конференции “Теория функций, ее приложения и смежные вопросы”. – Труды Математического Центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 19. – Казань: Изд-во Казанск. Матем. об-ва, 2003. – С. 55–60.

190. К обоснованию квадратурного метода решения интегральных уравнений // Там же. – С. 60–62 (совм. с Ермолаевой Л.Б. и Назиповым И.Т.).

191. Методы решения двумерных сингулярных интегральных уравнений // Там же. – С. 62–67 (совм. с Маклецовым С.В., Рахимовым И.К., Тихоновым И.Н.).

192. Оптимизация прямых методов решения одного класса интегродифференциальных уравнений // Известия вузов. Математика. – 2003. – № 12. – С. 31–40 (совм. с Ермолаевой Л.Б.).

193. Кафедра теории функций и приближений Механико-математический факультет Казанского университета. Очерки истории. Издание 2-е, переработанное и дополненное. / Под ред. В.В. Вишневского, В.В. Клокова и С.Р. Насырова. Казань, Казанский университет, 2003. – С. 96–109.

194. Сплайн-методы решения регулярных и сингулярных интегральных уравнений. Отчет по теме НИР на средства Фонда НИОКР РТ (договор 05-5.1-210/ 2003(Ф) от 14.04.2003 г.). – Казань, 2003. – 69 с.

195. Решение операторных уравнений прямыми метода-

ми. Отчет по теме НИР ОМММ АН РТ (договор 05-5.1.1/ 2003(ФП) от 7.04.2003 г.). – Казань, 2003. 37 с.

196. Проекционные методы решения сингулярных интегральных уравнений// Известия вузов. Математика. – 2004. – № 7. – С. 12–24.

197. Методы решения бисингулярных интегральных уравнений с внутренними коэффициентами// Известия вузов. Математика. – 2004. – № 8. – С. 11–25.

198. Решение операторных уравнений методом минимальных невязок // Материалы международной научной конференции “Актуальные проблемы математики и механики”. – Труды Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 25. – Казань: Изд-во Казанск. матем. об-ва, 2004. – С. 71–74.

199. Об одном прямом методе решения сингулярных интегральных уравнений // Там же. – С. 75–76 (совм. с Маклецовым С.В. и Тихоновым И.Н.).

200. Проекционные методы решения сингулярных интегральных уравнений с фиксированными особенностями // Там же. – С. 76–78 (совм. с Хазириши Э.О.).

201. Сплайн-методы решения сингулярных интегральных уравнений с ядрами Гильберта и Коши. Отчет по теме НИР на средства Фонда НИОКР РТ (договор 05-5.1-210/ 2004(Ф) от 15.03.2004 г.). – Казань, 2004. – 65 с.

202. Интерполяция по экстремальным точкам многочленов Чебышева и ее приложения. Отчет по теме НИР ОМММ АН РТ (договор 05-5.1.1/ 2004(ФП) от 26.04.2004 г.). – Казань, 2004. – 29 с.

203. Теория функций и приближений // В книге “История науки в Казанском университете, 1980-2003 гг.” – Казань: изд-во Казанск. ун-та, 2005. – С. 28–30 (совм. с Липачевым Е.К.).

204. Решение уравнения теории крыла методом сплайн-коллокации // Материалы Седьмой международной Казанской летней научной школы-конференции. – Труды Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 30. – Казань: Изд-во Казанск. матем. об-ва, 2005. – С. 29–30 (совм. с Григорьевой О.Н.).

205. Методы решения одного класса многомерных сингулярных интегральных уравнений. // Там же. – С. 30–34 (совм. с Губайдуллиной Р.К.).

206. О непрерывности и компактности сингулярных интегральных операторов // Там же. – С. 34–35 (совм. с Першагиным М.Ю.)

207. Интерполирование по экстремальным точкам многочленов Чебышева и его применения // Известия вузов. Математика. – 2005. – № 5. – С. 22–41 (совм. с Ермолаевой Л.Б.).

208. Полисингулярные интегральные уравнения с положительными операторами// Известия вузов. Математика. – 2005. – № 11. – С. 7–15.

209. Сплайн-методы решения интегро–дифференциальных уравнений. Отчет по теме НИР на средства Фонда НИОКР РТ (договор 05-5.1-210/ 2005(Ф) от 30.05.2005 г.). – Казань, 2005. – 75 с.

210. Квадратурные формулы наивысшей степени точности и их приложения. Отчет по теме НИР ОМММ АН РТ (договор 05-5.1.1/ 2005(ФП) от 21.03.2005 г.). – Казань, 2005. – 37 с.

211. Теория приближенных методов решения операторных уравнений. – Казань: Казан. ун–т, 2006. – 112 с.

203. Прямые и проекционные методы решения слабосингулярных интегральных уравнений I–рода. – Казань: Казан. ун–т, 2006. – 137 с.

212. Квадратурно-кубатурный метод решения нелинейных

бисингулярных интегральных уравнений с монотонными операторами // Известия вузов. Математика. – 2006. – № 6. – С. 14–24 (совм. с Тихоновым И.Н.).

213. Об одном нелинейном бисингулярном интегральном уравнении // Матеріали II міжнародноі науково-практичноі конференціі “Дні науки - ’2006”. 17–28 квітня 2006 року. Т. 35. Математика. Дніпропетровськ. Наука і освіта. 2006. – С. 7–12 (совм. с Тихоновым И.Н.).

214. О кубатурных формулах для одного класса многомерных слабо сингулярных интегралов // Там же. – С. 12–19 (совм. с Губайдуллиной Р.К.).

215. Методы решения одномерных интегральных уравнений с монотонными операторами. Отчет по Госконтракту № 05-5.1-26/ 2006(Г) от 10.11.2006 г.). – Казань, 2006. – 42 с.

216. Методы решения регулярных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. Отчет по теме НИР ОМММ АН РТ (договор 05-5.1.1/ 2006(ФП) от 21.11.2006 г.). – Казань, 2006. – 63 с.

217. О непрерывности и компактности сингулярных интегральных операторов // Известия вузов. Математика. – 2009. – № 8. – С. 3–10.

Ю. Р. Агачев, М. Ю. Першагин

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
jagachev@gmail.com, mpershagin@mail.ru

О СХОДИМОСТИ МЕТОДА КОЛЛОКАЦИИ ДЛЯ УСЛОВНО–КОРРЕКТНЫХ ИНТЕГРО–ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассматривается задача Коши

$$x^{(i)}(a) = 0,\ i = \overline{0, m-1}, \tag{1}$$

для интегро-дифференциального уравнения вида

$$Kx \equiv x^{(m)}(t) + \sum_{k=1}^{m} g_k(t) x^{(m-k)}(t) + \\ + \sum_{j=0}^{p} \int_a^b h_j(t,s) x^{(j)}(s)\, ds = y(t), \quad -\infty < a < t \leqslant b < \infty, \tag{2}$$

где параметры $m+1, p \in \mathbb{N}$ и $m < p$. Как известно, эта задача является некорректно поставленной по Адамару, но при определенных условиях ее можно ставить корректно за счет выбора пары пространств X искомых элементов и Y правых частей. Одной из таких пар является (см. [1]) пара (X, Y) пространств Соболева, где $Y = W^{p-m}L_2$ и $X \subset W^p L_2$ пространство функций, удовлетворяющих начальным условиям (1). Нормы в этих пространствах берутся согласованными:

$$\|y\|_Y = \|y\|_{L_2} + \|y^{(p-m)}\|_{L_2}\ (y \in Y),$$

$$\|x\|_X = \|x^{(m)}\|_{L_2} + \|x^{(p)}\|_{L_2}\ (x \in X).$$

Достаточные условия корректной постановки задачи (1), (2) дает следующая

Лемма. *Пусть выполнены условия:*

1) $g_k, k = \overline{1,m}, y \in Y$ *;*

2) $h_j \in Y \times L_1,\ j = \overline{0, m-1}$ *;*

3) $h_j \in Y \times L_2,\ j = \overline{m,p}$ *;*

4) задача (1), (2) имеет единственное решение при любой $y \in Y$ *.*

Тогда задача решения (1), (2) в паре пространств (X, Y) *поставлена корректно по Адамару.*

Будем решать задачу (1), (2) полиномиальным методом коллокации. Приближенное решение будем искать в виде

$$x_n(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k (t-a)^{k+m-1}, \tag{3}$$

неизвестные коэффициенты $\{c_k\}$ определим по методу коллокации из условий:

$$x_n^{(m)}(t_l) + \sum_{k=1}^{n} g_k(t_l) x_n^{(m-k)}(t_l) + \\ + \sum_{j=0}^{p} \int_a^b h_j(t_l, s) x_n^{(j)}(s)\, ds = y(t_l), l = \overline{1,n}, \tag{4}$$

где $\{t_l\}_{l=1}^n \subset [a,b]$ — некоторая фиксированная система точек.

Эти условия относительно $\{c_k\}$ представляют собой систему линейных алгебраических уравнений с квадратной матрицей.

Теорема 1. *Пусть выполнены предположения:*

1) $g_k, k = \overline{1,m}, y \in C^{(p-m)}[a,b] \equiv \widetilde{Y}$ *;*

2) $h_j \in \widetilde{Y} \times L_1,\ j = \overline{0, m-1}$ *;*

3) $h_j \in \widetilde{Y} \times L_2,\ j = \overline{m,p}$ *;*

4) задача (1), (2) однозначно разрешима при любой $y \in Y$ *;*

5) $\{t_j\}_{j=1}^n$ *— нули полинома Лежандра для сегмента* $[a,b]$.

Тогда система (4) метода колокации имеет единственное решение $\{c_k^*\}$ *для всех* n, *начиная с некоторого* $n_0 \in \mathbb{N}$. *Приближенные решения* $x_n^*(t)$, *построенные по формуле (3) при* $c_k = c_k^*$, $k = \overline{1,n}$, *сходятся к точному решению* $x^*(t)$ *задачи (1), (2) в пространстве* X. *Скорость сходимости может быть охарактеризована порядковым соотношением*

$$\|x^* - x_n^*\|_X = O\{E_{n-1}(x^{*(m)})_{\widetilde{Y}}\},$$

где $E_{n-1}(z)_{\widetilde{Y}}$ *— наилучшее приближение функции* $z \in \widetilde{Y}$ *алгебраическими полиномами степени не выше* $n-1$.

В классе $\widetilde{Y}$ введем подкласс $\widetilde{Y}_1$ функций, у которых производная порядка $p-m$ удовлетворяет условию Дини-Липшица.

Теорема 2. *Пусть:*

1) $g_k, k = \overline{1,m}, y \in \widetilde{Y}_1$;

2) $h_j \in \widetilde{Y}_1 \times L_1$, $j = \overline{0, m-1}$;

3) $h_j \in \widetilde{Y}_1 \times L_2$, $j = \overline{m,p}$;

4) задача (1), (2) однозначно разрешима при любой $y \in \widetilde{Y}$;

5) $\{t_j\}_{j=1}^n$ *— узлы Чебышева I-го или II-го рода.*

Тогда система (4) метода колокации имеет единственное решение $\{c_k^*\}$ *для всех достаточно больших* n. *Приближенные решения* $x_n^*(t)$ *сходятся к точному решению* $x^*(t)$ *задачи (1), (2) в пространстве* $\widetilde{X} = C^p[a,b]$. *Для погрешности прближенных решений в пространстве* $\widetilde{X}$ *справедлива порядковая оценка*

$$\|x^* - x_n^*\|_{\widetilde{X}} = O\{\ln n \cdot E_{n-1}(x^{*(m)})_{\widetilde{Y}}\}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Агачев Ю.Р., Першагин М.Ю. *Корректная постановка и решение краевых задач для одного класса интегро-дифференциальных уравнений* // Материалы междун. конф. по алгебре, анализу и геометрии. – Казань: Казанский университет, изд-во Академии наук РТ, 2016. – С. 82–83.

Ю. Р. Агачев, А. В. Савина

Казанский (Приволжский) федеральный университет,

jagachev@gmail.com, AVSavina@kpfu.ru

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ В ГЛАВНОЙ ЧАСТИ

Пусть α — заданное вещественное число, причем $m-1<\alpha<m$, $m\in\mathbb{N}$. Рассмотрим задачу Коши

$$\varphi^{(i)}(a)=0, \quad i=\overline{0,m-1}, \tag{1}$$

для дифференциального уравнения дробного порядка

$$K\varphi\equiv(D^{\alpha}_{a+}\varphi)(x)+\sum_{k=0}^{m-1}p_k(x)\varphi^{(k)}(x)=f(x), \quad a<x\leqslant b, \tag{2}$$

где $f(x)$, $p_k(x)$, $k=\overline{0,m-1}$, — известные функции на $[a,b]$, $\varphi(x)$ — искомая; $(D^{\alpha}_{a+}\varphi)(x)$ есть дробная производная

(левосторонняя) функции $\varphi(x)$ порядка α в смысле Римана-Лиувилля (см., например, [1]), она определяется формулой

$$(D^{\alpha}_{a+}\varphi)(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\frac{d^m}{dx^m}\int\limits_a^x \frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{\alpha-m+1}} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\frac{d^m}{dx^m}\int\limits_a^x \frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{\{\alpha\}}},$$

где $m = [\alpha]+1$, $[\alpha]$ и $\{\alpha\}$ — целая и дробная части числа α соответственно. Если функция $\varphi(x)$ имеет суммируемую производную порядка m, удовлетворяющую начальным условиям, то

$$(D^{\alpha}_{a+}\varphi)(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int\limits_a^x \frac{\varphi^{(m)}(t)}{(x-t)^{\alpha-m+1}} = (I^{\{\alpha\}}_{a+}\varphi^{(m)})(x),$$

где $(I^{\{\alpha\}}_{a+}g)(x)$ есть дробный интеграл (левосторонний) порядка $\{\alpha\}$ функции $g(x)$ в смысле Римана-Лиувилля. Поэтому, если решение задачи (1), (2) содержится в классе m раз дифференцируемых функций, то мы будем иметь эквивалентную задачу Коши (1) для интегро-дифференциального уравнения

$$K\varphi \equiv (I^{\{\alpha\}}_{a+}\varphi^{(m)})(x) + \sum_{k=0}^{m-1} p_k(x)\varphi^{(k)}(x) = f(x), \quad a < x \leqslant b. \quad (3)$$

Пусть $\Phi = \overset{\circ}{W}{}^m H_\beta$ — пространство функций $\varphi(x)$, имеющих производную $\varphi^{(m)}(x) \in \overset{\circ}{H}_\beta$ и удовлетворяющих начальным условиям (1), где $0 < \beta < 1 - \{\alpha\}$, а $\overset{\circ}{H}_\beta$ обозначает класс Гельдера H_β функций, обращающихся в нуль на левом конце. Введем также пространство $F = \overset{\circ}{H}_{\{\alpha\}+\beta}$. В этих пространствах нормы введем следующим образом:

$$\|f\|_F = \|f\|_C + H(f;\{\alpha\}+\beta), \quad f \in F,$$

$$\|\varphi\|_\Phi = \|\varphi^{(m)}\|_C + H(\varphi^{(m)};\beta), \quad \varphi \in \Phi,$$

где $H(g;\delta)$ — наименьшая постоянная Гельдера функции $g(x) \in H_\delta$.

Известные свойства дробно-интегрального оператора $I_{a+}^{\{\alpha\}}$, участвующего в главной части уравнения (3), позволяют получить эквивалентность утверждения об однозначной разрешимости задачи (1), (2) с оператором $K : \Phi \to F$ при любой правой части из F утверждению о двусторонней непрерывной обратимости оператора K этой задачи.

Приближенное решение задачи (1), (2) будем искать в виде

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k (x-a)^{k+m-\{\alpha\}} \equiv \sum_{k=1}^{n} c_k (x-a)^{k+2m-\alpha-1}. \qquad (4)$$

Неизвестные коэффициенты $\{c_k\}$ определим согласно проекционному методу, определяемому некоторым оператором P_n проектирования пространства F в подпространство $H_n \subset F$ алгебраических полиномов степени не выше n. Это означает, что $\varphi_n(x)$ вида (4) определяется как точное решение уравнения

$$K_n\varphi_n \equiv P_n K \varphi_n = P_n f, \quad \varphi_n \in \Phi_n \subset \Phi. \qquad (5)$$

Если функции $p_k(x)$, $k = \overline{0, m-1}$, $f(x) \in H_\lambda \bigcap F$, $\{\alpha\} + \beta < \lambda \leqslant 1$, задача (1), (2) имеет единственное решение при любой правой части из F и операторы $P_n : Y \to Y_n$ имеют норму $\|P_n\| = O(\ln n)$, $n \to \infty$, то уравнение (5) также имеет единственное решение при всех $n \geqslant n_0 \in \mathbb{N}$, которое сходится к точному решению задачи (1), (2) в метрике пространства Φ.

Как частный случай, отсюда следует сходимость методов Галеркина, коллокации и подобластей (последние два по определенным системам узлов).

ЛИТЕРАТУРА

1. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. А. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.

И. И. Аксанова, Д. З. Уразова

МБОУ «Высокогорская СОШ № 2», ilsi050@mail.ru

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ОРБИТЫ В ДИНАМИКЕ КУСОЧНО-ГЛАДКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ С ПАРАМЕТРОМ

Одномерные дискретные динамические системы, находят широкое применение в физике, технике, биологии, экологии, социологии и других науках. Например, при изучении простых моделей финансовых рынков или построении экологических и популяционных моделей исследуют динамические системы, заданные с помощью непрерывных и кусочно-непрерывных отображений, в частности, симметрические и асимметрические тентообразные отображения, заданные системой двух линейных функций с одним или двумя параметрами (см., напр., [1-5]). Отметим, что исследованию динамики таких отображений уделялось серьёзное внимание и эти модели изучены достаточно хорошо. Следующим шагом на пути исследования тентообразных отображений является изучение случая, когда функции в системе нелинейны. Мы рассматриваем один из частных случаев этой задачи, когда функция зависит от одного параметра, что позволяет провести полное исследование динамики задан-

ного нелинейного тентообразного отображения

$$f(x) = \begin{cases} ax^2, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ ax^{-1}, & x > 1. \end{cases} \tag{1}$$

В результате описано поведение орбит любой точки x из области определения функции f для всех вещественных значений параметра a. Наибольший интерес представляет случай $a > 1$. Отображение здесь имеет три неподвижные и две в конечном итоге неподвижные точки, причем $x_1 = 0$ является притягивающей, $x_2 = 1/a$ — отталкивающей, а $x_3 = a^{1/2}$ не является ни притягивающей, ни отталкивающей. Кроме того, орбиты всех точек x отрезка $[1, a]$ являются двупериодическими, за исключением точки x_3. Двупериодические орбиты представляют большой интерес при изучении и прогнозировании численности биологической популяции, математическая модель которой строится как дискретная динамическая система, заданная отображением f. Исследование динамики f позволяет сделать вывод, что наиболее благоприятные условия для жизнедеятельности и развития популяции будут при значениях параметра $a > 1$ и для любых значений переменной x из интервала $(1/a; a^2)$. В этом случае численность популяции, в конечном итоге, будет колебаться между двумя значениями x' и x'' (двупериодическая орбита), что и обеспечивает её стабильность, как, например, в случае популяции тихоокеанского лосося.

ЛИТЕРАТУРА

1. Al-Shameri W.F.H., Mahiub M.A. *Some Dynamical Properties of the Family of Tent Maps* // Int. J. of Math. Analysis. – 2013. – V. 7, No 29. – P. 1433-1449.

2. Lindstrom T. *Dynamical properties of maps fitted to data in the noise-free limit* // J. of Biological Dynamics. – 2013. – V. 7, No 1. – P. 108-116

3. Sushko I., Gardini L. Degenerate bifurcations and border collisions in piecewise smooth 1D and 2D maps // Int. J. of Bifurcation and Chaos. – 2010. – V. 20, No 7. – P. 2045–2070.

4. Tramontana F., Gardini L. and Westerhoff F. *Intricate Asset Price Dynamics and One-Dimensional Discontinuous Maps.* – In: Nonlinear Economic Dynamics. – New York: Nova Science Publishers, 2010.

5. Tramontana F., Gardini L., Puu T. *Duopoly games with alternative technologies* // J. Econ. Dyn. Contr. – 2008. – V. 33. – P. 250-265.

К. Ф. Амозова, Е. Г. Ганенкова

Петрозаводский государственный университет,
amokira@rambler.ru, g_ ek@inbox.ru

КРИТЕРИИ ОДНОЛИСТНОСТИ И ПОЛНОЙ α–ДОСТИЖИМОСТИ ДЛЯ p–ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Вопросу однолистности аналитических в $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функций посвящено большое количество работ, существует множество критериев однолистности аналитических функций. Для гармонических функций известно всего несколько критериев однолистности. Для p–гармонических в $\mathbb{D}$ функций известны лишь достаточные условия однолистности.

Функция $f \in C^{2p}(\mathbb{D})$, $p \in \mathbb{N}$, называется *p–гармонической* (см. [1]), если $\Delta^p f = 0$ в $\mathbb{D}$, где Δ — оператор Лапласа.

Известно (см. [3]), что функция $f \in C^{2p}(\mathbb{D})$ является p–гармонической тогда и только тогда, когда f имеет следующее представление:

$$f(z) = \sum_{k=1}^{p} |z|^{2(k-1)} f_{p-k+1}(z), \tag{1}$$

где каждая функция

$$f_{p-k+1} = h_{p-k+1} + \overline{g}_{p-k+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{p-k+1} z^n + b_n^{p-k+1} \overline{z}^{\,n},$$

$k = 1, \ldots, p$, является гармонической в $\mathbb{D}$.

Авторами получен критерий однолистности для p–гармонических в $\mathbb{D}$ функций в терминах их коэффициентов.

Теорема 1. *Пусть $f(z)$ – однолистная в некоторой окрестности нуля, p-гармоническая в $\mathbb{D}$ функция вида (1). Функция $f(z)$ однолистна в $\mathbb{D}$ $\Leftrightarrow$ $\forall$ $z \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$, $t \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, выполняется следующее условие:*

$$\sum_{k=1}^{p} |z|^{2(k-1)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^{p-k+1} z^{\,n} - b_n^{p-k+1} \overline{z}^{\,n} \right) \frac{\sin nt}{\sin t} \neq 0.$$

По аналогии с p–гармоническими функциями получен критерий однолистности для p–аналитических функций, т. е. функций вида $F(z) = \sum\limits_{k=0}^{p-1} \overline{z}^{\,k} a_k(z)$, где $a_k(z)$ — аналитические в $\mathbb{D}$ функции.

В [5] П. Личберски и В. В. Старков дали определение α–достижимой области. Область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $0 \in \Omega$, называется *α–достижимой* (относительно 0), $\alpha \in [0; 1)$, если для каждой точки $p \in \partial\Omega$ существует такое число $r = r(p) > 0$, что конус $K_+(p, \alpha, r) = \left\{ x \in \mathbb{R}^{\,n} : \left(x - p, \dfrac{p}{\|p\|} \right) \geqslant \|x - p\| \cos \dfrac{\alpha\pi}{2}, \|x - p\| \leqslant r \right\}$ содержится в $\mathbb{R}^n \backslash \Omega$.

Они доказали, что α–достижимые области являются областями с условием конуса, и что биголоморфные в открытом единичном евклидовом шаре $\mathbb{D}^N$, $N \geqslant 1$, функции $f : \mathbb{D}^N \longrightarrow \mathbb{C}^N$, $f(0) = 0$, отображающие $\mathbb{D}^N$ на α–достижимую область, обладают *свойством наследственности* (наследуют α–достижимость), т. е. если $r \in (0;1)$, то каждая область $f(r\mathbb{D}^N)$ α–достижима. Известно, что в классе гармонических функций $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(0) = 0$, сохраняющих ориентацию в $\mathbb{D}$, свойство выпуклости или звездообразности области $f(\mathbb{D})$ не наследуется. В таких случаях выделяют и рассматривают подкласс *вполне выпуклых* (*вполне звездообразных*) функций, которые обладают свойством наследственности (см. [4]).

Будем говорить, что p–гармоническая функция f, $f(0) = 0$, является вполне α–достижимой, $\alpha \in [0,1)$, если для каждого $r \in (0,1]$ f отображает $\mathbb{D}_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ на α–достижимую область. Получен критерий полной α–достижимости для p–гармонических функций.

Теорема 2. *Пусть $f(z)$ — p–гармоническая в $\mathbb{D}$ функция вида (1), $f(0) = 0$ и $J_f(z) > 0$ в $\mathbb{D}$. Тогда f вполне α–достижима ($\alpha \in [0,1)$) $\Leftrightarrow$ $\forall z \in \mathbb{D}$ выполняется условие:* $\sum\limits_{k=1}^{p} |z|^{2(k-1)} \mathrm{Re}\,\{z(h'_{p-k+1}\overline{f} - g'_{p-k+1}f)\} \geqslant \sin\frac{\alpha\pi}{2} \cdot |f| \cdot \sqrt{A^2(z) + B^2(z)}$, *где* $A(z) = \mathrm{Re}\{z \sum\limits_{k=1}^{p} |z|^{2(k-1)}(h'_{p-k+1} - g'_{p-k+1})\}$, $B(z) = \mathrm{Im}\{z \sum\limits_{k=1}^{p} |z|^{2(k-1)}(h'_{p-k+1} + g'_{p-k+1})\}$.

Как следствие, получаем критерий полной α–достижимости для бигармонических ($p = 2$), гармонических ($p = 1$), а также известный критерий (см. [6], [2]) для аналитических ($p = 1$, $g = 0$) в $\mathbb{D}$ функций; также критерий полной звездообразности (случай $\alpha = 0$) для p–гармонических, гармонических ($p = 1$)

[4], и аналитических $(p = 1,\ g = 0)$ $\Big($хорошо известное условие звездообразности $\Re\left\{\frac{z\,f'(z)}{f(z)}\right\} \geqslant 0\Big)$ в $\mathbb{D}$ функций.

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы стратегического развития ПетрГУ и РФФИ (проект 14-01-00510).

ЛИТЕРАТУРА

1. Балк М. Б. *Полианалитические функции и их обобщения* // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. матем. Фундамент. направления. – 1991. – Т. 85. – С. 187–246.

2. Brannan D. A. and Kirwan W. E. *On some classes of bounded univalent functions* // J. London Math. Soc. – 1969. – V. 2. – № 1. – C. 431–443.

3. Chen Sh., Ponnusamy S. and Wang X. *Bloch constant and Landau's theorem for planar p–harmonic mappings* // J. Math Anal. Appl. – 2011. – V. 373. – № 1. – C. 102–110.

4. Chuaqui M., Duren P., and Osgood B. *Curvature properties of planar harmonic mappings* // Comput. Methods Funct. Theory. – 2013. – V. 4. – № 1. – C. 127–142.

5. Liczberski P. and Starkov V. V. *Domains in $\mathbb{R}^n$ with conical accessible boundary* // J. Math. Anal. Appl. – 2013. – V. 408. – № 2. – C. 547–560.

6. Stankiewicz J. *Quelques problèmes extrémaux dans les classes des fonctions α–angulairement étoilées* // Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska, Sectio A. – 1966. – V. XX. – C. 59–75.

Д. В. Бережной, Н. Ф. Габсаликова

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
n.gabsalikova@yandex.ru

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ СЫПУЧИХ СПЛОШНЫХ СРЕД НА ОСНОВЕ МЕТОДА ЧАСТИЦ

Нарушение непрерывности материалов при сильном деформировании и разрушении создает много проблем в описании подобных явлений. Развитие вычислительной техники позволило вернуться к проблеме описания сред на микроуровне. В последние время все чаще стал использоваться метод частиц. Количественная сложность компьютерной модели позволяет получать качественно новые результаты. Метод частиц заключается в том, что тело представляется как совокупность взаимодействующих частиц. В качестве таких частиц выступают атомы, молекулы и материальные точки. На данный момент потенциалы межатомного взаимодействия для большинства материалов известны, они позволяют моделировать динамику молекулярных взаимодействий с высокой степенью точности.

Несомненное преимущество метода частиц по сравнению с методами, основанными на концепции сплошной среды, заключается в том, что он требует значительно меньше предположений о свойствах материала. Использование только простейшего потенциала взаимодействия (например, Леннарда-Джонса) позволяет моделировать такие сложнейшие эффекты, как пластичность, образование трещин, разрушение, температурное изменение свойств материала, фазовые переходы. Для описания каждого из этих эффектов в рамках сплошной среды требуется отдельная теория, в то время как при моделирова-

нии методом частиц эти эффекты получаются автоматически, в результате интегрирования уравнений движения.

Специфика метода частиц состоит в необходимости интегрирования очень большого числа уравнений. При расчетах основное время уходит на вычисление силы, действующей на данную частицу. Связано это с существенной нелинейностью силы взаимодействия и необходимостью суммирования большого числа слагаемых (прежде всего сил взаимодействия с соседними частицами). Указанное обстоятельство снижает эффективность методов, требующих на каждом шаге многократного вычисления правой части уравнения.

Для ускорения расчета потенциал взаимодействия обычно обрезается на некотором заданном расстоянии, то есть считается, что взаимодействие между частицами пренебрежимо мало и оно не учитывается в расчетах. Поэтому для расчетов, производимых в данной работе, пространство разбивается на кубические ячейки и для частиц, находящихся в некоторой ячейке, рассматривается взаимодействие только с частицами из пограничных с ней ячеек. Таким образом, удается добиться, что число операций оказывается пропорциональным числу частиц. Вся область пространства разделяется между процессорами, на каждом шаге интегрирования процессор проводит вычисление внутри отведенной ему области с захватом граничных ячеек из соседних областей, а затем происходит обмен информацией о частицах, находящихся в пограничных ячейках.

Используемый в работе потенциал Леннарда-Джонса является двухпараметрическим, поэтому он имеет очень ограниченные возможности для вариации макроскопических параметров моделируемого им материала. Фактически, он позволяет удо-

влетворить значению только одного макроскопического параметра – это, например, модуль упругости или предел прочности в статике, скорость распространения продольных волн в динамике. Отношение между указанными параметрами остается неизменным. С другой стороны, данный потенциал достаточно точно описывает силы взаимодействия Ван-дер-Ваальса, играющие важную роль в твердых телах. Потенциал Леннарда-Джонса широко применяется как классический модельный потенциал, особенно в работах, в которых основной задачей является исследование общих физических закономерностей, а не получение точных количественных результатов.

В работе был реализован метод частиц, позволяющий исследовать взаимодействие некоторой системы материальных точек, находящихся в потенциальном поле. Для описания движения совокупности материальных точек использовалась система уравнений движения. Его интегрирование проводилось при помощи метода Верле. Были рассмотрены потенциалы взаимодействия, с указанием их основных свойств. При составлении уравнений движения предусматривалась возможность движения материальных частиц с учетом диссипации. Кроме того можно было исследовать поведение материальных точек, находящихся в поле силы тяжести. Был решен ряд модельных задач, при решении которых применялся потенциал Леннарда-Джонса. Полученные результаты были проанализированы.

Издание тезисов доклада осуществлено при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Татарстан в рамках научных проектов № 15-41-02555, № 15-07-05380.

ЛИТЕРАТУРА

1. Садовский М.А. *Естественная кусковатость горной породы* // ДАН СССР. – 1979. – Т. 247. – № 4. – С. 829-831.

2. Rieth M. *Nano-engineering in Science and Technology.* - Singapore: World Scientific, 2003. – 151 p.

3. Sibille L., Nicot F., Donze F.V., Darve F. *Material instability in granular assemblies from fundamentally different models* // Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech. – 2007. – V. 31. – No. 3.- P. 457-481.

4. Martin C.L., BouvardD. *Study of the cold compaction of composite powders by the discrete element method* // Acta Mater. – 2003. – V. 51. – No. 2. - P. 373-386.

5. Hoover W.G., Hoover C.G. *Computational physics with particles* // Amer. J. Phys. – 2008. – V. 76. – No. 4-5. – P. 481-492.

6. Monaghan J.J. *Smoothed particle hydrodynamics* // Rep. Progr. Phys. – 2005. – V. 68. – No. 8. – P. 1703-1759.

7. Jing L., Stephansson O. *Fundamentals of Discrete Element Method for Rock Engineering: Theory and Applications.* – Oxford: Elsevier, 2007. – 450 p.

Д. В. Бережной, Л. Р. Гайнулина

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
leysan5684@yandex.ru

РАСЧЕТ ЛЕНТОЧНОГО СУПЕРМАХОВИКА В ВИДЕ СИСТЕМЫ n КОНЦЕНТРИЧЕСКИХ ЦИЛИНДРОВ

В последнее время большое значение приобретает проблема аккумулирования энергии. На сегодняшний день новые материалы позволяют не только совершенствовать имеющиеся электрохимические батареи, но и искать новые методы накопления и хранения энергии. Одной из относительно простых и,

в то же время, крайне перспективных является технология накопления энергии при помощи маховика, который сохраняет переданную ему энергию в виде кинетической энергии вращения. Особое внимание уделяется аккумулирование энергии в механических накопителях на супермаховиках.

Из потенциальных полей, применяемых в технике, а именно гравитационном, электростатическом и магнитном, в системе маховик-корпус можно применить последнее. Применение потенциальной связи в режиме взаимного отталкивания позволяет разгрузить наружные слои маховика за счет передачи нагрузки на корпус и таким образом увеличить скорость вращения маховика и запасаемую энергию.

Для создания намагниченных лент используют магнитный порошок, который вводят в композиционную массу, и изготавливают композиционный материал. Из такой намагниченной ленты наматывают обод маховика. Таким образом, весь маховик приобретает свойства магнита с радиальным намагничиванием, причем каждый последующий виток намотки притягивается к предыдущему. Магнитный корпус изготавливают намоткой магнитной лентой (использованной ранее для намотки обода маховика), но со встречной намагниченностью. Под действием магнитных сил обод маховика будет отталкиваться от магнита корпуса.

Однако существенным ограничением такой технологии сохранения энергии является высокая скорость вращения, которая может привести к резкому повышению уровня напряжений в маховике и его последующему разрушению. Существенным фактором, определяющим удельную энергоемкость кинетических накопителей энергии, является отношение предельного разрушающего напряжения к плотности материала, что, в со-

вокупности с требованиями безопасности, диктует использование супермаховиков (маховиков, выполненных путем намотки нитей или лент).

В работе приводятся основы методики численного исследования удельной энергоемкости кинетических накопителей энергии и расчет напряжений в супермаховике, изготовленном путем насадки семейства n концентрических тонкостенных цилиндров друг на друга с разным видом натяга. Исследовано влияние относительного радиуса внутреннего отверстия в маховике и коэффициента Пуассона материала на удельную энергоемкость супермаховика.

Работа доклада осуществлена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Татарстан в рамках научных проектов № 15-41-02555, № 15-01-05686.

ЛИТЕРАТУРА

1. Belykh K.V., Filkin N.M. *To a question of calculation flywheel drives of kinetic energy* / Materials of the international scientific and practical conference “Upgrade and scientific researches in a transport complex”. – 2012. – V. 1. – P. 281-289.

2. Berezhnoi D.V., Chickrin D.E., Galimov A.F. *On specific energy capacity of flywheel energy storage* // Applied Mathematical Sciences. – 2014. – Vol. 8, N. 124. – P. 6181 – 6190.

3. Berezhnoi D.V., Chickrin D.E., Kurchatov E.Yu., Galimov A.F. *Estimation of specific energy capacity of flywheel-housing system in potential field* // Applied Mathematical Sciences. . – 2014. – Vol. 8, N. 163. – P. 8125 – 8135.

4. Белых К.В., Филькин Н.М. *К вопросу расчета маховичных накопителей кинетической энергии* // Матер. межд. научно – практ. конф. «Модернизация и научные исследования в транспортном комплексе». – 2012. – Т.1. – 281 – 289 с.

5. Бережной, Д.В., Чикрин, Д.Е., Галимов, А.Ф. *Исследование удельной энергоемкости кинетических накопителей энергии* // Сеточные методы для краевых задач и приложения. Матер. Десятой Межд. конф. – Казань: Казанский университет. – 2014. Т.1 – 148 – 155 с.

6. Бережной Д.В., Гайнулина Л.Р., Федорова И.А. *Расчет удельной энергоемкости маховичных накопителей энергии* // Матер. XX Межд. симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. – 2014. – Т.1. – 26 – 28 с.

7. Sultanov, L.U. *Mathematical modeling of deformations of hyperelastic solids* // Applied Mathematical Sciences. – Vol. 8, N 143. – 2014, P. 7117-7124.

8. Sultanov L.U., Davydov R.L. *Mathematical modeling of large elastic-plastic deformations* // Applied Mathematical Sciences. – Vol. 8, N. 60. – 2014. – P. 2991-2996.

9. Давыдов Р.Л., Султанов Л.У. *Решение задачи о больших упругопластических деформациях методом конечных элементов* // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. физ.-матем. науки. – 2012. – Т. 154, Кн. 4. – С. 17-25.

М. В. Выучейская

Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова,

maria.vmv@mail.ru

ПРИМЕНЕНИЕ ИСКУССТВЕННЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ ДЛЯ ОЦЕНКИ УРОВНЯ КОГНИТИВНЫХ НАРУШЕНИЙ

Данная работа посвящена разработке нейросетевого комплекса, позволяющего оценить уровень когнитивных нарушений у пациентов пожилого и старческого возраста. Выделяют легкие, умеренные и тяжелые когнитивные нарушения [1]. Таким образом, задача нейронной сети заключалась в правильной классификации пациентов по следующим группам: 1 — пациент здоров; 2 — пациент имеет легкие когнитивные нарушения; 3 — пациент имеет умеренные когнитивные нарушения; 4 — пациент имеет тяжелые когнитивные нарушения. Исходная выборка, состоящая из 127 человек, была разделена на обучающую (70 человек) и контрольную (57 человек) группы. В качестве параметров нейронной сети выступали: возраст (количество полных лет), среднее время сложной сенсомоторной реакции выбора на зрительный стимул (мс), количество ошибок при выполнении теста на сложную сенсомоторную реакцию выбора, пиковая латентность P300 затылочных отведений (O1, O2). Для построения диагностической системы был выбран многослойный персептрон [2]. Входной слой нейронной сети состоял из 5 нейронов, что соответствовало количеству исходных параметров. Количество нейронов скрытого слоя подбиралось экспериментально и составило 53 нейронов. Выходной слой состоял из 4 нейронов. В качестве функции активации использо-

валась сигмоидная функция

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-\lambda x}}.$$

Нейронная сеть реализована на языке C Sharp. Для обучения нейронной сети использовался алгоритм обратного распространения ошибки. Данный алгоритм минимизирует среднеквадратичную ошибку нейронной сети, используя для этого метод градиентного спуска в пространстве порогов и весовых коэффициентов [3]. При апробации нейронная сеть правильно классифицировала пациентов более чем в 86% случаев.

Таким образом, применение искусственных нейронных сетей позволяет с высокой точностью классифицировать пациентов по уровню когнитивных нарушений, что может использоваться для выбора эффективной тактики лечения больных. Кроме того, использование разработанного нейросетевого комплекса позволяет значительно сократить время, направленное на оценку уровня когнитивных нарушений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Захаров В. В., Яхно Н. Н. *Когнитивные расстройства в пожилом и старческом возрасте* // Метод. пособие для врачей. – Москва, 2005. – 71 с.

2. Хайкин Саймон *Нейронные сети: полный курс*, 2-е изд.: Пер. с англ. – М.: Изд. дом «Вильямс», 2006. – 1104 с.

3. Ахтёров А. В., Кирильченко А. А. *Основы теоретической робототехники. Искусственные нейронные сети* (*Обзор*). Москва, 2008. –
http://www.keldysh.ru/papers/2008/prep02/prep2008_02.html

А. Р. Гайнуллина

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
GaynullinaAlina@gmail.com

МЕТОД МАСКИРОВКИ ДЛЯ КРИПТОГРАФИЧЕСКИХ ПРОТОКОЛОВ НА ПЛАТФОРМЕ КОММУТАТИВНЫХ ОПЕРАД

В работе [1] было показано, как можно использовать коммутативные операды в криптографии с открытым ключом. Будем предполагать, что определения, обозначения и результаты из [1] являются известными. Подробные обоснования описываемых далее результатов можно найти в работе [2].

Покажем, как можно улучшить Протокол 1 из [1]. Вместо операды R из теоремы 2 [1] берется изоморфная ей операда R_c, но изоморфизм зависит от секретного параметра c. Этот маскирующий параметр можно задать при некоторых условиях так, что атакующему противнику для его нахождения понадобится конечное, но сколь угодно большое время (или же он должен будет решить систему уравнений (1)). Вместо алгебры A берется другая алгебра $A(\{k_i\};\{y_i\})$, структура которой зависит от семейства секретных параметров k_i, y_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$.

Теорема. *Криптостойкость Протокола 1 из [1] для операды R_c и алгебры $A(\{k_i\};\{y_i\})$ определяется сложностью решения следующей системы тропических уравнений:*

$$\bigoplus_{j=1}^{n}(a_{i,j} \odot c^{\odot k_i} \odot x_j^{\odot k_i} \odot y_i) = b_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant m, \tag{1}$$

где $x_1, \ldots, x_n$, $k_1, \ldots, k_m$, $y_1, \ldots, y_m$ и c неизвестны.

В обычных обозначениях система (1) выглядит так:

$$\min_{1 \leqslant j \leqslant n}(a_{i,j} + k_i c + k_i x_j + y_i) = b_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant m.$$

В случае $K = \mathbb{Z}$ имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{1,1}c^{k_1}x_1^{k_1}y_1 & + & \cdots & + & a_{1,n}c^{k_1}x_n^{k_1}y_1 & = & b_1; \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ a_{m,1}c^{k_m}x_1^{k_m}y_m & + & \cdots & + & a_{m,n}c^{k_m}x_n^{k_m}y_m & = & b_m. \end{cases} \quad (2)$$

Отметим, что системы уравнений (1), (2) в общем случае нелинейны. На данный момент нам неизвестны методы решения систем уравнений такого вида, не сводящиеся к полному перебору. Ожидается, что Протокол 1 в случаях кольца целых чисел и тропического полукольца обладает достаточной криптостойкостью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gaynullina A. R. and Tronin S. N. *Towards an Operad-Based Cryptography: Applications of Commutative Operads* // Lob. J. of Math. – 2016. – V. 37. – No. 3. – P. 234-239.

2. Gaynullina A. R. and Tronin S. N. *Some New Platforms for Algebraic Cryptography, and One Method of Increasing the Security* // Lob. J. of Math. – 2016. – V. 37. –No. 6. – P. 765-773.

Т. И. Гайсин

Башкирский государственный университет,
timurgaisin7@rambler.ru

АЛГОРИТМЫ СТЕРЕОСОПОСТАВЛЕНИЯ И ПОСТРОЕНИЕ КАРТЫ ДИСПАРАТНОСТИ

Задача восстановления глубины на основе нескольких снимков, сделанных одновременно, является очень важной и необходимой для многих приложений, например, для тех, где требуется восстановить 3D-модель объекта с использованием его

изображения с разных ракурсов. Ключевым моментом в данной задаче является нахождение карты диспаратности или глубины, на основе которой и строится необходимая модель. Карта диспаратности – это изображение, на котором для каждого пикселя вместо цвета хранится его расстояние до камеры.
Для того чтобы решить эту проблему, есть целый ряд алгоритмов, которые можно разделить на две группы:

• Локальные походы. Данные методы используют для вычисления глубины в каждой точке информацию лишь с части пикселей изображения, как правило, из окрестности данной точки. Вычислительная сложность, как правило, невысока, однако, в результате карта диспаратности может включать в себя довольно значительные ошибки, которые могут быть неприемлемыми для многих практических задач.

• Глобальные подходы. В данном случае поиск решения осуществляется не отдельно в каждой точке, здесь каждый пиксель изображения оказывает влияние на решение во всех остальных пикселях. Результаты при использовании подобных алгоритмов достаточно хорошие, но скорость выполнения довольно невысока, что делает невозможным их использовать в реальном времени.

В последнее время набирают популярность алгоритмы, которые совмещают черты локальных и глобальных методов. Так в частности, они, как и локальные методы, вычисляют решение в каждом пикселе независимо друг от друга, но, подобно глобальным методам, данное решение зависит не только от пикселей, которые содержатся в локальной окрестности: часто каждая точка изображения влияет на решение в любой другой точке. Наиболее популярным таким методом является полуглобальный метод "$Semi - GlobalMatching$". Данный

метод основан на идее попиксельного сопоставления изображений: для каждого пикселя формируется так называемое дерево, и диспаритет в пикселе вычисляется путем динамического программирования по дереву, которое представляет собой фиксированный набор лучей, выходящих из одной точки. Получение карты диспаратности в этом случае состоит из 3 шагов:

1. Вычисление попиксельной стоимости,
2. Суммирование попиксельных стоимостей,
3. Вычисление карт диспаратности.

При программной реализации нескольких алгоритмов, использующих различные подходы, применялась открытая библиотека компьютерного зрения OpenCV. Эксперименты показали, что, во-первых, по сравнению с локальными подходами полуглобальный метод позволяет получить более качественную результативную карту диспаратности; во-вторых, скорость его выполнения на порядок выше, нежели у глобальных методов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кривовязь Г. Р. *Электронный научный журнал "Программные продукты, системы и алгоритмы".* – №1, 16 сентября 2013 г.

З. Т. Галимханова, Е. Р. Садыкова

Казанский (Приволжский) федеральный университет,

zuhra-1996@mail.ru, sadikova_er@mail.ru

О РОЛИ ПЕРВЫХ УРОКОВ ГЕОМЕТРИИ

Школьный курс геометрии всегда был и остаётся одним из проблемных в методике преподавания математики. В разное

время высказывались различные суждения по поводу изучения геометрии и её места в системе школьного образования. Это не случайно. Геометрия — один из важнейших компонентов математического образования, необходимый для приобретения конкретных знаний о пространстве и практически значимых умений, формирования языка описания объектов окружающего мира, для развития пространственного воображения и интуиции, математической культуры, для эстетического воспитания обучающихся.

Основной курс геометрии начинается с 7 класса, поэтому для учителя важно с первого урока привить интерес к геометрии, показать необходимость изучения нового предмета. На первых уроках изучения систематического курса геометрии закладываются основы курса планиметрии: вводятся основные понятия и свойства простейших геометрических фигур, позволяющие осуществить построение всего курса. При проведении первых уроков геометрии учителю, а будущему учителю в первую очередь, необходимо учитывать, что изучение нового предмета у многих учащихся вызывают трудности. По мнению методистов, это связано и с психологическими особенностями возраста, и с введением новых понятий и обозначений, доказательством теорем, несформированностью навыков обобщения и абстрагирования.

Один из важных моментов для учителя является и то, по какому учебнику ведется обучение. При планировании и организации уроков нужно учитывать научные теории построения учебников. Так, при обучении по учебникам [1], [2], в которых рассматривается аксиоматический подход изучения геометрии учитель должен учитывать, что введение основных геометрических свойств простейших геометрических фигур проводится

на основе наглядного представления путем обобщения основных или известных из курса математики 1–6 классов геометрических фактов. Принципиальным моментом данной темы является введение понятия равенства геометрических фигур на основе понятия наложения.

При работе по учебнику [3], основанному на авторской, наглядно-эмпирической концепции, первый урок геометрии относится к разделу «Геометрия как наука. Основные понятия», он называется «Геометрическое тело». К особенностям таких уроков многие педагоги и методисты относят то, что ученики должны: изображать и распознавать на чертежах и рисунках известные им геометрические тела, устно их описывать; изображать и распознавать на чертежах и рисунках известные поверхности, устно их описывать; объяснять термины: геометрия, геометрическое тело, поверхность тела, плоскость; объяснять размерность геометрического тела, поверхности; решать задачи на изображение и распознавание геометрических тел, выполнение и распознавание развёртки известных учащимся многогранников, изображать на чертежах и рисунках известные учащимся линии, устно их описывать. К особенностям данного учебника относится и то, что, начиная с первых уроков, уменьшена роль формально-логических рассуждений, больше внимания уделяются методам решения геометрических задач.

К особенностям первых уроков геометрии в научно-методической литературе относят и то, что учащиеся постепенно подводятся к пониманию логического строения геометрии; свойства простейших геометрических фигур целесообразно изучать через организацию лабораторных и практических работ, так как важно дать возможность учащимся строить геометрические объекты своими руками, конструировать их свой-

ства; доказательства целесообразно рассматривать фронтально (или в парах) по готовым чертежам или с использований заданий с пропусками.

Большую роль на таких уроках играют наглядные средства, применение информационно-компьютерных технологий. Использование ИКТ позволяет ученикам экспериментально обнаруживать новые интересные геометрические факты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. и др. *Геометрия. 7-9 классы: учебник для общеобразовательных учреждений.* – М.: Просвещение, 2010. – 384 с.

2. Погорелов А.В. *Геометрия. Учебник для 7-9 классов.* – М.: Просвещение, 2014. – 240 с.

3. Шарыгин И.Ф. *Геометрия 7-9 классы. Учебник.* – М.: Дрофа, 2012. – 464 с.

Р. А. Галямова, М. М. Минегалиева

Казанский (Приволжский) федеральный университет,

rozalya_17@mail.ru, chance0575@gmail.com

МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ РЕГРЕССИИ

Рассматриваем многомерные данные, где для $\forall y_j$ существует набор переменных x_{ji}, $j = \overline{1,m}$, $i = \overline{1,n}$:

y	x_1	x_2	...	x_n
y_1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1n}
y_2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2n}
...	...	...	...	...
y_m	x_{m1}	x_{m2}	...	x_{mn}

Предполагается, что y зависит не от всех $x_1, x_2, ..., x_n$, а от некоторого подмножества $A \subset \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, причем подмножество A неизвестно и зависимость нелинейна. В работе рассмотрен метод нахождения этой зависимости.

В регрессионном анализе среди всех моделей чаще всего рассматриваются две модели:

1. мультипликативная

$$y = \beta_0 x_{i_1}^{\beta_1} ... x_{i_k}^{\beta_k}, \tag{1}$$

2. аддитивная

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_{i_1} + ... + \beta_k x_{i_k}, \tag{2}$$

Исследуется класс моделей, лежащих между (1) и (2):

$$y_\lambda = \beta_0 + \beta_{i_1} x_{\lambda, i_1} + ... + \beta_{i_k} x_{\lambda, i_k}, \tag{3}$$

где $y_\lambda = f_\lambda(y)$ и $x_{\lambda,i} = f_\lambda(x_i)$: $f_\lambda(z) = \ln \frac{e^{\lambda z} - 1}{\lambda}$.

Считаем, что y имеет зависимость от x по формуле (3). Решение этой задачи находится с помощью метода максимального правдоподобия.

Функция правдоподобия имеет вид:

$$L(\beta, \lambda, \sigma, A) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^m} e^{\frac{-(y_\lambda - \beta x_{\lambda,A})^2}{2\sigma^2}}$$

где $y_{\lambda,j} = f_\lambda(y_j)$, $y_\lambda = (y_{\lambda,1}, \ldots, y_{\lambda,m})$, $x_{\lambda,A}$ – матрица, состоящая из элементов $x_{\lambda,ji}$, $1 \leqslant j \leqslant m$, $i \in A$, $x_{\lambda,j0} = 1$, таких, что $x_{\lambda,ji} = f_\lambda(x_{ji})$, вектор $\beta = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k)$.

Находим значения β и σ такие, что функция $L(\beta, \lambda, \sigma, A)$ максимальна. После подстановки данных значений в функцию правдоподобия получаем:

$$L^*(\beta, \lambda, A) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^m (\frac{(y - (x'_{\lambda,A} x_{\lambda,A})^{-1} x'_{\lambda A} y x_{\lambda,A})^2}{m})^{\frac{m}{2}}} e^{-\frac{m}{2}}.$$

Итак, наш метод состоит в следующем: находим множество A и λ так, чтобы доверительный интервал β_i не содержал 0, а средняя квадратичная ошибка $\frac{(y-(x'_{\lambda,A}x_{\lambda,A})^{-1}x'_{\lambda,A}yx_{\lambda,A})^2}{m}$ была наименьшей. Тогда множество A и λ и $\beta = (x'_{\lambda,A}x_{\lambda,A})^{-1}x'_{\lambda,A}y$ являются оптимальными параметрами в уравнении (3) в том смысле, что они максимизируют функцию правдоподобия в предположении, что доверительные интервалы коэффициентов не равны нулю.

Предложенные методы иллюстрируется на примере.

Другие функции f_λ при оптимизации уравнения

$$y_\lambda = \beta_0 + \beta_1 x_{\lambda,1} + ... + \beta_n x_{\lambda,n},$$

рассмотрены в [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Айвазян С. А. *Методы эконометрики* – М.: ИНФРА-М, 2010. – 509 с.

П. О. Гафурова

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
polina.mannshtern@mail.ru

МЕТОД ОБРАБОТКИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ДОКУМЕНТОВ В ФОРМАТЕ OMDOC

В настоящее время развитие интернета во многом связано с семантической обработкой информации (см., напр., [1]). Основная проблема при обработке текстовых файлов — неполная структурируемость и различия в грамматических строениях разных языков. Документ, созданный в TEX-нотации, также

не обладает семантической выразительностью, что не позволяет выполнить полную компьютерную обработку документа. Значит, что нужен новый “машиноориентированный” формат документа (см., напр., [2]).

Сложность обработки математических документов связана с двойственной структурой математического текста и его нелинейностью — документы состоят из набора формул, определений, лемм, теорем, доказательств и, как правило, не имеют древовидной структуры, которую естественным образом можно было бы представить в формате XML [3]. Один из подходов к решению указанных проблем предложен в работах [3]–[5]. Разработан формат OMDoc, использующий для представления формул нотацию Presentation MathML (см., напр., [2]) и RDF для обозначения ссылок. В настоящий момент OMDoc использует вариант модели содержимого “Rhetorical Structure Theory” (RST), который поддерживает такие типы отношений, как аннотация, введение, заключение, тезис, антитезис и ряд других. Использование данного формата позволяет решить ряд проблем, связанных с обработкой TEX-файлов, хотя и остаются нерешенными такие проблемы, как подспецификация, плюрализм и флексиформальность [4].

В настоящей работе предложен программный инструмент, позволяющий выполнить обработку OMDoc-файлов. Приложение написано на языке программирования C#. В качестве входного параметра используется название файла OMDoc. Результатом работы приложения является список терминов с категоризацией и указанием связей. Отметим, что при переводе математических документов в формат “.omdoc” можно установить связи не только среди документов на русском языке, но и приводить связи с документами на других языках. Та-

кая возможность позволяет объединить математические документы на разных языках с помощью связей и сформировать полную информацию о данном объекте, что в перспективе может быть использовано при построении Всемирной цифровой математической библиотеки (см., напр., [6], [7]).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Татарстан (проекты 15–07–08522; 15–47–02472).

ЛИТЕРАТУРА

1. Елизаров А.М., Липачев Е.К., Малахальцев М.А. *Языки разметки Семантического Веба. Практические аспекты.* – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2008. – URL: http://window.edu.ru/catalog/pdf2txt/ 971/73971/53132.

2. Елизаров А.М., Липачев Е.К., Малахальцев М.А. *Основы MathML. Представление математических текстов в Internet.* – М.: Физматлит, 2010. – 198 с.

3. Kohlhase M. *OMDoc: An Open Markup Format for Mathematical Documents.* – FB Informatik, Universitat des Saarlandes D-66041 Saarbrucken, Germany, 2000. – 64 p.

4. Kohlhase M. *OMDoc – An Open Markup Format for Mathematical Documents [version 1.2].* – Springer, 2006. – 428 p.

5. Kohlhase M., Iancu M. *Co-Representing Structure and Meaning of Mathematical Documents.* – Computer Science, Jacobs University Bremen, Germany. October 26, 2015. – 24 p.

6. *Developing a 21st century global library for mathematics research.* – Washington, D.C.: The National Academies Press, 2014. – 131 p. – URL: http://www.nap.edu/catalog/18619/developing-a-21st-century-global-library-for-mathematics-research.

7. Елизаров А.М., Жильцов Н.Г., Кириллович А.В., Липачёв Е.К., Невзорова О.А. *Экосистема ONTOMATH и проект*

всемирной цифровой математической библиотеки. – Труды межд. конф. по комп. и когн. лингвистике TEL-2016. — Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2016. — С. 25–28.

О. В. Гермидер, В. Н. Попов

Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова,

o.germider@narfu.ru, v.popov@narfu.ru

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕНОСА В КАНАЛЕ, ОБРАЗОВАННОМ ДВУМЯ ЦИЛИНДРАМИ

В рамках свободномолекулярного режима решена задача о тепломассопереносе в длинном канале, образованном двумя цилиндрами, радиусов R_1' и R_2', образующие которых параллельны, а оси смещены относительно друг друга на расстояние a'. В канале поддерживаются постоянные градиенты температуры и давления. В качестве основного уравнения, описывающего кинетику процесса, использовано уравнение Вильямса, записанное в цилиндрической системе координат [1], а в качестве граничного условия на стенке канала – модель диффузного отражения. Отклонение состояния газа от равновесного полагается малым, что позволяет получить решение задачи в линеаризованном виде. Для нахождения линейной поправки к локально-равновесной функции распределения задача сведена к решению линейного однородного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка

$$c_\perp \cos\psi \frac{\partial Z}{\partial \rho} + \frac{c_\perp \sin\psi}{\rho}\frac{\partial Z}{\partial \varphi} - \frac{c_\perp \sin\psi}{\rho}\frac{\partial Z}{\partial \psi} + 1 = 0 \qquad (1)$$

с граничными условиями

$$Z(R_1, \varphi, c_\perp, \psi) = 0, \quad \cos\psi < 0, \tag{2}$$

$$Z(\rho, \varphi, c_\perp, \psi) = 0, \quad \rho^2 - 2a\rho\cos\psi + a^2 = 1, \quad \mathbf{n_2}\mathbf{C} > 0, \tag{3}$$

где $(c_\perp, \varphi)$ – полярные координаты вектора скорости молекул газа в пространстве скоростей, $R_1 = R_1'/R_2'$, $a = a'/R_2'$, $\mathbf{C}$ – безразмерная скорость молекул газа, $\mathbf{n_2}$ – вектор нормали к поверхности второго цилиндра, направленный внутрь газа, $\mathbf{n_2}\mathbf{C}$ – скалярное произведение этих векторов .

Решение уравнения (1) с граничными условиями (2) построено с использованием метода характеристик и имеет вид

$$Z(\rho, \varphi, c_\perp, \psi) = -\frac{\rho\cos\psi - \sqrt{R_1^2 - \rho^2\sin^2\psi}}{c_\perp}, \quad -\alpha \leqslant \psi \leqslant \alpha,$$

$$Z(\rho, \varphi, c_\perp, \psi) = \\ = -\frac{\rho\cos\psi - a\cos(\varphi+\psi) + \sqrt{1 - (\rho\sin\psi - a\sin(\varphi+\psi)^2}}{c_\perp},$$

$$\alpha \leqslant \psi \leqslant 2\pi - \alpha, \quad \alpha = \arccos\frac{\sqrt{\rho^2 - R_1^2}}{\rho}.$$

С использованием полученного решения построены профили вектора массовой скорости в канале и найдены значения потоков тепла и массы газа через поперечное сечение канала. Проведен анализ полученных решений в предельном случае, когда оси цилиндров совпадают. Показано, что в этом случае полученные в работе результаты переходят в аналогичные результаты, полученные для коаксиальных цилиндров.

Работа выполнена при финансовой поддержке в рамках Государственного задания “Создание вычислительной инфраструктуры для решения наукоемких прикладных задач” (Проект № 3628).

ЛИТЕРАТУРА

1. Латышев А. В., Юшканов А. А. *Кинетические уравнения типа Вильямса и их точные решения: монография.* – М.: МГОУ, 2004. – 271 с.

В. И. Жегалов, Е. А. Созонтова

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
vzhegalov@yandex.ru, sozontova-elena@rambler.ru

К НОВЫМ СЛУЧАЯМ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ГУРСА В КВАДРАТУРАХ

В работе рассматривается

Задача Гурса. В области $D = \{x_0 < x < x_1,\ y_0 < y < y_1\}$ найти регулярное решение уравнения

$$u_{xy} + au_x + bu_y + cu = f, \tag{1}$$

удовлетворяющее условиям

$$\begin{gathered} u(x_0, y) = \varphi(y),\ u(x, y_0) = \psi(x),\ \varphi(y_0) = \psi(x_0), \\ x \in [x_0, x_1],\ y \in [x_0, x_1]. \end{gathered} \tag{2}$$

Известно, что задача (1) – (2) является однозначно разрешимой. Случаи разрешимости этой задачи в квадратурах приведены в [1, с. 15–16], [2], [3]. Целью нашего исследования является выделение новых случаев разрешимости поставленной задачи в квадратурах. Полученные результаты могут быть сформулированы в терминах следующих соотношений

$$2h - (\ln h)_{xy} - k \equiv 0; \tag{3}$$

$$h \equiv 2\gamma_1(x)\delta_1(y) \neq 0,\ k \equiv 3\gamma_1(x)\delta_1(y) \neq 0; \tag{4}$$

$$(\ln h)_{xy} \equiv h - k,\ h \equiv 2b_y \equiv \frac{2s_1'(x)t_1'(y)}{(2-m_1)[s_1(x)+t_1(y)]^2}; \qquad (5)$$

$$2k - (\ln k)_{xy} - h \equiv 0; \qquad (6)$$

$$h \equiv 3\gamma_2(x)\delta_2(y) \neq 0,\ k \equiv 2\gamma_2(x)\delta_2(y) \neq 0; \qquad (7)$$

$$(\ln k)_{xy} \equiv k - h,\ k \equiv 2a_x \equiv \frac{2s_2'(x)t_2'(y)}{(2-m_2)[s_2(x)+t_2(y)]^2}. \qquad (8)$$

Здесь $h = a_x + ab - c,\ k = b_y + ab - c,\ \gamma_k,\ \delta_k \in C^1,\ s_k,\ t_k,\ m_k \in \in C^2\ (k = \overline{1,2})$, причем m_k зависят только от одной из переменных (x, y) и не принимают значение 2.

Теорема. *Для разрешимости задачи (1) – (2) в квадратурах достаточно выполнения любой из шести групп условий (3) – (8)*

ЛИТЕРАТУРА

1. Жегалов В. И., Миронов А. Н. *Дифференциальные уравнения со старшими частными производными.* – Казань, 2001. – 226 с.

2. Жегалов В. И. *К случаям разрешимости гиперболических уравнений в терминах специальных функций* // Неклассические уравнения математической физики.– Новосибирск, 2002. – С. 73–79.

3. Жегалов В. И., Сарварова И. М. *К условиям разрешимости задачи Гурса в квадратурах* // Изв. вузов. Математика. – 2013. – N 3. – С. 68–73.

Н. В. Зайцева

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
n.v.zaiceva@yandex.ru

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТИПА КЕЛДЫША С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ВТОРОГО РОДА ДЛЯ B-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим в области $D = \{(x,t)|0 < x < l, 0 < t < T\}$ гиперболическое уравнение с оператором Бесселя

$$\Box_B u(x,t) \equiv u_{tt} - x^{-k}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^k \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0, \tag{1}$$

где $k \geqslant 1$, $l, T > 0$ – заданные действительные числа, $\Gamma_l = \{(x,t)|x = l, 0 \leqslant t \leqslant T\}$ – часть границы области.

Для уравнения (1) в области D исследована следующая начальная задача с нелокальным граничным условием второго рода.

Найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x,t) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D \cup \Gamma_l) \cap C^2(D), \tag{2}$$

$$\Box_B u(x,t) \equiv 0, \quad (x,t) \in D, \tag{3}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{4}$$

$$u_x(l,t) + \int\limits_0^l u(x,t)\, x^k\, dx = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{5}$$

В силу результатов работ [1], [2, с. 246] в классе ограниченных в области D решений уравнения (1) при $k \geqslant 1$ отрезок $x = 0$

границы области D освобождается от граничного условия. В этом случае показано [3, с. 68], что справедливо равенство

$$u_x(0,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Методом интегральных тождеств доказана

Теорема. *Если существует решение задачи (2) – (5), то оно единственно.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Келдыш М. В. *О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области* // ДАН. – 1951. – Т. 77. – № 2. – С. 181–183. – М.: Мир, 1999. – 606 с.

2. Пулькин С. П. *Избранные труды.* – Самара: Изд. «Универс групп», 2007. – 264 с.

3. Сабитов К. Б. *К теории уравнений смешанного типа.* – М.: Физматлит, 2014. – 304 с.

Д. Р. Кадырова, А. И. Кукушкина,
А. Д. Печенкина, А. А. Рахимов

Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева (КАИ),
artur.rahimov.2013@mail.ru

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ КУСОЧНО-ГЛАДКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ С ПАРАМЕТРОМ

Простая дискретная динамическая система определяется некоторой функцией $f : X \to X$ и бесконечной последовательностью её итераций. Основной задачей описания такой системы является исследование поведения орбиты любой точки x из

области определения X функции f. В последнее десятилетие исследованию динамики симметрического и асимметрического тентообразных (кусочно-линейных) отображений уделялось серьезное внимание. Широко представлен спектр применения этих отображений в биологии, экологии, робототехнике, электроэнергетике и электротехнике, экономике и социальных науках (см., напр., [1–5]).

Одним из направлений дальнейшего исследования тентообразных отображений является изучение случая, когда функция f не является кусочно-линейной. Примером таких функций, который может представлять интерес для приложений, является

$$f(x) = \begin{cases} ax^{\alpha}, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ ax^{\beta}, & x > 1. \end{cases} \tag{1}$$

Исследование динамики отображения (1), зависящего от трех параметров, является очень сложной задачей. Поэтому мы рассматриваем некоторые частные случаи, когда показатели степеней в системе зафиксированы и f зависит от одного параметра a. В работе изучена динамика двух нелинейных тентообразных отображений с дробными степенями переменной, в том числе, отрицательными:

$$f_1(x) = \begin{cases} ax^{1/2}, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ ax^{1/3}, & x > 1. \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} ax^{3/2}, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ ax^{-1/3}, & x > 1. \end{cases}$$

Для всех полученных в ходе исследования интервалов действительных значений параметра a найдены неподвижные точки и периодические орбиты данных отображений, определены типы этих точек и орбит, построены паутинные и бифуркационные диаграммы. Таким образом, дано полное описание орбит любых точек x из области определения каждой из функций f_1 и f_2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Brockwell P.J. *Autoregressions Generated by the Tent Map.* – Preprint, Tech. Univ. Munchen, 2002. – 4 p.

2. Jianxin Liu, Xuan Zhang, Zhiming Li and Xuling Li. *A Tent Map Based Conversion Circuit for Robot Tactile Sensor* // Journal of Sensors, V. 2013. – 2013. – 5 p.

3. Wang Shuang-xin, Li Han, Zhang Xiu-xia, Wang Zhi-qin *Nonlinear Predictive Load Control of Boiler-Turbine-Generating Unit Based on Chaos Optimization* / 2nd Chaotic Modeling and Simulation Intern. Conf. – Crete, Greece, 2009.

4. Avrutin V., Schanz M. *Multi-parametric bifurcations in a scalar piecewise-linear map* // Nonlinearity. – 2006. – V. 19. – No 8.

5. Sushko I., Agliarib A., Gardinic L. et al. *Bifurcation structure of parameter plane for a family of unimodal piecewise smooth maps: Border-collision bifurcation curves* // Chaos, Solitons & Fractals. – 2006. – V. 29, No 3. – P. 756–770.

Д. В. Капитанов, М. Е. Суслова

Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,

dis-kdv@mail.ru, mariya.suslova.96@mail.ru

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОНСЕРВАТИВНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГИХ СИСТЕМ НА ПРИМЕРЕ СВОБОДНОГО СТЕРЖНЯ

В работе рассматриваются малые плоские низкочастотные изгибные колебания однородного прямого свободного стержня, продольные размеры которого много больше поперечных. К

левому концу стержня приложена следящая сила. Использование принципа Гамильтона–Остроградского позволяет получить уравнение движения и краевые условия в альтернативной форме.

Исследование полученной задачи на устойчивость связано с большими математическими трудностями. Обойти эти трудности позволяют различные приближенные методы. В работе используется метод Бубнова–Галеркина, основанный на использовании базисных функций, удовлетворяющих граничным условиям задачи. Набор базисных функций представлен функциями Крылова для упрощенной задачи, описывающей колебания стержня при тех же граничных условиях в случае отсутствия трения и приложенной на конце силы, и в виде полиномов, удовлетворяющих граничным условиям и обладающих свойством ортонормированности.

Определение границы устойчивости в пространстве параметров системы проводится численно. Использование процедуры метода Бубнова–Галеркина позволяет получить характеристическое уравнение, исследование на устойчивость которого проводится с помощью критерия Рауса–Гурвица. Число независимых параметров велико, но основной интерес представляет исследование потери устойчивости в зависимости от параметра нагрузки. Критическое значение нагрузки получено путем варьирования соответствующего параметра от нуля до некоторого значения, при котором нарушится выполнение условий критерия Рауса–Гурвица.

Представлены результаты в случае двухмодового и трехмодового приближения по методу Бубнова–Галеркина при двух описанных выше видах базисных функций. Указанные в работах [1,2] соответствующие границе потери устойчивости крити-

ческие значения нагрузки согласуются с полученными результатами. Стоит отметить, что значение критической нагрузки при наличии внутреннего трения меньше, чем при его отсутствии. Данное явление в литературе носит название парадокс дестабилизации [3, 4].

Работа выполнена при частичном финансировании РНФ (грант № 16-19-10279) в части постановки задачи устойчивости свободного стержня.

ЛИТЕРАТУРА

1. Феодосьев В. И. *Об одной задаче устойчивости* // Прикладная математика и механика – 1965. – Вып. 2. – С. 391–392.

2. Палош В. Е. *Исследование устойчивости свободного вязкоупругого стержня под действием следящей силы* // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Естественные науки – 2006. – №. 4. – С. 72–78.

3. Сейранян А. П. *Парадокс дестабилизации в задачах устойчивости неконсервативных систем* // Успехи механики – 1990. – Т. 13. – Вып. 2. – С. 89–124.

4. Болотин В. В. *Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости.* – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. – 340 с.

А. Ф. Кужаев, А. И. Рафиков

Башкирский государственный университет,

arsenkuzh@outlook.com, azat@rafikov.me

О НЕКОТОРЫХ СООТНОШЕНИЯХ ДЛЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ БЛОК-ПЛОТНОСТИ

Связь вопросов полноты системы экспонент с вопросами поведения целых функций экспоненциального типа, обращающихся в нуль на последовательности показателей указанной системы, — известный факт. Так, например, работы [1], [2] показывают, что критерий полноты в неограниченной выпуклой области специального вида можно дать в терминах такой характеристики последовательности нулей $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n\geqslant 1}$ как верхняя логарифмическая «блочная» плотность $\bar{L}(\Lambda)$ (в дальнейшем для краткости – логарифмическая блок-плотность):

$$\bar{L}(\Lambda) := \lim_{a\to+\infty} \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{1}{\ln a} \sum_{t<\lambda_n\leqslant at} \frac{1}{\lambda_n}. \tag{1}$$

В связи с вышесказанным мы полагаем, что получение каких-либо соотношений для величины $\bar{L}(\Lambda)$ будет полезно для получения новых результатов в упомянутых вопросах полноты.

Будем рассматривать положительную неубывающую последовательность вещественных чисел с единственной предельной точкой $+\infty$. Под $\lambda_n, n \geqslant 1$ будем понимать нумерацию этой последовательности без учёта кратностей. Кратность же точки λ_n будем обозначать через ν_n, и тогда саму кратную последовательность $\{\lambda_n, \nu_n\}_{n\geqslant 1}$ обозначим буквой Λ.

Согласно лемме 3.2 работы [1] предел по a (1) всегда существует, поэтому величина $\bar{L}(\Lambda)$ определена корректно. Так же нам понадобится ввести в рассмотрение следующие величины:

$$\eta(\Lambda) := \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}, \tag{2}$$

$$\underline{\sigma}(\Lambda) := \varliminf_{n\to\infty} \frac{\nu_n}{\lambda_n}, \qquad \bar{\sigma}(\Lambda) := \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\nu_n}{\lambda_n}.$$

Ясно, что $\eta(\Lambda) \geqslant 1$. Будем считать, что всюду в дальнейшем, если не оговорено противное, для рассматриваемой последовательности Λ величина (1) существует. Если $\underline{\sigma}(\Lambda) = \bar{\sigma}(\Lambda)$, то вместо $\underline{\sigma}(\Lambda)$ и $\bar{\sigma}(\Lambda)$ будем писать просто $\sigma(\Lambda)$.

Теорема. *Пусть* $\underline{\sigma}(\Lambda) > 0$ *и* $\eta(\Lambda) \neq 1$. *Тогда справедлива оценка*

$$\frac{\underline{\sigma}(\Lambda)}{\ln \eta(\Lambda)} \leqslant \bar{L}(\Lambda) \leqslant \frac{\bar{\sigma}(\Lambda)}{\ln \eta(\Lambda)}.$$

Следствие. *Пусть существует величина* $\sigma(\Lambda)$, *и одновременно* $\sigma(\Lambda) \neq 0$ *и* $\eta(\Lambda) \neq 1$. *Тогда справедлива формула*

$$\bar{L}(\Lambda) = \frac{\sigma(\Lambda)}{\ln \eta(\Lambda)}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Malliavin P., Rubel L. A. *On small entire functions of exponential type with given zeros* // Bulletin de la SMF. – 1961. – Т. 89. – С. 175–206.

2. Хабибуллин Б. Н. *Полнота систем экспонент и множества единственности.* — Уфа, РИЦ БашГУ, 2012. – 176 с.

А. С. Кузнецов, С. И. Дорофеева

Казанский национальный исследовательский технический университет им А.Н.Туполева (КАИ),

mossberg@bk.ru

ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В РАДИОЭЛЕКТРОНИКЕ

Основной задачей радиоэлектроники является синтез и анализ цепей. Данные методы исследования не обходятся без расчётов и вычислений параметров цепи. Исследования направлены на расчёт параметров цепи, оптимизирующих данные процессы.

Мы рассматриваем колебательный контур, его дифференциальное уравнение, параметры, вытекающие при решении дифференциального уравнения, а также некоторые другие простейшие цепи.

Также исследуются переходные процессы в электрических цепях и методы их расчёта: классический (метод дифференциальных уравнений), операторный (использующий операционное исчисление, основы которого заложены О. Хевисайдом), метод переменных состояния. Цель исследования — показать преимущества и недостатки перечисленных методов, что позволяет расширить возможности, заложенные в программе технических университетов, где обычно рассматривается два метода решения ЛНДУ: метод вариаций (Лагранжа) и метод подбора по правой части. Все это увязывается в представляемом сообщении с использованием компьютерных методов расчёта цепей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бакалов В. П., Дмитрук В. Ф., Крук Б. И. *Основы теории цепей.* – М.: Радио и связь, 2000. – 592 с.

2. Понтрягин Л. С. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* – М.: Изд-во «Наука», 1970. – 332 с.

3. Пономарёв К. К. *Составление и решение дифференциальных уравнений инженерно-технических задач.* – М.: Учпедгиз, 1962. – 184 с.

4. Попов В. П. *Основы теории цепей.* – М.: Высшая школа, 2000. – 575 с.

5. Гараев К. Г. *О некоторых проблемах математического образования в технических вузах в современных условиях* // Вестник Казанск. госу. техн. университета им. А. Н. Туполева. – 2000. – № 1. – С. 78-79.

Е. К. Липачёв, А. С. Мохов

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
elipachev@gmail.com, alexphenomenon2010@mail.ru

МЕТОД ВЫЯВЛЕНИЯ ДУБЛИКАТОВ В РАЗНОЯЗЫЧНЫХ ЦИФРОВЫХ КОЛЛЕКЦИЯХ ФИЗИКО–МАТЕМАТИЧЕСКИХ ДОКУМЕНТОВ

Одной из задач управления цифровыми коллекциями является поиск дубликатов — документов, имеющих одинаковое содержание. В случае коллекций, включающих документы с текстами на разных языках, необходимы также программные инструменты, позволяющие найти все документы, являющиеся переводами одного и того же документа. Эта задача тесно связана с задачей выявления заимствований в научных публикациях (см., напр., [1]). При этом сложнее всего найти в

тексте фрагменты, являющиеся переводом с другого языка уже опубликованных документов. Для решения этой задачи используются подходы, основанные на сопоставлении формализованных представлений документов (см., напр., [2, 3]).

В работе предложены алгоритмы поиска дубликатов в физико-математических коллекциях документов. Для каждого документа автоматически формируется “формульный код” в виде строки, учитывающей положение формул в тексте, а также структуру формул. Проведенная аналогия с задачей расшифровки ДНК позволила использовать строковые алгоритмы вычислительной молекулярной биологии [4]. Предложен алфавит “формульного кода”, система весов для формул и математических символов, таблицы стоп–символов и суффиксов [5]. Для определения близости документов используется метрика Левенштейна [6] в пространстве строк коллекции. Проведено тестирование алгоритма на коллекции документов портала Math–Net.Ru (http://www.mathnet.ru/). Предложена модификация алгоритмов для коллекций документов, имеющих представление формул в формате MathML (см., напр., [7]).

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты №№ 15-07-08522, 15-47-02472).

ЛИТЕРАТУРА

1. Olver P. *Journals in Flux* // Notices of the AMS. – 2011. – 58 (8). – P. 1124–1126.

2. Захаров В.Н., Хорошилов Ал-др.А., Хорошилов Ал-ей.А. *Метод выявления заимствований в текстах разноязычных документов* // Аналитика и управление данными в областях с интенсивным использованием данных: труды XVIII междун. конф. DAMDID/RCDL’2016. – М.: ФИЦ ИУ РАН, 2016. – С. 277–282.

3. Ceska Z., Toman M., Jezek K. *Multilingual plagiarism detection* // Lecture Notes in Computer Science. – 2008. – 5253. – P. 83–92.

4. Gusfield D. *Algorithms on strings, trees, and sequences: computer science and computational biology.* – Cambridge University Press, 1997. – 311 p.

5. Мохов А.С. *Метод определения подобия научных документов на основе анализа структуры формул.* – Выпускная квалификационная работа. – Казань: КФУ, 2016. – 47 с.

6. Левенштейн В.И. *Двоичные коды с исправлением выпадений, вставок и замещений символов* // Докл. АН СССР. – 1965. – 163 (4). – С. 845–848.

7. Елизаров А.М., Липачев Е.К., Малахальцев М.А *Основы MathML. Представление математических текстов в Internet. Практическое руководство.* – М.: Физматлит, 2010. – 192 с.

А. И. Лубышева, К. А. Поташов

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
nastia.lubysheva@gmail.com

АДАПТАЦИЯ МОДЕЛИ МНОГОЗВЕННОЙ СИСТЕМЫ МИКРООРГАНИЗМОВ В ЗАГРЯЗНЕННОЙ НЕФТЕПРОДУКТАМИ ПОЧВЕ

Наиболее экологичные методы очистки почв от нефтяных загрязнителей относятся к технологии биоремедиации, основанной на использовании углеводородокисляющих микроорганизмов (МО). Достоверное определение оптимального сценария восстановительных мероприятий, а также прогноз масштаба загрязнения должны основываться на расчетах в рамках

корректной математической модели процесса. Модели транспорта несмешивающихся с водой жидких углеводородных (УВ) загрязнителей в почве в целом разработаны и все основные механизмы переноса известны. Основные сложности возникают при замыкании таких моделей дополнительными кинетическими соотношениями, описывающими процессы жизнедеятельности микроорганизмов. Настоящая работа посвящена выбору наиболее адекватной математической модели для описания жизненного процесса МО в загрязненной почве и динамики концентраций субстратов.

В отличие от большинства известных упрощенных моделей [4, 5] в работе рассматривается случай многозвенной системы МО, когда каждая последующая ступень МО для своей жизнедеятельности использует очередной уровень субстрата, являющегося продуктом предыдущей ступени. На основе известных отдельных кинетических моделей и общих представлений о процессе сформулировано шесть различных моделей многозвенной системы.

Оснащение моделей коэффициентами выполнялось из условия минимизации невязки расчетных и экспериментальных данных. Для этого был реализован оптимизационный алгоритм, основанный на использовании метода Левенберга–Марквардта. Ввиду большого числа коэффициентов моделей (от 7 до 18) для выбора начального приближения предложен оригинальный алгоритм, позволяющий на 3-4 порядка сократить число вариаций неизвестных коэффициентов модели по сравнению с традиционными подходами по схемам Монте–Карло и Пчелиного роя.

Наилучшая модель определена по степени совпадения с экспериментальными данными – динамикой дыхания, концентра-

ции УВ и общего углерода. Показано, что принципиального повышения качества модели удается достичь за счет дополнительной переменной управления скорости роста, а учет ограничения численности МО не приводит к улучшению модели.

ЛИТЕРАТУРА

1. Joshua A. E. *Probability bounds analysis for nonlinear population ecology models.* // Mathematical Biosciences. – 2015. – № 267. – P. 106.

2. Aravinda R. M. *Optimal control analysis of the dynamic growth behavior of microorganisms.* // Mathematical Biosciences. – 2014. – № 25. – P. 105.

3. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. *Практическая оптимизация.* – М.: Мир, 1985. – 609 с.

С. В. Маклецов

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
smaklets@kpfu.ru

О ПРИМЕНЕНИИ ИСКУССТВЕННЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ ДЛЯ АНАЛИЗА РАБОТЫ ЗРИТЕЛЬНОГО АНАЛИЗАТОРА

Исследуется работа зрительного анализатора посредством вспышечного зрительного вызванного потенциала (ВЗВП), схематический график которого приведен на рис. 1.

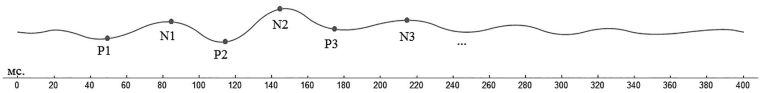


Рис. 1. График ВЗВП

Определенные реакции различных областей мозга на получаемую визуальную информацию могут являться основанием для выдвижения предположений о его нормальном функционировании, либо наличии тех или иных отклонений от нормы.

Для решения задачи определения качественных параметров зрительного анализатора могут быть использованы различные подходы и, в частности, модели, построенные на базе искусственных нейронных сетей (ИНС) [1].

На базе научно-диагностического центра при Казанском государственном медицинском университете были проведены эксперименты по созданию искусственной нейросетевой модели типа "перцептрон"с применением одного из наиболее распространенных на сегодняшний день алгоритма обучения — алгоритма обратного распространения ошибки.

В первом эксперименте в качестве обучающего множества была использована выборка из 85 человек, разделенных на 7 групп. Первая группа (24 человека) была условно отнесена к норме, а в остальные входили лица с определенными отклонениями от нормы. Точность работы перцептрона на тестовой выборке (при предоставлении новых данных) составила не более 50%, что не позволяет использовать такую сеть в реальных условиях.

В ходе второго эксперимента, нейронной сети была предложена обучающая выборка того же объема, разделенная лишь на 3 группы. При этом качество классификации увеличилось до 70%.

В результате были предложены пути улучшения качества работы ИНС. Во-первых, поскольку нейросеть содержит большое число взаимосвязей между нейронами и, соответственно, большое число настраиваемых параметров, требуется су-

щественное увеличение выборки для ее обучения. Во-вторых, при создании ИНС имеет смысл заменить измеренные входные показатели вычисленными значениями, зависящими от средне-нормальных показателей. В-третьих, следует разбить нейросеть по функциональным блокам на несколько связанных сетей, работа которых будет анализировать соответствующие этапы обработки визуальной информации мозгом. Это позволит сократить число взаимосвязей в сети и использовать обучающие выборки меньшего размера при поддержании достаточного уровня качества классификации пациентов. Кроме того, такой подход позволит получить более точное представление о работе различных отделов зрительного анализатора.

ЛИТЕРАТУРА

1. Яхъяева Г. *Основы теории нейронных сетей* [Электронный ресурс] // Национальный открытый университет "Интуит" URL: http://www.intuit.ru/studies/courses/88/88/lecture/20527.

Е. Г. Малькович

Новосибирский государственный университет,

malkovich@math.nsc.ru

ОБ ЭЙНШТЕЙНОВЫХ МЕТРИКАХ С ДВУМЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Рассмотрим четырехмерную риманову метрику вида

$$g = dt^2 + A_1^2(t)(e^1)^2 + A_2^2(t)((e^2)^2 + (e^3)^2),$$

где 1-формы e^i образуют базис алгебры $\mathfrak{su}(2)$. Как известно,

уравнение Эйнштейна

$$Ric_{ij} = \lambda g_{ij}$$

является нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка на функции $A_i(t)$. Известно, что при подходящем выборе систем координат ряд классических эйнштейновых метрик (метрики Фубини-Штуди, Тауб-НУТ, Эгучи-Хансона) удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} A_1' = k_1(\frac{A_1}{A_2})^2 + k_2\frac{A_1}{A_2} + k_3, \\ A_2' = l_1(\frac{A_1}{A_2})^2 + l_2\frac{A_1}{A_2} + l_3. \end{cases}$$

для подходящих констант k_i и l_j. Рассмотренную систему, таким образом, можно рассматривать как один из способов понизить степень уравнения Эйнштейна. Было показано, что помимо уже известных эйнштейновых метрик существует еще одна риччи-плоская метрика, удовлетворяющая данной системе:

$$\frac{\rho^4}{(c^2-\rho^2)^4}d\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}(e^1)^2 + \frac{\rho^2}{(c^2-\rho^2)^2}((e^2)^2 + (e^3)^2).$$

Эта метрика является неполной: в сингулярный момент времени t_0 вторая функция $A_2(t)$ ведет себя как $\gamma(t-t_0)^{\frac{1}{3}} + \frac{9}{5}(t-$ $-t_0)$ для некоторой константы γ, а первая $A_1(t)$ «взрывается» как $\frac{\gamma^2}{3}(t-t_0)^{-\frac{1}{3}}$.

При $t \to \infty$ функция $A_1(t)$ стремится к константе, а функция $A_2(t)$ становится эквивалентной линейной функции $2t$.

А. В. Марков

Башкирский государственный университет,
capitan.am@yandex.ru

МЕТОД УНИВЕРСАЛЬНОГО ОПИСАНИЯ СВЯЗИ МЕЖДУ ТАБЛИЧНЫМИ ДАННЫМИ В EXCEL-ФОРМАТЕ И БАЗОЙ ДАННЫХ ДЛЯ ПОСЛЕДУЮЩЕГО ЗАНЕСЕНИЯ ИНФОРМАЦИИ В БД

При компьютерном моделировании образуется большой объем данных, которые подчинены определенному выходному формату. Чаще всего данная информация хранится в файлах excel. Поиск по образующейся файловой системе связан с большими сложностями. Резонный выход – создание базы данных с последующим занесением всей информации из файлов в нее. Но на данный момент не существует инструментов, которые могут собрать информацию о структуре таблиц из БД и сопоставить ее с форматом excel, в котором хранятся данные, для унифицированной записи в БД без привязки к структуре таблиц. Мы стараемся разработать метод описания связи базы данных с форматом хранения в файле.

Результатом работы стало создание конфигурационного файла в формате json, позволяющий описать связь между БД и форматом в excel. Такой выбор хранения информации обусловлен удобным методом чтения json-объектов в большинстве языков программирования, таких как: C++, PowerShell, C♯. Это позволило написать программу, которая с использованием информации из конфигурационного файла экспортирует данные из excel-файлов в БД.

Конфигурационный файл внутри себя содержит json-

объект с 4 свойствами: $\{excel : \{\}, db : \{\}, maps : [], scenario : []\}$. Все сущности, расположенные в секциях "$excel$" и "db" проиндексированы, что позволяет создать индексную систему для взаимно-однозначного определения и обращения в процессе использования. Опишем суть каждой секции для представления их назначения. Секция "$excel$" содержит информацию о родительской папке, маске имени файла, номерах листов книги excel, по которым будет проводиться поиск, и логических excel-таблицах, расположенных на одном листе. Секция "db" содержит описание параметров подключения к базе данных и информацию о таблицах. Секция "$maps$" описывает соединение столбцов БД таблиц со столбцами excel-таблиц. Данное поле – это массив объектов. Верхним индексом был выбран индекс БД таблицы, так как значения ее столбцов могут принадлежать столбцам разных excel-таблиц. В данной секции описываются лишь те БД таблицы, у которых поле "$columns$" не пусто. Секция "$scenario$" описывает порядок обработки БД таблиц, включая реакцию на ошибочные данные либо их отсутствие, а также реакцию на непустой результат запроса типа select. Данное поле – это массив объектов. Выделение секций "$excel$" и "db" позволило инкапсулировать информацию о excel-формате и структуре БД в различных объектах, соединяя их через индексную систему, собранной воедино в секции "$maps$" . Такой подход позволяет параллельную работу по описанию excel-формата и таблиц БД, которые задействованы в excel. Еще одним немаловажным преимуществом подобного подхода можно считать достаточно легкий процесс расширения списка свойств каждого объекта.

С. Р. Миронова, Л. Д. Погодина

Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева (КАИ),

srmironova@yandex.ru

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ДЛЯ ФУНКЦИИ, ОТОБРАЖАЮЩЕЙ ЕДИНИЧНЫЙ КРУГ НА КРИВОЛИНЕЙНЫЙ МНОГОУГОЛЬНИК СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Данная работа продолжает исследования, начатые в [1].

Фиксируем числа α, $\beta \in \mathbb{R}$. Пусть односвязная область B расширенной комплексной плоскости W удовлетворяет условиям:

1) $0 \notin B$, $\infty \in B$,

2) $\partial B = \cup_{k=1}^{n} l_k$, т. е. граница области B состоит из конечного числа дуг l_k, каждая из которых при выборе регулярной ветви преобразования $\xi = W^{\alpha+i\beta}$ переходит в дугу окружности с центром в точке $\xi = 0$ или радиальный луч плоскости ξ,

3) Каждая точка A_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, — вершина криволинейного n-угольника B — является достижимой граничной точкой области B (если в некоторой точке плоскости W располагается несколько угловых точек, то столько же будет и вершин).

Если для односвязной области B расширенной комплесной плоскости W выполняются вышеуказанные условия 1)–3), то область B называется областью, удовлетворяющей условию $[\alpha, \beta]^{1*}$.

Говорят, что функция f подчиняется условию $[\alpha, \beta]^{1*}$, если f удовлетворяет следующим условиям:

1) $f(z)$ регулярна в проколотом круге $E^* = \{0 < |z| < 1\}$ и имеет простой полюс в начале координат,

2) $f(z)$ однолистно отображает проколотый круг E^* на область B, удовлетворяющую условию $[\alpha,\beta]^{1*}$.

Теорема. *Если функция f подчиняется условию $[\alpha,\beta]^{1*}$, то она удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению вида*

$$\{f,z\} = -\frac{1}{2}(\alpha-1+i\beta)(\alpha-3+i\beta)\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right)^2 + P(z),$$

где

$$P(z) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1-\alpha_k^2}{2(z-\alpha_k)^2} + \frac{C_k}{z-a_k}\right).$$

Здесь C_k — некоторые комплексные константы, $\alpha_k\pi$ — внутренние углы в вершинах A_k области $B = f(E^*)$, $\{f,z\}$ – производная Шварца функции f.

ЛИТЕРАТУРА

1. Миронова С.Р., Погодина Л.Д. *Отображение единичного круга на криволинейный многоугольник специального вида* // Матер. 14-й Всеросс. молодежной научн. школы-конф. – Казань: Изд-во Казанск. матем. общ-ва, Изд-во Академии наук РТ, 2015. – Т. 52. – С. 100–101.

2. Голузин Г.М. *Геометрическая теория функций комплексного переменного.* – М.: Наука, 1966. – 628 с.

Я. А. Михайловская

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
yana.michailovskaya@yandex.ru

ВЫЧИСЛИМЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ПОРЯДКИ И ИЕРАРХИЯ ЕРШОВА

Данная работа посвящена изучению вычислимых линейных порядков, в сигнатуру которых добавляются дополнительные отношения $S^n_{\mathcal{L}}$ и $F_{\mathcal{L}}$, заданные следующим образом (здесь $(x,y)_{\mathcal{L}} = \{z \mid x <_{\mathcal{L}} z <_{\mathcal{L}} y\}$):

$$S^{2k}_{\mathcal{L}}(x,y) \leftrightharpoons |(x,y)_{\mathcal{L}}| = 0 \vee = 2 \vee \ldots \vee = 2k,$$

$$S^{2k+1}_{\mathcal{L}}(x,y) \leftrightharpoons |(x,y)_{\mathcal{L}}| = 1 \vee = 3 \vee \ldots \vee = 2k+1,$$

$$F_{\mathcal{L}}(x,y) \leftrightarrow \exists n \in \omega\, (|(x,y)_{\mathcal{L}}| = n).$$

Предложение 1. *Для любого $(n+1)$-в.п. множества A существует вычислимый линейный порядок $\mathcal{L}$, упорядоченный по типу ω, такой что $S^n_{\mathcal{L}} \equiv_T A$.*

Следствие 1. *Существует вычислимый линейный порядок $\mathcal{L}$ такой, что спектр отношения $S^n_{\mathcal{L}}$ состоит в точности из всех $(n+1)$-в.п. степеней.*

Предложение 2. *Для любого вычислимого линейного порядка $\mathcal{L}$ из вычислимости $S^0_{\mathcal{L}}$ следует вычислимость $S^n_{\mathcal{L}}$ для любого n.*

Предложение 3. *Существует вычислимый линейный порядок $\mathcal{L}$, в котором отношения $S^k_{\mathcal{L}}$ для всех $k > n$ вычислимы, но отношение $S^n_{\mathcal{L}}$ не вычислимо.*

Предложение 4. *Существует вычислимый линейный порядок* $\mathcal{L}$, *в котором отношения* $S^n_{\mathcal{L}}$ *для всех* n *вычислимы, но отношение блока* $F_{\mathcal{L}}$ *не вычислимо.*

Предложение 5. *Пусть* $\mathcal{L}$ *– вычислимый линейный порядок, содержащий лишь конечное число блоков длины* $\leqslant (n+1)$. *Тогда из вычислимости* $S^n_{\mathcal{L}}$ *следует вычислимость* $S^0_{\mathcal{L}}$.

Также была доказана следующая

Теорема. *Пусть вычислимый линейный порядок* $\mathcal{L}$ *имеет бесконечно много блоков длины* 2 *и отношение* $S^1_{\mathcal{L}}$ *вычислимо. Тогда существует вычислимый линейный порядок* $\mathcal{R}$ *такой, что* $\mathcal{R} \cong \mathcal{L}$, $S^1_{\mathcal{R}}$ *вычислимо, но* $S^0_{\mathcal{R}}$ *не вычислимо.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Downey R. G, Lempp S., Wu G. *On the complexity of the successivity relation in computable linear orderings* // Journal of Mathematical Logic. – 2010. – V. 10. – No 1—2. – P. 83—99.

2. Hirschfeldt D. R. *Degree spectra of intrinsically c.e. relations* // Journal of Symbolic Logic. – 2001. – V. 66. – P. 441–469.

3. Moses M. *Recursive linear orders with recursive successivities.* // Annals of Pure and Applied Logic. – 1984. – V. 27. – P. 253–264.

4. Remmel J. B. *Recursively categorical linear orderings* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1981. – V. 83. – P. 387—391.

5. Фролов А. Н. *Представления отношения соседства вычислимого линейного порядка* // Известия вузов. Математика. – 2010. – № 7. – С. 73—85.

В. В. Михеев

Казанский (Приволжский) федеральный университет,miheevvova@mail.ru

МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ГЕТЕРОГЕННЫХ СРЕД С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА ЧАСТИЦ

В соответствии с современными представлениями механики деформируемое твердое тело является иерархически организованной системой, которая может быть схематически представлена совокупностью деформационных механизмов [1]. В связи с этим существует широкий спектр задач, в которых изменения при нагружении среды сопровождаются множественным разрушением и проскальзыванием элементов или фрагментов относительно друг друга, интенсивным массопереносом, включая эффекты перемешивания частиц различной природы и т.д. При решении таких проблем использование сеточных методов встречает значительные трудности.

Однако в последнее время всё большую популярность приобретают численные методы, приспособленные к моделированию разрушения и описанных выше факторов. Такие методы получили название – методы частиц [2]. Благодаря тому, что данные методы позволяют решать задачи как на макроуровне, так и на масштабах атомарного уровня, появляется возможность изучения механических сред любого уровня сложности.

Для сред с различной реологией выражение для силы, действующей на частицу i со стороны окружающих ее частиц, записывается в виде:

$$m_i \frac{d^2 R}{dt^2} = F_i = \sum_{j=1}^{Ni} F_{pair}^{ij} + F_{\Omega}^{i}. \qquad (1)$$

Главной задачей метода частиц является интегрирование большого числа уравнений. При вычислениях много времени уходит на определение силы, которая действует на данную частицу. Алгоритм Верле – один из самых простых методов. Вычисление положения частицы определяется по двум ее предыдущим положениям:

$$r(t+\tau) = 2r(t) - r(t-\tau) + \omega(t)\tau^2, \tag{2}$$

где τ – шаг интегрирования, $\omega(t)$ – ускорение частицы

Для определения сил взаимодействия между частицами рассматривается парный потенциал (r), сила взаимодействия $f(r)$ соответствующая ему определяется как:

$$f(r) \equiv -\dot{\Pi}(r). \tag{3}$$

С использованием высокопроизводительного кластера и с помощью ЯП Python были получены разноообразные модели. Следует отметить, что мы использовали модифицированный потенциал Леннарда-Джонса, который показал более хорошие сходства с реальными процессами и объектами. В перспективе появляются возможности определения физических параметров моделируемых объектов и решения разнообразных задач, причем моделируемая среда постепенно будет усложняться.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Татарстан в рамках научных проектов № 15-41-02555, № 15-07-05380

ЛИТЕРАТУРА

1. Садовский М. А. *Естественная кусковатость горной породы* // ДАН СССР. – 1979. – Т. 247. – С. 829–831.

2. Harlow F. N., Evans M. W. *Method for Hydrodynamic Calculations* // Los Alamos. – 1957.

Н. И. Насырова, И. А. Хвиюзова

Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева (КАИ), Северный (Арктический) федеральный университет им. М.В. Ломоносова, ngoza@yandex.ru

ХАОТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА В СИСТЕМАХ, ЗАДАННЫХ ОДНОМЕРНЫМИ ОТОБРАЖЕНИЯМИ

Многие процессы реального мира, как стабильные, так и нелинейные, могут быть описаны в виде математических моделей некоторых динамических систем. В современных исследованиях все чаще рассматриваются проблемы детерминированного хаоса, порождаемого внутренней сущностью нелинейных процессов. Изучение их динамики, а также поиск условий возникновения хаоса в системах различного вида весьма актуально в настоящее время. Хаотическое поведение систем изучается при исследованиях атмосферы Земли, различных физических процессов, в биологии, экологии. В информационных технологиях законы динамического хаоса применяют для записи, поиска и защиты информации.

Работа посвящена нахождению и доказательству условий существования хаоса при исследовании простых моделей динамических систем, заданных одномерными отображениями с одним и двумя параметрами.

Проведено полное исследование динамики отображения $f(x) = m(x^3 - 6x)$, заданного в действительной области. Определены промежутки значений параметра m и доказано существование хаотического поведения орбит точек для всех найденных интервалов. Доказательство существования хаоса опи-

рается на теорему Глендининга [1].

Отметим, что серьёзное внимание уделяется исследованию динамики симметрического и асимметрического тентообразных отображений, и эти модели изучены достаточно хорошо (см., напр., [2–4]). Дискретные динамические системы, заданные тентообразными отображениями, находят все более широкое применение при построении экологических и популяционных моделей [5], для решения проблем теплоэнергетики [6] и в других отраслях науки и человеческой деятельности. В то же время, известные нам исследования динамики асимметрического тентообразного отображения, в которых применялись различные методы изучения динамики и способы доказательства существования хаоса, не являются исчерпывающими.

Мы изучили динамику отображения, заданного системой двух линейных функций с параметрами

$$f(x) = \begin{cases} 1 + ax, & x \leqslant 0, \\ 1 - bx, & x > 0. \end{cases}$$

В процессе исследования плоскость параметров (a, b) разбита на области, где отображение имеет одинаковую динамику. Найдены неподвижные и двупериодические точки $f(x)$, определены их типы, построены паутинные и бифуркационные диаграммы. Для каждой области аналитическими методами проведено доказательство динамики отображения $f(x)$. Для области значений параметров, в которой наблюдается существование хаоса, доказательство хаотического поведения орбит точек проведено с помощью теоремы Глендининга [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Glendining P. *Stability, Instability and chaos.* – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1994. – 399 p.

2. Al-Shameri W.F.H., Mahiub M.A. *Some Dynamical Properties of the Family of Tent Maps* // Int. J. of Math. Analysis. – 2013. – V. 7, No 29. – P. 1433-1449.

3. Lindstrom T., Thunberg H. *An elementary approach to dynamics and bifurcations of skew tent maps* // J. Dif. Eq. and Appl. – 2008. – V. 14. – P. 819-833.

4. Sushko I., Gardini L. *Degenerate bifurcations and border collisions in piecewise smooth 1D and 2D maps* // Int. J. of Bifurcation and Chaos. – 2010. – V. 20, No 7. – P. 2045–2070.

5. Lindstrom T. *Dynamical properties of maps fitted to data in the noise-free limit* // J. of Biological Dynamics. – 2013. – V. 7, No 1. – P. 108-116

6. Wang Shuang-xin, Li Han, Zhang Xiu-xia, Wang Zhi-qin *Nonlinear Predictive Load Control of Boiler-Turbine-Generating Unit Based on Chaos Optimization* / 2nd Chaotic Modeling and Simulation Intern. Conf. – Crete, Greece, 2009.

Л. Ю. Низамиева

Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева (КАИ),

nizamievalu@ya.ru

ПРОФЕССИОНАЛЬНО-ОРИЕНТИРОВАННАЯ НАПРАВЛЕННОСТЬ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ТЕХНИЧЕСКОМ ВУЗЕ

В техническом вузе в процесс формирования специалиста особая роль принадлежит курсу «Математика». Профессиональное образование будущего выпускника технического вуза предполагает весьма серьезную математическую подготовку.

По мнению Н.Д. Коваленко, общая цель всех математических курсов должна заключаться в приобретении выпускниками вузов определенной математической подготовки, в умении использовать изученные математические методы в будущей профессии, в развитии математической интуиции, в воспитании математической культуры. Специалисты (выпускники вузов) должны знать основы математического аппарата, необходимого для решения теоретических и практических профессиональных задач, иметь развитое логическое мышление и уметь переводить профессиональную задачу на математический язык. Общая цель всех математических курсов в вузе «учить надо тому, что нужно в будущей профессии, и чему трудно научиться, самостоятельно осваивая трудовую деятельность» [1, с. 39]. Ю.М. Колягин подчеркивает, что главная цель изучения математики в вузе состоит в том, чтобы научить применять ее в профессиональной деятельности. Но, к сожалению, общая цель иногда ведет к излишнему формализму [2].

Можно сформулировать следующие требования к содержанию математической подготовки в вузе помимо общих критериев отбора содержания математической подготовки:

- особое внимание уделять тем разделам математики, которые служат основой математической компетентности с учетом будущей профессии выпускника;
- вводить элементы профессиональных задач, требующих применения математического аппарата;
- соответствие содержания профилю обучения, специфике профессиональной деятельности;
- учет математической подготовки студентов;

- соответствие возрастным и индивидуальным особенностям студентов [5].

В последние годы проблемы, связанные с профессионально-ориентированной направленностью математической подготовки будущих специалистов всех профилей стали достаточно актуальными. Наличие у студента математических способностей является одним из факторов успешности процесса формирования в вузе профессионально-ориентированной математической подготовки будущего специалиста.

Необходимы разработки новых методов и средств обучения математике при подготовке специалистов технического профиля, направленных на реализацию современных требований к уровню профессионально-ориентированной математической подготовки будущих специалистов; заключающихся в поиске оптимального пути формирования индивидуального стиля профессионального мышления и деятельности [4].

На наш взгляд, решение этих задач необходимо осуществлять, прежде всего, в следующих направлениях: усиление фундаментальности образования; реализация междисциплинарных связей в образовании; обеспечение взаимопроникновения экономического знания и математических дисциплин; усиление профессионально-ориентированной направленности процесса обучения математическим дисциплинам; формирование профессионально значимых свойств и качеств личности; формирование индивидуального стиля профессионального мышления и деятельности будущего специалиста технического профиля [3].

Основные задачи курса математики при подготовке специалистов технического профиля в вузе можно сформулировать следующим образом:

• повышение уровня профессионально-ориентированной направленности математической подготовки в рамках общего уровня фундаментальной образованности студентов;

• создание определенного уровня базовой математической подготовки обучаемых на основе учета индивидуального стиля мышления и деятельности, необходимого им в последующей профессиональной деятельности;

• формирование навыков самостоятельной работы с учетом индивидуального стиля мышления, воспитание потребности в самообразовании и самосовершенствовании;

• воспитание основных профессионально значимых личностных качеств;

• разработка и проведение занятий по математике с использованием имеющихся знаний об индивидуальном стиле мышления и деятельности.

Таким образом, в процессе формирования профессионально-ориентированной математической подготовки будущих специалистов технического профиля в вузе необходимо обеспечить реализацию интегративных связей математики и специальных дисциплин технического профиля с целью формирования у студентов умений и навыков, необходимых в будущей профессиональной деятельности на основе индивидуальных особенностей мышления и деятельности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коваленко Н.Д. *Методы реализации принципа профессиональной направленности при отборе и построении содержания общеобразовательных предметов в высшей школе*: Дисс. на соис. уч. степ. канд. пед. наук. – Томск, 1995. – 158 с.

2. Колягин Ю.М., Пикан В.В. *О прикладной и практической направленности обучения математике* // Математика в

школе. – 1985. – №6. – С. 22 -32.

3. Низамиева Л.Ю., Старшинова Т.А. *Реализация дифференцированного подхода с помощью средств мультимедиа. Модернизация системы профессионального образования на основе регулируемого эволюционирования*: Материалы VIII Всеросс. научно-практ. конф.: ч. 1. – М., Челябинск: Изд-во «Образование», 2009. – С. 208-212.

4. Низамиева, Л.Ю. *Профессионально-ориентированная направленность математического образования в экономическом вузе* // В мире научных открытий. Матер. Общеросс. электр. научн. конф. «Актуальные вопросы современной науки и образования». Красноярск: Изд-во: Научно-инновационный центр, 2010. – №1. – Ч. 3. – С. 51-57.

5. Смирнова Е.Ю. *Пути формирования модели специалиста с высшим образованием*: Монография. – Л.: ЛГУ, 1991. – 136 с.

Л. Ю. Низамиева

Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева (КАИ),

nizamievalu@yandex.ru

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ АКЦЕССОРНЫХ ПАРАМЕТРОВ ПРИ КОНФОРМНОМ ОТОБРАЖЕНИИ КРУГОВЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

Пусть односвязная область B плоскости z имеет границу, состоящую из n дуг A_jA_{j+1}, $1 \leqslant j \leqslant n$, $A_{n+1} = A_1$, каждая из которых является дугой окружности или прямолинейным

отрезком. Величины внутренних по отношению к области B углов в точках A_j обозначим через $\pi\alpha_j$.

Конформно отобразим верхнюю полуплоскость на область B. Обозначим через a_j, $j = 1, \dots, n$, точки на вещественной оси, которым соответствуют вершины A_j, $j = 1, \dots$ $\dots, n$. Как и для конформных отображений единичного круга (см., напр., [2, гл. 3, § 2]), для отображения f справедливо равенство

$$S_f(\zeta) = \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\frac{1}{2}(1-\alpha_j^2)}{(\zeta - t_j)^2} + \frac{c_j}{\zeta - t_j} \right], \tag{1}$$

где $S_f(\zeta) = \frac{f'''(\zeta)}{f'(\zeta)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\right)^2$ — производная Шварца функции f.

В правую часть (1) входят неизвестные (акцессорные) параметры a_j и c_j, $j = 1, \dots, n$, важной задачей является их определение. Численный метод нахождения этих акцессорных параметров, основанный на использовании уравнения Левнера-Куфарева, был предложен в работах Ю. В. Чистякова и Б. Г. Байбарина (см., напр., [1, гл. VI, § 3]).

Мы предлагаем близкий метод, основанный на использовании краевых задач Гильберта с кусочно-постоянными коэффициентами и исследовании вариаций их решений. В качестве вспомогательной задачи рассмотрим задачу описания однопараметрического семейства конформных отображений верхней полуплоскости $f(\zeta, t)$, где t — вещественный параметр. При фиксированном t функция $f(\zeta, t)$ конформно отображает единичный круг на область, которая получается из плоскости проведением разреза вдоль кусочно-гладкой кривой, являющейся объединением луча с вершиной в точке A_1, дуг A_jA_{j+1}, $1 \leqslant j \leqslant k-1$, и части дуги A_kA_{k+1}. При увеличении t происходит увеличение разреза, конец которого — A'_{k+1} — движется

вдоль дуги A_kA_{k+1} от точки A_k к точке A_{k+1}. Обозначим через t_j и t_{2k+2-j} координаты точек на границе полуплоскости — прообразов двух точек, лежащих на противоположных берегах разреза и соответствующих вершине A_j. Пусть также t_{k+1} — точка, соответствующая концу разреза. Без ограничения общности можно считать, что $t_1 = -1$, $t_2 = 1$, а бесконечно удаленной точке при отображении $f(\zeta, t)$ соответствует бесконечно удаленная.

При этих предположениях в силу (1) справедливо представление для производной Шварца функции $f(\zeta, t)$:

$$S_f(\zeta) = \sum_{j=1}^{2k+1} \left[\frac{\frac{1}{2}(1-\alpha_j^2)}{(\zeta - t_j)^2} + \frac{C_j}{\zeta - t_j} \right], \tag{2}$$

где $\alpha_{2k+2-j} = 2 - \alpha_j$, $k+2 \leqslant j \leqslant 2k+1$, $\alpha_{k+1} = 2$, а C_j — некоторые константы.

Нами показано, что $S_f(\zeta)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{S}_f(\zeta, t) = R(\zeta, t) S_f'(\zeta, t) + 2R'(\zeta, t) S_f(\zeta, t) + R'''(\zeta, t), \tag{3}$$

где

$$R(\zeta, t) = \frac{\zeta^2 - 1}{\zeta - t_{k+1}(t)}.$$

С помощью (3) выведена система дифференциальных уравнений для определения акцессорных параметров в (2):

$$\begin{aligned}
\dot{C_j} &= \frac{t_{k+1}^2 - 1}{(t_j - t_{k+1})^3} + C_j \cdot \frac{t_j^2 - 2t_j t_{k+1} + 1}{(t_j - t_{k+1})^2}, \quad j \neq k+1, \\
\dot{t_j} &= -\frac{t_j^2 - 1}{t_j - t_{k+1}}, \quad j \neq k+1, \\
\dot{C_{k+1}} &= C_{k+1} - (t_{k+1}^2 - 1) \sum_{j=1,\ j \neq k+1}^{2k+1} \left[\frac{\alpha_j^2 - 1}{(t_{k+1} - t_j)^3} - \frac{C_j}{(t_{k+1} - t_j)^2} \right], \\
\dot{t_{k+1}} &= (t_{k+1}^2 - 1) C_{k+1} - 2t_{k+1}.
\end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров, И. А. *Параметрические продолжения в теории однолистных функций.* – М.: Наука, 1976. – 344 с.

2. Голузин, Г. М. *Геометрическая теория функций комплексного переменного.* – М.: Наука, 1966. – 628 с.

А. А. Никитина

Тюменский государственный университет,

anna_5955@mail.ru

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ В АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА-ОРЛИЧА

В произвольной неограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}_n$, $n \geqslant 2$, для анизотропных эллиптических уравнений второго порядка рассматривается задача Дирихле

$$\sum_{\alpha=1}^{n}(a_\alpha(\mathrm{x}, u, \nabla u))_{x_\alpha} - a_0(\mathrm{x}, u, \nabla u) = 0, \quad u\Big|_{\partial\Omega} = 0. \qquad (1)$$

Предполагается, что функции $a_\alpha(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s})$, $\alpha = 0, \ldots, n$, $\mathrm{x} \in \Omega$, $\mathbf{s} = (s_0, \mathrm{s}) = (s_0, s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}_{n+1}$ каратеодориевы и подчиняются следующим условиям.

1) Существуют измеримые неотрицательные функции $\psi(\mathrm{x})$, $\Psi(\mathrm{x})$, $\varphi(\mathrm{x})$, $\Phi(\mathrm{x})$ такие, что для п.в. $\mathrm{x} \in \Omega$ и любых $s_0 \in \mathbb{R}$, $\mathrm{s}, \mathrm{t} \in \mathbb{R}_n$, $\mathrm{s} \neq \mathrm{t}$, справедливы неравенства:

$$\sum_{\alpha=0}^{n} a_\alpha(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}) s_\alpha \geqslant \varphi(\mathrm{x}) \sum_{\alpha=0}^{n} B_\alpha(s_\alpha) - \psi(\mathrm{x});$$

$$\sum_{\alpha=0}^{n} \overline{B}_\alpha(a_\alpha(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s})) \leqslant \Phi(\mathrm{x}) \sum_{\alpha=0}^{n} B_\alpha(s_\alpha) + \Psi(\mathrm{x});$$

$$\sum_{\alpha=1}^{n}(a_\alpha(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}) - a_\alpha(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{t}))(s_\alpha - t_\alpha) > 0.$$

2) Функции $B_0(z), B_1(z), ..., B_n(z)$ и дополнительные к ним $\overline{B}_0(z)$, $\overline{B}_1(z), ..., \overline{B}_n(z)$ удовлетворяют Δ_2-условию (см. [1]), а также существует ϵ, такое, что $0 < \epsilon < 1$ и

$$B_\alpha(z^{1+\epsilon}) \prec B_0(z), \quad \alpha = 1, 2, \ldots, n.$$

3) Для неотрицательных функции $\varphi, \psi, \Psi, \Phi$ имеют место включения

$$\psi,\ \Psi \in L_{1,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}),\ \ 1/\varphi,\ \varphi,\ \Phi \in L_{\infty,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}).$$

Исследуется разрешимость задачи (1) в локальных пространствах Соболева-Орлича, никаких условий на рост входных данных при $\mathrm{x} \to \infty$ не накладывается.

Теорема. *Если выполнены условия* 1) – 3), *то существует обобщенное решение задачи* (1).

Ранее Л.М. Кожевниковой и А.А. Хаджи (Никитиной) в [2] было установлено существование решения задачи (1) при условии строгой монотонности соответствующего эллиптического оператора. В настоящей работе этот результат получен лишь при условии строгой совокупной монотонности функций $a_\alpha(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s})$, $\alpha = 1, \ldots, n$, по переменной $\mathrm{s} \in \mathbb{R}_n$. При этом доказано, что соответствующий эллиптический оператор является псевдомонотонным.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-31-50034/16). Автор выражает искреннюю благодарность научному руководителю Кожевниковой Л.М. за помощь в подготовке статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рутицкий Я. Б. *Выпуклые функции и пространства Орлича.* – М.: ГИФМЛ, 1958. – 272 с.

2. Кожевникова Л. М., Хаджи А. А. *Существование решений анизотропных эллиптических уравнений с нестепенными нелинейностями в неограниченных областях* // Матем. сборник. – 2015. – Т. 206. – № 8. – С. 99–126.

Ан. Ан. Новиков

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
a.hobukob@gmail.com

МЕРЫ НА ОРТОИДЕАЛАХ И L_1-ПРОСТРАНСТВА, АССОЦИИРОВАННЫЕ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ АЛГЕБР ОПЕРАТОРОВ

Пусть a – оператор, присоединенный к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$, действующей в гильбертовом пространстве H. Через $L_1(a)$, $L_\infty(a)$ обозначены пространства, введенные в работе [1].

Подмножество $\mathcal{I}$ множества $\mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$ называется *ортоидеалом* в $\mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$, если выполняются следующие условия:

(i) $q \leqslant p \in \mathcal{I},\ q \in \mathcal{M}^{\mathrm{pr}} \implies q \in \mathcal{I}$,

(ii) $p, q \in \mathcal{I},\ pq = 0 \implies p + q \in \mathcal{I}$.

Пусть $\mathcal{I}$ – ортоидеал в $\mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$. Отображение $\mu : \mathcal{I} \to \mathbb{R}^+$, которое удовлетворяющее условиям

$$p = \sum_{i \in I} p_i \ (p_i \in \mathcal{I},\ p_i p_j = 0,\ i \neq j) \implies \mu(p) = \sum_{i \in I} \mu(p_i),$$

называется *мерой на ортоидеале* $\mathcal{I}$. Мера μ на $\mathcal{I}$ называется *регулярной*, если существует нормальный вес ψ на $\mathcal{M}$ такой, что $\psi(p) = \mu(p)$ $(p \in \mathcal{I})$.

Пусть ψ – нормальный полуконечный след на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$, который удовлетворяет условию $\psi(a) < +\infty$. Тогда формула

$$\Phi_\psi(b) = \psi(b_1) - \psi(b_2) \quad (b_1, b_2 \in L_\infty^{\mathrm{sa}}(a) \cap \mathcal{M}^+;\ b = b_1 - b_2)$$

корректно определяет элемент Φ_ψ в $L_1^+(a)$.

Теорема 1. *Пусть a – инъективный положительный оператор из $\mathcal{M}$. Тогда $\mathcal{M}^{\mathrm{pr}} \cap L_\infty^{\mathrm{sa}}(a) = \mathcal{I}_a$ – ортоидеал в $\mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$. Для каждого $\Phi \in L_1^{\mathrm{h}}(a)$ отображение $\mu_\Phi : \mathcal{I}_a \to \mathbb{R}$, определенное равенством*

$$\mu_\Phi(p) = \Phi(p),$$

вполне аддитивно. Отображение $\Phi \mapsto \mu_\Phi$ $(\Phi \in L_1^{\mathrm{h}}(a))$ инъективно.

Следствие 1. *Если $\Phi \in L_1^+(a)$, то μ_Φ – полуконечная мера на ортоидеале $\mathcal{I}_a$.*

Следствие 2. *Пусть Φ – элемент $L_1^+(a)$ и ψ – нормальный полуконечный вес на $\mathcal{M}$ такой, что $\mu_\Phi = \psi|_{\mathcal{I}_a}$. Тогда $\Phi = \Phi_\psi$.*

Теорема 2. *Пусть a – положительный инъективный ядерный оператор в отделимом гильбертовом пространстве H, и $\mathcal{B}(H)$ обозначает алгебру фон Неймана всех ограниченных операторов, действующих в гильбертовом пространстве H. Существует нерегулярная полуконечная мера на ортоидеале $\mathcal{I}_a$ в $\mathcal{B}(H)^{\mathrm{pr}}$, которая может быть представлена как разность двух регулярных полуконечных мер на $\mathcal{I}_a$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Novikov A. *L_1-space for a positive operator affiliated with von Neumann algebra* // Positivity. – 2016. – http://dx.doi.org/101007/s11117-016-0422-4.

2. Novikov An.An., Tikhonov O.E. *Measures on orthoideals and L_1-spaces associated with positive operators* // Lobachevskii Journal of Mathematics – 2016 – V. 37 – I. 4 – P. 497–499.

3. Новиков А.А., Тихонов О.Е. *L_1-пространства, ассоциированные с положительными операторами, присоединенными к алгебре фон Неймана* // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. – Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, 2015. – Т. 51. – С. 335-336.

4. Новиков А.А. *L_1-пространства, асоциированные с положительными операторами, присоединенными к алгебре фон Неймана* // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского – Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, 2014 – Т. 50. – С. 133-134.

5. Новиков А.А., Тихонов О.Е. *Пространства типа L_1, ассоциированные с положительными операторами* // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. – Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, 2013. – Т. 46 – С. 336-337.

Ан. Ан. Новиков

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
a.hobukob@gmail.com

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ЦЕНТРАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ АЛГЕБР ОПЕРАТОРОВ НЕРАВЕНСТВАМИ

Пусть $\mathcal{A}$ – C*-алгебра. Через $\mathcal{A}^+$ обозначается конус положительных элементов алгебры $\mathcal{A}$. Через $\mathcal{A}^*, \mathcal{A}^*_h, \mathcal{A}^*_+$ обозначаются пространство непрерывных функционалов на алгебре $\mathcal{A}$, его вещественное подпространство эрмитовых функционалов и положительная часть пространства непрерывных функционалов.

Теорема. *Для $a \in \mathcal{A}^+$ следующие утверждения эквивалентны:*

(i) *a лежит в центре $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ алгебры $\mathcal{A}$;*

(ii) *$f^+(a) \leqslant f_1(a)$ для каждого $f \in \mathcal{A}^*_{\mathrm{h}}$ и любого разложения $f = f_1 - f_2$, где $f_1, f_2 \in \mathcal{A}^*_+$;*

(iii) *отображение $f \mapsto f^+(a)$ $(f \in \mathcal{A}^*_{\mathrm{h}})$ монотонно, т. е. $f, g \in \mathcal{A}^*_{\mathrm{h}}$, $f \leqslant g \implies f^+(a) \leqslant g^+(a)$;*

(iv) *отображение $f \mapsto f^+(a)$ $(f \in \mathcal{A}^*_{\mathrm{h}})$ субаддитивно, т. е. $(f+g)^+(a) \leqslant f^+(a) + g^+(a)$ для всех $f, g \in \mathcal{A}^*_{\mathrm{h}}$;*

(v) *отображение $f \mapsto |f|(a)$ $(f \in \mathcal{A}^*_{\mathrm{h}})$ субаддитивно, т. е. $|f+g|(a) \leqslant |f|(a) + |g|(a)$ для всех $f, g \in \mathcal{A}^*_{\mathrm{h}}$;*

(vi) *отображение $f \mapsto f^+(a)$ $(f \in \mathcal{A}^*_{\mathrm{h}})$ выпукло;*

(vii) *отображение $f \mapsto |f|(a)$ $(f \in \mathcal{A}^*_{\mathrm{h}})$ выпукло;*

(viii) $|f|(a) = \|a^{\frac{1}{2}} f a^{\frac{1}{2}}\|$ *для всех* f *из* $\mathcal{A}^*$;

(ix) *отображение* $f \mapsto |f|(a)$ *субаддитивно на* $\mathcal{A}^*$,

т. е. $|f+g|(a) \leqslant |f|(a) + |g|(a)$ *для всех* $f, g \in \mathcal{A}^*$;

(x) $|f|(a) = \|a^{\frac{1}{2}} f a^{\frac{1}{2}}\|$ *для всех* f *из* $\mathcal{A}^*_{\mathrm{h}}$;

(xi) *неравенство* $|f(a)| \leqslant |f|(a)$ *верно для любого* f *из* $\mathcal{A}^*$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Novikov A. *L_1-space for a positive operator affiliated with von Neumann algebra* // Positivity. – 2016. – http://dx.doi.org/101007/s11117-016-0422-4.

2. Novikov An.An., Tikhonov O.E. *Characterization of central elements of operator algebras by inequalities* // Lobachevskii J. of Math. – 2015. – V. 36 – I. 2 – P. 208–210.

3. Новиков А.А., Тихонов О.Е. *Неравенства для операторов, характеризующие присоединенность их к центру алгебры фон Неймана* // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского – Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, 2015. – Т. 51. – С. 333-334.

3. Новиков А.А., Тихонов О.Е. *L_1-пространства, ассоциированные с положительными операторами, присоединенными к алгебре фон Неймана* // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. – Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, 2015. – Т. 51 – С. 335-336.

4. Новиков А.А. *L_1-пространства, асоциированные с положительными операторами, присоединенными к алгебре фон Неймана* // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. – Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, 2014 – Т. 50 – с. 133-134.

5. Новиков А.А., Тихонов О.Е. *Пространства типа L_1, ассоциированные с положительными операторами* // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. – Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, 2013. – Т. 46. – С. 336-337.

А. О. Новиков

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
novartole@yandex.ru

ВАРИАЦИЯ ЕМКОСТИ ТРЕХМЕРНОГО КОНДЕНСАТОРА ПРИ ГЛАДКОМ ИЗМЕНЕНИИ ЕГО ГРАНИЦЫ

Пусть D — область, заключенная между замкнутыми, гладкими, диффеоморфными сфере поверхностями Σ_0 и Σ_1 такими, что Σ_1 охватывает Σ_0. Пусть функция $U\colon \overline{D} \to [0,1]$ принадлежит классу $C(\overline{D}) \cup C^2(D)$ и является решением следующей задачи Дирихле

$$\begin{cases} \triangle u(x) = 0, \ x \in D, \\ U(x) = 0, \ x \in \Sigma_0, \\ U(x) = 1, \ x \in \Sigma_1. \end{cases}$$

Определение. *Величина*

$$Cap(D) = \int_D \|\nabla U(x)\|^2 \, dx$$

называется конформной емкостью конденсатора с полем D.

Вариации емкостей конденсаторов при гладком изменении его граничных пластин рассматривались ранее, например, в [1] для случая плоских областей и в [2] для конденсаторов в R^n, поле которых ограничено концентрическими сферами. Мы продолжаем эти исследования.

Пусть φ есть некоторая ограниченная единицей функция с компактным носителем, являющимся подмножеством области параметризации (обозначим ее G) одной из граничных поверхностей (для определенности можно выбрать внешнюю поверхность Σ_1), а ε — некоторое фиксированное малое число. Область, расположенную между поверхностями Σ_0 и

$$\Sigma_{1,\varepsilon} := \big\{ y + \varphi(y)\vec{n}(y),\ y \in G \big\},$$

где $\vec{n}(y)$ есть вектор внутренней единичной нормали, взятой в точке y, обозначим через D_ε.

Теорема. *Если множества D и ∂D принадлежат классу $C^{2,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$ (см. [3, с. 95]), множество нулей градиента функции U является нуль-множеством, а отображение, индуцируемое потенциальными кривыми, нормированными так, что длина вектора касательной к такой кривой в каждой точке равна обратной величине квадрата градиента функции U, является диффеоморфизмом (за исключением, может быть, конечного числа точек), тогда, с точностью до малых более высокого порядка, чем ε, имеет место неравенство*

$$Cap(D_\varepsilon) - Cap(D) \leqslant C(\varepsilon),$$

где

$$C(\varepsilon) \sim \int_{D \setminus D_\varepsilon} \|\nabla U(x)\|^2\, dx,\ \varepsilon \to 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Насыров С. Р. *Вариации емкостей Робена и их приложения* // Сиб. матем. журн. – 2008. – Т. 49. – № 5. – С. 1128–1146.

2. Михайлов Е. В. *Вариация емкости кольцевого конденсатора в $\mathbb{R}^n$* // Тр. Матем. центра им. Н. И. Лобачевского. – Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, 2010. – Т. 40.

3. Гилбарг Д., Трудингер М. *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка* – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 464 с.

В. В. Новиков, Л. Н. Февральских

Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,

vvnovikov2007@yandex.ru, grigorieva_ln@mail.ru

К ЗАДАЧЕ О ЛАМИНАРНОМ ДИНАМО

Рассматривается задача о движении проводящей вязкой жидкости между неконцентрическими вращающимися сферами. Считается, что центр симметрии внутренней сферы сдвинут относительно центра внешней сферы в экваториальной плоскости на малое расстояние. В рамках этой модели решение задачи гидродинамики, не учитывающей влияние магнитного поля на движение жидкости, позволяет получить радиальное течение [1]. В данной работе рассмотрен вопрос о возможности генерации магнитного поля течением жидкости, найденным в [1].

Запишем уравнения магнитной гидродинамики [2] в безразмерном виде:

$$\varepsilon \text{ rot } \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \bigtriangledown) \vec{v} \right) = s \text{ rot } \left(\vec{H}, \bigtriangledown \right) \vec{H} + \text{rot } \triangle \vec{v}, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = R_m \text{ rot } [\vec{v}, \vec{H}] + \triangle \vec{H}, \qquad (2)$$

$$\text{div } \vec{v} = 0, \qquad (3)$$

$$\text{div } \vec{H} = 0, \qquad (4)$$

где

$$\varepsilon = \frac{c^2}{4\pi\sigma\nu},\ s = \frac{I^2\sigma}{\rho\nu c^2},\ R_m = \frac{4\pi\sigma v_* R}{c^2},\ t_* = \frac{4\pi\sigma R^2}{c^2},$$

R – масштаб длины, t_* – масштаб времени, I – масштаб силы тока, v_* – характерная скорость потока.

Условия малости параметров $\varepsilon \ll 1,\ s \ll 1$ позволяют пренебречь нелинейными членами в (1) и свести систему (1)-(3) к последовательному решению:

1. уравнений гидродинамики (1), (3) без учета влияния магнитного поля на движение жидкости, рассмотренных в [1],

2. уравнения индукции (2) совместно с уравнением неразрывности (4) при известном течении $\vec{v}$.

Решение уравнений (2),(4) ищется в виде ряда по шаровым векторам [2]:

$$\vec{H}\,(r,\theta,\varphi) = e^{\lambda t} \sum_{l=1,2,\ldots,|m|\leqslant l} \left(\Psi^+_{lm}(r)\vec{Y}^+_{lm} + \Psi^0_{lm}(r)\vec{Y}^0_{lm} + \Psi^-_{lm}(r)\vec{Y}^-_{lm}\right).$$

Группируя коэффициенты перед шаровыми векторами с одинаковыми индексами, получим систему обыкновенных дифференциальных линейных уравнений относительно радиальных функций $\Psi^+_{lm}(r)$.

После замены производных разностными аналогами задача сводится к нахождению собственных значений λ_k усеченной системы. Интерес представляет значение λ^* с наибольшей действительной частью. Построена зависимость λ^* от магнитного числа Рейнольдса R_m для $L = 1, 2$. Установлено критическое значение $R_m^{kp.}$, при котором действительная часть λ^* становится положительной. В этом случае происходит возбуждение магнитного поля [3]. Для $L = 1$ значение $R_m^{kp.} \approx 32$, для $L = 2$ значение $R_m^{kp.} \approx 29$.

Полученные результаты могут быть полезны при исследовании влияния конвективных течений в жидком ядре на геомагнитное поле.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 15-01-08326).

ЛИТЕРАТУРА

1. Новиков В. В., Февральских Л. Н. *Течение жидкости между неконцентрическими сферами, совершающими дифференциальное вращение.* // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки – 2016. – Т. 158. – № 1. – С. 129–140.

2. Петрашень Г. И. *Динамические задачи теории упругости в случае изотропной сферы.* // Ученые записки ЛГУ. Серия математических наук. – 1949. – Вып. 17. – № 114. – С. 2–27.

3. Моффат Г. *Возбуждение магнитного поля в проводящей среде.* – М.: Мир, 1980. – 342 с.

4. Денисов Г. Г., Новиков В. В. *О течении жидкости между вращающимися поверхностями.* // Прикладная механика и техническая физика. – 2011. – Т. 52. – № 1. – С. 40–46.

П. А. Новиков

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
novikov@it.kfu.ru

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРАНИЦ ОБЛАСТИ ПРОДОЛЖЕНИЯ ЛОКАЛЬНО НАИБОЛЕЕ МОЩНОГО ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО КРИТЕРИЯ

Известно (см. [1], [2]), что область продолжения локально наиболее мощного последовательного критерия проверки гипотезы $H_0 : \theta = \theta_0$ при альтернативе $H_1 : \theta > \theta_0$ о вещественном

параметре θ распределения независимых наблюдений имеет вид интервала (A, B), однако процедура определения границ интервала A и B нигде в литературе явно не описана. В настоящей работе предлагается алгоритм численного нахождения границ области продолжения (A, B) по заданным вероятности ошибки первого рода α и среднему объему выборки N (см. [2]).

Задача нахождения (A, B) рассматривается как задача численного решения системы нелинейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \alpha(A, B) = \alpha, \\ N(A, B) = N \end{cases} \tag{1}$$

относительно переменных A и B, где $\alpha(A, B)$ – вероятность ошибки I рода, $N(A, B)$ – средний объем наблюдений при данных A и B, при этом представление функций $\alpha(A, B)$ и $N(A, B)$, а тем более их производных, в аналитическом виде весьма сложно. Суть предлагаемого алгоритма состоит в том, что система (1) относительно A и B решается численно с помощью метода Бройдена [3], причем на каждом шаге метода Бройдена для текущих A и B вычисление $\alpha(A, B)$ и $N(A, B)$ производится методом Монте–Карло. Для ускорения работы алгоритма применяются паралелльные вычисления.

Алгоритм реализован на языке программирования C++ с использованием библиотеки параллельного программирования OpenMP. Точность и время выполнения алгоритма позволяют использовать его на практике.

ЛИТЕРАТУРА

1. Berk R. H. *Locally Most Powerful Sequential Tests* // Ann. Statist. – 1975. – V. 3. – № 2. – C. 373–381.

2. Новиков Ан. А., Новиков П. А. *Локально наиболее мощные последовательные критерии проверки простых гипотез против односторонних альтернатив для независимых наблюдений* // Теор. вероят. прим. – 2011. – Т. 56. – № 3. – С. 449–477.

3. Broyden C. G. *A class of methods for solving nonlinear simultaneous equations* // Math. Comp. – 1965. – V. 19. – № 92. – P. 577–593.

С. К. Паймеров, А. В. Семёнова, Д. Э. Соколова

Марийский государственный университет, paymerov@mail.ru, nastasya.semenova.1998@yandex.ru, diana1997.31@mail.ru

О ПРИЛОЖЕНИИ ФОРМУЛЫ ТЕЙЛОРА К ЗАДАЧЕ О ПРИБЛИЖЕННОМ СПРЯМЛЕНИИ ДУГИ ОКРУЖНОСТИ

Целью работы является обобщение формулы Гюйгенса из [1, с. 261] для приближенного спрямления дуги окружности, малой по сравнению с радиусом, на случай произвольного конечного числа n хорд. Пусть $s = rx$ – длина дуги окружности радиуса r, соответствующая центральному углу x радиан; $d_k = 2r\sin(2^{-k}x)$ – хорды, соответствующие центральным углам $2^{1-k}x$, $1 \leqslant k \leqslant n$.

Рассмотрим задачу о представлении $s = rx$ приближенной формулой вида

$$s \approx \sum_{k=1}^{n} A_k d_k \tag{1}$$

с неопределенными коэффициентами A_k, $1 \leqslant k \leqslant n$. Используя формулу Тейлора (Маклорена) для функции $f(x) = \sin x$

с остаточным членом в форме Лагранжа, получим:

$$rx \approx 2r\sum_{k=1}^{n} A_k \sin\frac{x}{2^k} = 2r\sum_{k=1}^{n} A_k\Big(\frac{x}{2^k} - \frac{1}{3!}\Big(\frac{x}{2^k}\Big)^3 + \ldots +$$
$$+ \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\Big(\frac{x}{2^k}\Big)^{2n-1} + \frac{(-1)^n\theta_k}{(2n+1)!}\Big(\frac{x}{2^k}\Big)^{2n+1}\Big);$$
$$0 < \theta_k < 1, \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Собирая коэффициенты при одинаковых степенях x и последовательно умножая на $2^{(2j-1)n}$, $1 \leqslant j \leqslant n$, запишем систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных A_k, $1 \leqslant k \leqslant n$:

$$\sum_{k=1}^{n} 2^{n-k} A_k = 2^{n-1}; \quad \sum_{k=1}^{n} 2^{(2j-1)(n-k)} A_k = 0, \quad 2 \leqslant j \leqslant n.$$

С использованием [2] найдены искомые значения:

$$A_1 = \frac{(-1)^{n+1}}{(2^2-1)(2^4-1)\ldots(2^{2n-2}-1)};$$
$$A_k = \frac{(-1)^{n+k}2^{k^2-1}}{(2^2-1)(2^4-1)\ldots(2^{2k-2}-1)\cdot(2^2-1)(2^4-1)\ldots(2^{2n-2k}-1)},$$
$$2 \leqslant k \leqslant n-1;$$
$$A_n = \frac{2^{n^2-1}}{(2^2-1)(2^4-1)\ldots(2^{2n-2}-1)}. \quad (2)$$

Теорема. *Имеет место формула (1), где A_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, определены в (2). Для погрешности формулы (1) справедлива оценка*

$$\Big|s - \sum_{k=1}^{n} A_k d_k\Big| < \frac{r|x|^{2n+1}}{(2n+1)!\cdot 2^{n^2-4n-2}}.$$

В частном случае при $n = 3$ получается

Следствие. *Имеет место формула*

$$s \approx \frac{1}{45}d_1 - \frac{8}{9}d_2 + \frac{256}{45}d_3$$

с оценкой погрешности

$$\left| s - \left(\frac{1}{45}d_1 - \frac{8}{9}d_2 + \frac{256}{45}d_3 \right) \right| < 7 \cdot 10^{-8} r x^7.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Фихтенгольц Г. М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления.* Т. 1. – М.: Наука, 1969. – 608 с.

2. Клейбанов С. Б., Норкин К. Б., Привальский В. Б. *Обращение матрицы Вандермонда* // Автоматика и телемеханика. – 1977. – Вып. 4. – С. 176–177.

Ю. С. Половинкина, Е. С. Щербинин

САФУ им. М.В. Ломоносова

МОДЕЛИРОВАНИЕ АДАПТИВНОГО РЕГУЛЯТОРА ДЛЯ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Основным элементом системы генерации электроэнергии является электрический генератор. Преобладающую роль здесь играют электромеханические индукционные генераторы переменного тока. Такие генераторы имеют сравнительно простое устройство и позволяют генерировать большие токи при достаточно высоком напряжении. Функция обеспечения работоспособности энергосистемы возлагается на системы автоматического регулирования, поддерживающие приемлемые показатели качества электроэнергии как в нормальном, так и в аварийном (нештатном) режимах. В настоящее время в рамках систем управления широкое распространение получили нечеткие

логические регуляторы (НЛР). Нечеткие логические регуляторы являются экспертными, и алгоритмы их синтеза трудно формализовать для сложных объектов управления, обладающих свойством уникальности. Нечеткий регулятор позволяет эффективно демпфировать колебания мощности при заранее неизвестной и меняющейся математической модели генератора и энергосистемы. Также он позволяет исключить сложные и трудоемкие работы по настройке во время проведения пусковых испытаний и в процессе эксплуатации синхронного генератора. Синхронный генератор, работающий в системе генерации электроэнергии, является нестационарным и нелинейным объектом, что обуславливает необходимость применения для его регулирования адаптивных автоматических регуляторов возбуждения (АРВ) и стабилизаторов мощности (СМ), обеспечивающих демпфирование колебаний ротора и, как следствие, улучшение устойчивости энергосистемы.

Задачей регулятора является создание дополнительной составляющей электрической мощности ΔPe, которая изменяется в фазе с преобразованием полного угла нагрузки Θ, регулируя напряжение возбуждения Vf. Рассмотрим процедуру построения нечеткого алгоритма управления. Настройка параметров функций принадлежности входов и коэффициентов вывода выполняется на основании пар данных "вход- выход". Осуществляется отбор наиболее значимых правил [1]:

– если производная по отклонению скорости ротора dw/dt имеет значение «Средняя положительная», то выходное значение переменной $Vstab$ - напряжение стабилизации будет равняться «Средняя положительная»;

– если производная по отклонению скорости ротора dw/dt имеет значение «Средняя отрицательная», то выходное значе-

ние переменной *Vstab* - напряжение стабилизации будет равняться «Большая отрицательная»;

– если производная по отклонению скорости ротора *dw/dt* имеет значение «Малая», то выходное значение переменной *Vstab* - напряжение стабилизации будет равняться «Малая». Если угол отклонения ротора одного из генераторов выходит за предельные значения (выходит из синхронизма), то срабатывает система защиты.

Энергосистема работает стабильно после короткого замыкания на линиях электропередач, генераторы не выпадают из синхронизма, поскольку нечеткий регулятор стабилизирует работу энергосистемы, позволяет уменьшить вмешательство оператора в процесс управления и, следовательно, позволяет разработать новые методики управления, более адаптированные к промышленной среде. Кроме того, можно выполнить оптимизацию сложных контуров регулирования без проведения всесторонних математических исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жданов А. А. *Об одной методологии автономного адаптивного управления*// Труды Института сист. прогр. — М.: Бионформсервис, 2000. — Т. 1. — С. 66-83.

2. Щербинин Е. С. *Моделирование электроэнергетической системы в среде Matlab Simulink* [Электронный ресурс] // Материалы Межд. молодежной науч.-практ. конф. «Интеллектуальный потенциал XXI века» (Прага, 15 февраля 2016 г.) / под ред. А.И. Вострецова. – Praga: Vydavatel «Osviceni», 2016. — С. 17-22.

А. И. Рафиков, А. Ф. Кужаев

Башкирский государственный университет,

arsenkuzh@outlook.com, azat@rafikov.me

СДВИГИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Как известно, при изучении вопросов полноты систем экспоненциальных мономов (в частности, экспонент) большую роль играют специальные целые функции экспоненциального типа, обращающиеся в нуль по крайней мере на последовательности показателей $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ указанной системы. Это означает, что исследование геометрических характеристик последовательностей комплексных чисел является важным для получения результатов, касающихся полноты. Работы [1] и [2] показывают, что большое значение имеют верхняя плотность $\bar{n}(\Lambda)$, максимальная плотность $\bar{n}_0(\Lambda)$, а также верхняя логарифмическая «блочная» плотность $\bar{L}(\Lambda)$ положительной последовательности Λ, определяемые следующим образом:

$$\bar{n}(\Lambda) = \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \sum_{\lambda_n \leqslant t} 1 = \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{n}{\lambda_n},$$

$$\bar{n}_0(\Lambda) = \lim_{\delta\to 0+0} \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{1}{\delta t} \sum_{(1-\delta)t<\lambda_n\leqslant t} 1,$$

$$\bar{L}(\Lambda) = \lim_{a\to+\infty} \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{1}{\ln a} \sum_{t<\lambda_n\leqslant at} \frac{1}{\lambda_n}.$$

Наше исследование заключается в следующем. Пусть $M = \{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — неубывающие последовательности положительных чисел с единственной предельной точкой $+\infty$, связанные соотношением $\lambda_n = \mu_n - \alpha_n$, где $\alpha_n \geqslant 0$. Предположим, что предел

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha_n}{\mu_n} \tag{1}$$

существует и равен $A \leqslant 1$.

Теорема. *Если* $(1-A)^2 + (\bar{L}(M))^2 \neq 0$, *то справедливы следующие формулы:*

$$\bar{n}(\Lambda) = \frac{\bar{n}(M)}{1-A}, \quad \bar{n}_0(\Lambda) = \frac{\bar{n}_0(M)}{1-A}, \quad \bar{L}(\Lambda) = \frac{\bar{L}(M)}{1-A}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Malliavin P., Rubel L. A. *On small entire functions of exponential type with given zeros* // Bulletin de la SMF. – 1961. – Т. 89. – С. 175–206.

2. Хабибуллин Б. Н. *Полнота систем экспонент и множества единственности.* – Уфа: РИЦ БашГУ, 2011. – 176 с.

3. Koosis P. *The Logarithmic Integral I.* – Cambridge: Cambridge University Press, 1988. – 606 с.

З. З. Ризванов, Э. И. Фазлеева

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
rizvanov.zemfir@mail.ru, elmira.fazleeva@mail.ru

МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ СЮЖЕТНЫХ ЗАДАЧ «НА ДВИЖЕНИЕ» В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

С давних пор задачи играют огромную роль в обучении. Решение задач выступает и как цель, и как средство обучения. Умение составлять и решать задачи является одним из основных показателей уровня развития учащихся. Решая сюжетные задачи, человек приобретает математические знания

и повышает свое математическое образование. При овладении методом решения некоторого класса задач у человека формируется умение решать такие задачи, а при достаточной тренировке – и навык, что тоже повышает уровень математического образования.

Текстовые задачи хорошо помогают достижению всех тех целей, которые ставятся перед обучением математике: выступают эффективным средством усвоения учащимися математических методов, математических понятий и отношений между ними, способствуют более полной реализации предметных и межпредметных связей, развитию мышления, памяти, воображения, логики учащихся, обеспечивают их предпрофильную и профильную подготовку.

Текстовыми задачами на движение принято считать задачи, в которых описывается какое-либо реальное движение: куда-то едут автомобили, плывут катера, идут туристы и т.п. Основными компонентами задач на движение являются: пройденный путь или расстояние (S), скорость (v), время (t), связанные между собой основным отношением $S = vt$. Кроме того, нередко при решении таких задач используется понятие «скорость сближения».

В методике обучения математике выделены *четыре основные этапы* работы над задачей:

1) анализ текста задачи;

2) поиск решения и составление плана решения;

3) реализация (или осуществление) плана решения;

4) проверка найденного решения, поиск других способов решения.

На первом этапе предлагается работа над текстом задачи с целью понимания сюжета, заложенного в нем; выявления вели-

чин, с помощью которых описывается ситуация; установление различных зависимостей между этими величинами или определение отношений, заданных условием задачи. Результат такого предварительного анализа удобно записать в виде таблицы, схематического рисунка, графика, отрезочных или двумерных диаграмм с определенными краткими пояснениями. По краткой записи можно восстановить текст задачи.

Второй этап работы над задачей является самым трудным для учащихся. Его результатом должна являться математическая модель ситуации, причем в качестве такой модели может служить формула, уравнение, неравенство, система уравнений и т.п.

Третий этап работы с задачей предполагает решения полученного на втором этапе уравнения, неравенства или системы.

На четвертом этапе проводится исследование задачи (предлагаются другие методы и способы решения или составляется и решается обратная задача как средство проверки решения основной задачи), записывается ответ.

При работе с сюжетными задачами значимую роль играет определение метода решения. Мы рассматриваем арифметический, алгебраический и геометрический методы решения сюжетных задач и иллюстрируем их примерами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малахов Н. А., Орлов В. В., Радченко В. П., Ярмолюк В. Е. *Методика работы с сюжетными задачами: Учебно-методическое пособие.* – «Образование», 1992.

2. Поспелов В. А. *Задачи на движение.* – Санкт-Петербург: изд. дом «Литература», 2008.

3. Иванова Т. А. *Теоретические основы обучения математике в средней школе: Учебное пособие.* – Н.Новгород, НГПУ,

2003.

4. Шевкин А. В. *Обучение решению задач в 5-6 классах: Книга для учителя.* – 3-е изд. исправл. – М: ООО ТИД «Русское слово», 2002. - 208 с.

А. В. Рожков, М. В. Рожкова

Кубанский государственный университет, Краснодарский колледж управления, техники и технологий

ros.seminar@bk.ru

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ПЕРИОДИЧНОСТИ ГРУППЫ С.В.АЛЕШИНА

Периодические не локально конечные группы, названные бернсайдовыми в честь У. Бернсайда, поставившего в 1902 г. проблему об их существовании, по образному выражению Ю. И. Мерзлякова [1] "до сих пор производят впечатление лунного грунта". Первым примером бернсайдовой группы, заданной не копредставлением, а как группа автоморфизмов математического объекта, стала группа С.В. Алешина [2].

В [3] конструкция С.В. Алешина распространяется на все простые числа p и дано достаточное условие периодичности p-групп Алешина. Р.И. Григорчуком был поставлен вопрос о нахождении необходимых условий такой периодичности.

Пусть p – простое число, $V = GF(p)^p$ — векторное пространство, $\Xi = \{0,1\}^p$ — p-мерные вектора из 0 и 1.

Определение. *Положим* $v = (v_1, v_2, ..., v_p) \in V$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_p) \in \Xi$. *Подмножество* $\Sigma \subseteq \Xi$ *назовем аннулирующим, если для любого* $v \in V$ *найдется* $\xi \in \Sigma$ *такой,*

что $(\xi, v) = \xi_1 v_1 + \xi_2 v_2 + ... + \xi_p v_p = 0$. *Аннулирующее множество назовем минимальным, если никакое его собственное подмножество не является аннулирующим.*

Достаточное условие периодичности [3] утверждает, что последовательность множеств, задающая один из порождающих, содержит бесконечно много элементов некоторого аннулирующего множества. Необходимое условие — это полное описание всех минимальных аннулирующих множеств.

Теорема 1. *Множество, содержащее* $1+2+...+p = \frac{p(p+1)}{2}$ *элементов, назовем его каноническим, является минимальным: в нем* p *одноэлементных подмножеств*

$(1, 0, ..., 0), (0, 1, 0, ..., 0), ..., (0, ..., 0, 1);$

$p-1$ *двухэлементных подмножеств*

$(1, 1, 0, ..., 0), (0, 1, 1, 0, ..., 0), ..., (0, ..., 0, 1, 1);$

и т.д., и одно p *элементное множество* $(1, 1, ..., 1)$.

Теорема 2. *Минимальное аннулирующее множество содержит* $\frac{p(p+1)}{2}$ *элементов и получается из канонического аннулирующего множества применением перестановок* $\pi_1, \pi_2, ..., \pi_p \in S_p$ *к координатам соответственно всех одноэлементных, двухэлементных и т.д. подмножеств.*

По множеству Σ строим многочлен $F(x)$:

$$F(x_1, x_2, ..., x_p) = \prod_{\xi \in \Sigma} (x_1^{\xi_1} + x_2^{\xi_2} + ... + x_p^{\xi_p}).$$

Если множество Σ аннулирующее, то и многочлен $F(x)$ аннулирующий, т.е. $F(v) = 0 \forall v \in V$. Верно и обратное. Идея доказательства в том, что любой аннулирующий многочлен принадлежит идеалу $Id(x_1^p - x_1, x_2^p - x_2, ..., x_p^p - x_p)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. *Основы теории групп: Учебное пособие*, 5-е изд., – СПб.: Лань, 2009. – 288 с.

2. Алёшин С. В. *Конечные автоматы и проблема Бернсайда о периодических группах* // Матем. заметки. – 1972. – Т. 11, № 3. – С. 319—328.

3. Рожков А. В. *О подгруппах бесконечных конечно порожденных p-групп* // Матем. сб. – 1986. – Т. 129(171), № 3. – С. 422–433.

М. В. Рожкова, А. В. Рожков

Краснодарский колледж управления, техники и технологий,

Кубанский государственный университет,

ros.seminar@bk.ru

СТУДЕНЧЕСКАЯ НАУКА: STEM ТЕХНОЛОГИИ В ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

В математике имеется ряд результатов, где использование обширных машинных вычислений абсолютно необходимо. Есть подобные задачи, доступные школьникам и студентам, и в теории чисел [3]. Дополнительным стимулом является то, что задача может не иметь общепризнанного решения и занятие ею — это не просто учебная тренировка, а реальный научный эксперимент на передовых рубежах познания. В точности то, что и составляет дух STEM-технологий — Science, Technology, Engineering, Mathematics [1].

Пример 1. *Исследование свойств функции Эйлера* $\phi(n)$. Хорошо известна [2] сумма значений функции Эйлера

$$\sum_{i=1}^{n} \phi(n) = \frac{3n^2}{\pi^2} + O(n \ln n).$$

Обозначим среднее арифметическое значение функции Эйлера через $\overline{\phi}(n)$. В пакете GAP4p8r5 нами был проведен следующий **Эксперимент.** *Для всех* $n < 10^{10}$ *выполняется неравенство*

$$-0,2 < \overline{\phi}(n) - \frac{3n}{\pi^2} < 0,8.$$

Очень редко, но приближение оказывалось с недостатком, а не избытком. Все разности лежат внутри интервала единичной длины, т.е. оценка разности как $O(\ln n)$, возможно, не верна.

Пример 2. *Построение натуральных чисел, получаемых последовательным применением к ним функции* F*, которая натуральному числу* $a = \overline{a_1 a_2 ... a_n}$ *ставит в соответствие* $F(a) = a_1^k + a_2^k + ... + a_n^k$.

Нам неизвестно решена ли эта задача кем-то ранее, возможно результат является новым. Был использован пакет компьютерной алгебры на открытом коде Sage 7.3.

Теорема. *Пусть* $a = \overline{a_1 a_2 ... a_n}$, $F(a) = a_1^k + a_2^k + ... + a_n^k$. *Тогда последовательность* $\{a, F(a), F(F(a)), ...\}$ *может завершиться только следующими циклами:*

$k = 2$*: 2 цикла —* $\{1\}$, $\{4, 16, 37, 58, 89, 145, 42, 20\}$*;*

$k = 3$*: 9 циклов — 5 длины 1, по 2 длины 2 и 3;*

$k = 4$*: 6 циклов — 4 длины 1 и по 1 длины 2 и 7;*

$k = 5$*: 16 циклов — 7 длины 1, по 2 длины 2 и 10, по 1 длины 4, 6, 24, 28, 44;*

$k = 6$*: 7 циклов — 2 длины 1, по 1 длины 2, 3, 4, 10, 25;*

$k = 7$*: 17 циклов — 6 длины 1, 2 длины 2, по 1 длины 3, 6, 12, 14, 21, 27, 30, 56, 93.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Рожков А. В., Рожкова М. В. *Преподавание математики и информатики в ведущих университетах мира и опыт КубГУ* // Материалы I Всеросс. науч-практич. конф. "Университеты в системе поиска и поддержки математически одаренных детей и молодежи". – Майкоп, 2015. – С. 116-121.

2. Hardy G. H. *An Introduction to the Theory of Numbers*, 6-th Edition. – Oxford University Press. 2008. – 642 p.

3. Рожков А. В., Ниссельбаум О. В. *Теоретико-числовые методы в криптографии: Учебное пособие* – Тюмень: Изд-во ТюмГУ, 2007. – 160 с.

А. А. Саламатин, З. Ф. Мифтахова

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
arthur.salamatin2@gmail.com, zila5.94m@gmail.com

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ В ТЕОРИИ СВЕРХКРИТИЧЕСКОЙ ФЛЮИДНОЙ ЭКСТРАКЦИИ

Модель процесса сверхкритической флюидной экстракции обычно состоит из двух уравнений баланса целевых соединений. В случае растительного материала с высоким начальным содержанием экстрагируемых веществ макроскопическое уравнение фильтрации растворителя может быть записано в квазистационарном приближении [1]. Второе уравнение модели описывает микроскопический диффузионный перенос экстракта на уровне отдельной частицы измельченного сырья. Здесь часто используется приближение сужающегося ядра. В работе рассматриваются частицы плоской (пластинчатой) формы,

характеризуемые безразмерной полутолщиной a. С практической точки зрения интересен случай стратифицированного распределения полидисперсных частиц вдоль оси аппарата. В этом случае зависимость размера a от нормированной координаты $0 \leqslant \zeta \leqslant 1$ вдоль оси аппарата определяется соотношением $F(a(\zeta)) = 1 - \zeta$, где $F(a)$ — функция объемного распределения частиц по размеру a [2].

В рассматриваемом случае при степенном законе расхода растворителя от времени, с показателем степени $r - 1/2$, описанная упрощенная постановка сводится к задаче Коши

$$c' = \lambda(r)\frac{1-c}{S}, \tag{1}$$

$$S' = \frac{1}{2r\varrho}\left(S - \frac{1-c}{S}\right) \tag{2}$$

относительно неизвестных функций $c(\varrho)$ и $S(\varrho)$, где ϱ — автомодельная переменная. Начальные условия имеют следующий вид

$$c(0) = 0, \quad S(0) = 1, \tag{3}$$

а зависимость $\lambda(r)$ определяется из второй пары граничных условий, заданных на правом конце отрезка интегрирования

$$c(1) = 1, \quad S(1) = 0. \tag{4}$$

На основе решения задачи (1)–(4) можно восстановить распределение $F(a)$ по следующим формулам

$$F(\varrho) = 1 - 2\lambda(r + 1/2)\int_0^{\varrho} S(\varrho)d\varrho, \quad a = S(\varrho). \tag{5}$$

Распределения (5) соответствуют случаю полного истощения стратифицированного полидисперсного зернистого слоя к концу процесса. Предположение о полноте истощения слоя может

быть ослаблено, и возможно построение более общих формул, выражающих параметрическую зависимость $F(a)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований и Республики Татарстан, грант №15-41-02542 р_поволжье_а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Egorov A.G., Salamatin A.A. *Bidisperse shrinking core model for supercritical fluid extraction* // Chem. Eng. Technol. – 2015. – V. 38. – № 7. – P. 1203–1211.

2. Salamatin A.A., Egorov A.G. *Optimization of supercritical fluid extraction: Polydisperse packed beds and variable flow rates* // J. Supercrit. Fluids – 2015. – V. 105. – P. 35–43.

Т. В. Софронова, И. В. Тестова, Н. А. Шилова

САФУ им. М.В. Ломоносова, Высшая школа информационных технологий и автоматизированных систем,

t.sofronova@narfu.ru, i.testova@narfu.ru, n.shilova@narfu.ru

ОРГАНИЗАЦИЯ УЧЕБНОГО ПРОЦЕССА В РАМКАХ НАПРАВЛЕНИЯ ПОДГОТОВКИ «ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА» В УСЛОВИЯХ МНОГОУРОВНЕВОЙ СИСТЕМЫ ОБРАЗОВАНИЯ

Современная система высшего профессионального образования в нашей стране находится в процессе динамических изменений, вызываемых как социально-экономическими, так и политическими процессами. В настоящее время, активно развивается многоуровневая система образования, которая базируется на положении Болонского процесса. В рамках данного

положения основные образовательные программы рассчитаны на четырех- и шестилетнее обучение, то есть подготовку бакалавров и магистров соответственно. Кроме того, в соответствии с новым Федеральным законом «Об образовании в Российской Федерации» от 29 декабря 2012 г. № 273-ФЗ, который вступил в действие 1 сентября 2013 года, аспирантура становится третьей ступенью высшего образования. Таким образом, система высшего образования становиться трехуровневой.

На базе Высшей школы информационных технологий и автоматизированных систем Северного (Арктического) федерального университета им. М.В. Ломоносова обучение студентов в рамках направления подготовки «Прикладная математика и информатика» началось с 2000 года. Этап перехода на многоуровневую систему подготовки был инициирован открытием в 2007 году программы бакалавриата по направлению подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика». С 2009 года реализуются образовательные программы магистратуры по направлению подготовки 01.04.02 «Прикладная математика и информатика», такие как «Математическое и информационное сопровождение экономической деятельности» и «Системное программирование». В 2011 году была открыта магистерская программа «Высокопроизводительные и облачные вычисления», а в 2014 — «Математическое моделирование социально-экономических процессов», по которым в настоящее время обучается порядка 30 человек.

В своей деятельности по развертыванию магистратуры университет руководствовался Положением о магистерской подготовке (магистратуре) в системе многоуровневого высшего образования Российской Федерации, утвержденным Постановлением Государственного Комитета Российской Федерации по

высшему образованию № 42 от 10 сентября 1993 года. Этот нормативный документ сыграл и продолжает играть важнейшую роль в становлении института магистратуры в Российской Федерации.

Переход на многоуровневую систему подготовки заставляет, в первую очередь, согласовывать требования трех стандартов: стандартов подготовки бакалавров, магистров и аспирантов, а также обязывает к гармонизации основных образовательных программ и созданию системы взаимосвязанных учебных планов всех уровней.

Создание системы взаимосвязанных учебных планов в университете по направлению подготовки «Прикладная математика и информатика» на всех уровнях осуществлялось на основе глубокого анализа и согласования требований трех стандартов. Сопряженность образовательных программ и учебных планов осуществлялась путем введения в учебный план бакалавриата дисциплин из стандартов магистратуры, а также за счет расширения фундаментальной подготовки бакалавров в профессиональном цикле, введения дисциплин, являющихся общими для всех профилей в рамках направления подготовки.

Реализованный в Высшей школе информационных технологий и автоматизированных систем принцип согласованности структурного и содержательного наполнения основных образовательных программ и рабочих учебных планов рамках направления подготовки «Прикладная математика и информатика» позволяет сделать процесс обучения непрерывным в системе «бакалавриат-магистратура-аспирантура».

Освоение основных образовательных программ происходит в процессе профилизации подготовки и фундаментализации (академичности) знаний студентов. В результате полного цик-

ла двухуровневой подготовки у выпускников формируются компетенции, которые позволяют им решать специализированные задачи во всех областях профессиональной деятельности.

Взаимодополняемость и взаимозависимость уровней подготовки обеспечивают целостность образовательного процесса и его нелинейность, а также междисциплинарную интеграцию и возможность проектировать результаты обучения в контексте компетенций профиля, то есть квалификационного функционала выпускника. Преемственность уровней подготовки по направлению «Прикладная математика и информатика» прослеживается в закрепленных стандартами видах профессиональной деятельности.

Данная согласованность позволяет более успешно готовить выпускников бакалавриата и магистратуры к профессиональной деятельности или дальнейшему обучению в университете. У выпускников магистратуры по направлению подготовки «Прикладная математика и информатика» есть возможность продолжить обучение в аспирантуре по направлению подготовки 09.06.01 «Информатика и вычислительная техника», выбрав одну из двух направленностей образовательной программы: автоматизация и управление технологическими процессами и производствами или математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.

Таким образом, в Высшей школе информационных технологий и автоматизированных систем САФУ реализована трехуровневая система образования в рамках направлению подготовки «Прикладная математика и информатика», представленная бакалавриатом, магистратурой и аспирантурой. Стоит отметить, что основная цель шестилетней образовательной программы заключается в формировании научных и научно-

педагогических кадров и предполагает более жесткие требования при отборе студентов на двухуровневую подготовку. Тем самым достигается максимальная концентрация интеллектуального потенциала, ориентированного на эффективную профессиональную научно-исследовательскую и педагогическую деятельность.

Работа выполнена при частичном финансировании в рамках государственного задания «Создание вычислительной инфраструктуры для решения наукоемких прикладных задач» (Проект № 3628).

ЛИТЕРАТУРА

1. Орлова Л. Н. *Сравнительная характеристика учебного процесса в моноуровневой и многоуровневой системах образования в педагогическом вузе* // Интеграция образования. – 2003 – № 3, С. 53–59.

2. *Болонский процесс: истоки и перспективы:* [*на вопросы отвечают специалисты Рособразования*] / Федеральное агентство по образованию // Администратор образования. – 2007. – № 23. – С. 6–10.

3. Гильмиярова С. *Многоуровневое высшее образование: американский опыт и российские перспективы* // Вестник высшей школы. – 2008. – № 1. – С. 26–28.

4. Жураковский В. *Модернизация высшего образования: проблемы и пути их решения* // Высшее образование в России. – 2006. – № 1. –С. 3–14.

5. Розина Н. *О разработке нового поколения государственных образовательных стандартов* // Вестник высшей школы. – 2007. – № 3. – С. 3–9.

6. Сальников Н. *Реформирование высшей школы: актуальное состояние и проблемы* // Университетское управление:

практика и анализ. – 2008. – № 1. – С. 3–13.

7. Сенашенко В. *О тенденциях реформирования магистратуры в структуре российской высшей школы* // Высшее образование в России. – 2008. – № 3. – С. 9–22.

8. Якимович Б. *Институт магистратуры: опыт и перспективы* // Высшее образование в России. – 2008. – № 2. – С. 21–25.

И. В. Тестова, Н. А. Шилова

САФУ им. М.В. Ломоносова, Высшая школа информационных технологий и автоматизированных систем, i.testova@narfu.ru, n.shilova@narfu.ru

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ ПОПУЛЯЦИИ МОРСКИХ ВОДОРОСЛЕЙ

Изучение устойчивости и стабильности экологических систем возможно путем исследования математических моделей, используемых для описания динамики экологических сообществ. С проблемой устойчивости связаны вопросы рациональной эксплуатации природных ресурсов, оценки пределов загрязнения среды, а также прогноз последствий антропогенного воздействия на экологическую систему [1].

Целью настоящего исследования является изучение устойчивости динамической модели, описывающей процессы роста и развития биомассы водорослей [2]:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \mu(t)\varphi(s)x(t)\left(1 - \dfrac{x(t)}{x_m}\right)u, \\ \dot{s}(t) = D(s_n - s(t)) - \dfrac{\mu(t)}{\eta}\,x(t)\varphi(s); \end{cases} \tag{1}$$

где $\dot{x}$, $\dot{s}$ — скорость изменения биомассы водорослей и концентрации биогенных веществ в среде соответственно, $\mu(t)$ — функция максимальной удельной скорости роста биомассы водорослей, $\varphi(s) = s(t)/(K_s + s(t))$ — трофическая функция Моно, D — коэффициент протока, s_n — концентрация биогенных веществ в среде до начала периода вегетации, η — коэффициент, отражающий прирост биомассы водорослей на единицу потребленных биогенных веществ, $x_{\max}$ — максимально возможное значение биомассы водорослей.

Для простоты решения поставленной задачи предположим, что $\mu(t) = \text{const}$, K_s, $x_{\max}$, μ, D, s_n, η_i, $u > 0$, а систему (1) представим в виде:

$$\begin{cases} \mu \dfrac{s}{K_s + s} x \left(1 - \dfrac{x}{x_m}\right) u = 0, \\ D(s_n - s) - \dfrac{\mu}{\eta} x \dfrac{s}{K_s + s} = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Получим две стационарные точки:

$$1.\ (0; s_n), \tag{3}$$

$$2.\ \left(x_m; 0,5\left(\sqrt{\left(\frac{x_m\mu}{\eta D} + K_s - s_n\right)^2 + 4s_nK_s} - \frac{x_m\mu}{\eta D} - K_s + s_n\right)\right). \tag{4}$$

Для исследования стационарного состояния системы линеаризуем систему (2) в окрестности положения равновесия с помощью разложения функций в ряд Тейлора. Отсутствие предельных циклов фазовых траекторий было доказано с помощью критерия Бендиксона. Для этого были вычислены про-

изводные $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial g}{\partial s}$, где:

$$f = f(x,s) = \mu\,\frac{s}{K_s+s}\,x\left(1-\frac{x}{x_m}\right)u,$$
$$g = g(x,s) = D(s_n - s) - \frac{\mu}{\eta}\,x\,\frac{s}{K_s+s},$$

и показано, что выражение $\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial s}$ для любой пары $(x,s) \in \in \mathbb{R}^2_+$ является знакопостоянным и отличным от нуля.

Действительно $\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial s} < 0$, так как

$$\left[\mu\,\frac{us}{K_s+s}\left(2\,\frac{x}{x_m}-1\right) + D + \frac{\mu x}{\eta}\cdot\frac{K_s}{(K_s+s)^2}\right] > 0$$

для любой пары $(x,s) \in \mathbb{R}^2_+$. Тогда по критерию Бендиксона система (2) не имеет замкнутых траекторий-циклов.

Отсутствие предельных циклов позволяет исследовать систему, используя процедуру линеаризации в окрестности положения равновесия.

Линеаризованная система (2) в окрестности точки равновесия (3) в первом приближении имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \mu s_n (K_s + s_n)\,x_1, \\ \dot{s}_1 = -Ds_1 - \dfrac{\mu s_n}{\eta}(K_s + s_n)\,x_1; \end{cases} \tag{5}$$

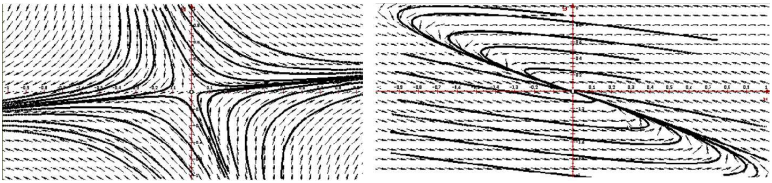
где

$$\begin{cases} x_1 = x_1^0 + \tilde{x}_1, \\ s_1 = s_1^0 + \tilde{s}_1, \end{cases}$$

и $\tilde{x}_1$, $\tilde{s}_1$ — малые приращения величин x_1, s_1 в окрестности точки $(0; s_n)$.

Анализ корней характеристического уравнения системы (5) показал, что положение равновесия (3) является неустойчивым седлом (рисунок 1а). Аналогичным образом было показано, что

стационарная точка (4) системы (2) является устойчивым узлом (рисунок 1б).



а) б)

Рис. 1 Фазовый портрет точек покоя системы

Дополнительное исследование устойчивости положения равновесия было проведено с использованием численных методов, путем варьирования начальных состояний фазовых траекторий вблизи положения равновесия. Результаты численного анализа, который был реализован в среде Delphi 7.0, показали, что особые точки (3) и (4) системы (2) являются неустойчивым седлом и устойчивым узлом соответственно.

Полученные результаты имеют практическую значимость и могут быть использованы для определения диапазонов изменения показателей устойчивости организмов в изменяющихся условиях среды обитания. На основе изменения показателей устойчивости могут быть определены возможности организмов адаптироваться к изменениям биотических и абиотических факторов среды.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (научный проект № 14-01-98800).

ЛИТЕРАТУРА

1. Мамедова Т. Ф., Десяев Е. В., Ляпина А. А. *Устойчивость математических моделей типа “хищник-жертва”* // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион.

Физико-математические науки. Математика. № 2 (22), 2012. – С. 98–105.

2. Андреева Е. А., Шилова Н. А. *Математическое моделирование и оптимальная стратегия в использовании и сохранении ресурсов популяции* // Математические методы управления. – Тверь: ТвГУ, 2010. – С. 20–30.

И. А. Турыгина

Научно-исследовательский институт механики Национального Исследовательского Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского, hodykinainna@gmail.com

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УДАРНЫХ ВОЛН С МНОГОСЛОЙНЫМИ ДЕФОРМИРУЕМЫМИ ПРЕГРАДАМИ ИЗ ПЛЕТЕНЫХ СЕТОК

Многослойные газопроницаемые преграды являются эффективным средством защиты конструкции от воздействия ударных волн (УВ). Такие преграды представляют собой слои металлических плетеных сеток и используются для уменьшения амплитуды проходящих УВ. При значительных воздействиях преграда может испытывать деформации, в том числе, необратимые. Для подобных процессов характерна взаимосвязь деформации проницаемой конструкции и динамики проникающих сред.

Разработана численная методика [1] и получены результаты взаимодействия УВ с деформируемыми многослойными пакетами металлических плетеных сеток. Пакет сеток образует деформируемый проницаемый скелет среды, который предпола-

гается непрерывной сплошной средой – континуумом. Динамическое поведение пакета сетки с движущимся поровым газом описывается на основе уравнений динамики двух взаимопроникающих континуумов, каждый из которых (скелет среды и поровый газ) имеет свои скорости, напряжения (давления) и температуры. Пакет сеток предполагается упакованным регулярным образом (т.е. нити уложены квазипараллельно) и конструктивно ортотропным с тремя осями ортотропии. Первая ось ортотропии направлена по нормали к слоям в пакете сеток, другие оси сонаправлены с направлением нитей. По результатам испытаний, проведенных в экспериментальных лабораториях НИИМ ННГУ, установлено, что пакет сеток сопротивляется сжатию по нормали к слоям и растяжению вдоль нитей в плоскости слоев. Поверхность контакта чистого газа с пористой средой (пакетом сеток) является поверхностью разрыва пористости, то есть комбинированным разрывом, на котором должны выполняться специальные условия.

С помощью пакета прикладных программ UPSGOD 2D получено численное решение осесимметричной двумерной задачи о взрыве в воздухе неканонического цилиндрического заряда конечной длины, расположенного внутри рулонированного пакета плетеных сеток (ось заряда совпадает с осью пакета). Проведено сопоставление численных результатов с известными экспериментальными данными [2] по параметрам проходящих волн. Установлено, что наличие пакета сеток снижает максимальные амплитудные значения давления на $15-20\,\%$ и импульс избыточного давления в волне на $12-15\,\%$. Относительное уменьшение амплитуды соответствует экспериментальным данным. В процессе динамического нагружения пакет сеток деформируется упругопластически и приобретает колоколооб-

разную форму, качественно соответствующую остаточной форме пакета в эксперименте.

Автор выражает благодарность за помощь в проведении исследований Глазовой Е.Г., Кочеткову А.В., Крылову С.В., Модину И.А.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (№16-08-00458), Министерства образования и науки РФ в рамках базовой части государственного задания (код проекта 2014/134 2226).

ЛИТЕРАТУРА

1. Глазова Е. Г., Кочетков А. В., Крылов С. В., Турыгина И. А. *Численное моделирование взаимодействия ударных волн с проницаемыми деформируемыми многослойными пакетами плетеных сеток* // Проблемы прочности и пластичности. – 2016. – Т. 78. – № 1. – С. 81–91.

2. Глазова Е. Г., Кочетков А. В., Крылов С. В., Митрофанов С. С., Осавчук А. Н., Дикий А. А., Куликов В. Н. *Численно-экспериментальное исследование распространения ударных волн через цилиндрические пакеты металлических сеток* // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2011. – Вып. 5(1). – С. 122–129.

Р. А. Тутыгин
Северный (Арктический) федеральный университет им. М.В. Ломоносова,
romantutygin@yandex.ru

АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О МАКСИМАЛЬНОМ ПОТОКЕ В СЕТИ

Сетью назовем орграф $G(V, E)$, каждой дуге $(u, v) \in V \times V$ которого поставлена в соответствие ее пропускная способность $c(u, v) \geqslant 0$. Функция $f : V \times V \to R$ называется потоком, если для всех дуг $f(u, v) \leqslant c(u, v)$ и выполнено условие сбалансированности [1].

Основной задачей теории потоков является поиск максимального потока в сети, который основан на теореме Форда-Фалкерсона и реализуется с помощью алгоритмов, отличающихся временем работы [2, 3]. На каждой итерации рассматривается исходный поток, затем ищется увеличивающий путь, вдоль которого снова определяется поток и т.д. Сложность алгоритма равняется $O(|E| \cdot |f|)$, где $|f|$ – мощность максимального потока. Применение алгоритма будет оправданным, если пропускные способности дуг сети не слишком велики.

Алгоритм пометок Эдмондса-Карпа заключается в нахождении кратчайшего дополняющего пути в зависимости от количества использованных дуг. Он включает в себя работу метода пометок, построение увеличивающего пути с последующим изменением потока. Его алгоритмическая сложность оценивается как $O(|V| \cdot |E|^2)$ и не требует изначального знания величины максимального потока, а зависит лишь от характеристик самого графа $G(V, E)$. При этом для сетей, богатых дугами, сложность алгоритма предсказуемо будет высокой.

Модификацией предыдущего алгоритма является алгоритм с текущей «справочной», отличающийся способом нахождения увеличивающего пути: вместо построения на каждой из итераций дерева, содержащего только один увеличивающий путь, он строит «справочную», содержащую все увеличивающие пути текущего этапа, при этом «справочная» после каждого изменения потока корректируется. Это позволяет использовать результат однократной работы алгоритма для проведения последующих итераций. При этом оценка сложности алгоритма остается прежней.

Алгоритм Диница состоит в нахождении некоторого блокирующего потока, для которого любой путь содержит насыщенную дугу: $f(u,v) = c(u,v)$. Алгоритмическая сложность оценивается как $O(|V|^2 \cdot |E|)$, но, например, для деревьев она может быть снижена и до $O(|E| \cdot log|V|))$. Реализация алгоритма позволяет получать практические результаты для сетей с относительно небольшим количеством вершин.

Широко используются также алгоритмы «проталкивания предпотока», «поднять в начало», двоичного блокирующего потока, алгоритмы Куна и Хопкрофта-Карпа поиска паросочетаний в двудольных графах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Басакер Р., Саати Т. *Конечные сети и графы.* – М.: Наука, 1974. – 368 с.

2. Форд Л., Фалкерсон Д. *Потоки в сетях.* – М.: Мир, 1966. – 277 с.

3. Адельсон-Вельский Г.М., Диниц Е.А., Карзанов А.В. *Потоковые алгоритмы.* – М.: Наука, 1975. – 119 с.

Е. С. Ульянова

Казанский (Приволжский) федеральный университет, smeshinka193@mail,ru

РАЗРАБОТКА ЭЛЕКТИВНОГО КУРСА «МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ»

Важной частью образовательного процесса при подготовке учащихся естественно-математического профиля является формирование навыков построения и исследования моделей различных процессов. Внедрение в учебный процесс элементов математического и компьютерного моделирования имеет ряд преимуществ, среди них:

- интеграция математики с естественно-научными дисциплинами (такими как физика, химия, биология);
- интеграция математики с социально-гуманитарными дисциплинами (экономика, социология и др.);
- применение знаний учащихся в сфере информационных технологий на практике;
- мотивация учащихся к изучению точных наук;
- мотивация учащихся к научно-исследовательской деятельности.

В работе описывается созданный автором элективный курс «Математическое и компьютерное моделирование».

Элективный курс предназначен для учащихся естественно-математического профиля. Особенностью курса является применение при построении моделей аппарата дифференциальных уравнений, изучение которых, обычно выходит за рамки школьной программы.

Структура курса предусматривает следующие разделы:

1) Введение в теорию обыкновенных дифференциальных уравнений

2) Построение математических моделей с применением аппарата дифференциальных уравнений.

3) Основы создания динамических визуализации.

4) Построение визуальных компьютерных моделей.

В качестве инструмента исследования математических моделей, а также построения компьютерных моделей предлагается использовать CAS GeoGebra. Выбор данного инструмента обусловлен простотой и доступностью системы GeoGebra, возможностью получения точных решений простейших дифференциальных уравнений, широкими возможностями для динамической визуализации.

Приведем одну из задач, рассматриваемых в элективном курсе.

Задача о скайдайвере. *Скайдайвер совершает затяжной прыжок с высоты h_0. На какой критической высоте требуется раскрыть парашют, чтобы приземление было безопасным, если сила сопротивления пропорциональная квадрату скорости скайдайвера и площади сечения парашюта? Построить компьютерную модель падения скайдайвера.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Чеботарева Э. В. *Компьютерный эксперимент с GeoGebra* – Казань: Казанский университет, 2015. – 61 с.

2. Самарский А. А., Михайлов А. П. *Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры.* // М.: Физматлит, 2001.

А. Х. Фатыхов

Казанский государственный архитектурно-строительный университет, vitoat@gmail.com

ОДНОРОДНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ГИЛЬБЕРТА С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ ТОЧЕК РАЗРЫВА ВТОРОГО РОДА ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Рассматривается краевая задача Гильберта теории аналитических функций с бесконечным индексом и краевым условием на вещественной оси, коэффициенты краевого условия непрерывны по Гельдеру всюду, кроме конечного числа особых точек t_k, $k=\overline{1,n}$, в которых аргумент функции коэффициентов $G(t)=a(t)-ib(t)$, причем $a^2(t)+b^2(t)\neq 0$ всюду на L, имеет разрывы второго рода (степенного порядка с показателем меньше единицы).

Пусть $D=\{z: z=x+iy, y>0\}-$ верхняя полуплоскость комплексного переменного z, L – вещественная ось. Рассмотрим краевую задачу Гильберта теории аналитических функций с краевым условием на вещественной оси

$$a(t)\Re\Phi(t)-b(t)\Im\Phi(t)=c(t),\ t\in L,\ t\neq t_k.$$

Здесь коэффициенты краевого условия непрерывны по Гельдеру всюду на интервалах $(-\infty,t_1)$, (t_k,t_{k+1}), $k=\overline{1,n-1}$, $(t_n,+\infty)$.

Краевое условие задачи Гильберта обычно записывают в виде

$$Re[e^{-i\nu(t)}\Phi(t)] = \frac{c(t)}{|G(t)|}, \quad t \in L, t \neq t_j, j = \overline{1,n}. \tag{1}$$

Справедливо представление

$$\nu(\theta) = \widetilde{\nu}(\theta) + \sum_{j=1}^{n} \nu_j(\theta), \quad \nu_j(\theta) = \begin{cases} \dfrac{\nu^-{}_j}{|t-t_j|^{\rho_j}}, & t_{j-1} < t < t_j, \\ \dfrac{\nu^+{}_j}{(t-t_j)^{\rho_j}}, & t_{j+1} < t < t_j, \end{cases}$$

для некоторых чисел ν_j^+, ν_j^-, ρ_j, $0 < \rho_j < 1$, $j = \overline{1,n}$, $t_n = +$ $+\infty$, функция $\widetilde{\nu}(\theta)$ непрерывна по Гельдеру на L, т.е. $\widetilde{\nu}(t) \in$ $\in H_\lambda(L)$, с некоторым λ и удовлетворяет условию.

$$\widetilde{\nu}(-\infty) = \widetilde{\nu}(+\infty).$$

Требуется определить функцию $\Phi(z)$, аналитическую и ограниченную в области D по краевому условию (1). В ходе решения была найдена формула общего решения однородной задачи (1), которое имеет вид функции

$$\Phi(z) = -ie^{i\Gamma(z)} \prod_{j=1}^{n} e^{i\frac{l_j e^{i\alpha_j}}{(z-t_j)^{\rho_j}}} F(z),$$

где α_j, l_j – определенные действительные постоянные, $F(z)$ произвольная аналитическая в D функция, принимающая на вещественной оси чисто мнимые значения и удовлетворяющая некоторому условию ограничения роста на вещественной оси. Исследованы условия разрешимости задачи.

А. А. Ференец

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
aferenets@it.kfu.ru

ПРОБЛЕМЫ ЦЕНТРАЛИЗОВАННОСТИ СЕТЕЙ ИНТЕРНЕТА ВЕЩЕЙ И ИХ РЕШЕНИЯ

Интернет вещей (ИВ) — это среда, в которой различным объектам (в том числе, животным и людям) присвоены уникальные идентификаторы и предоставлены возможность передачи данных через сеть без требования взаимодействия человек–человек или человек–компьютер (см., например, [1]). Для создания сетей ИВ необходимо решить ряд задач, среди которых: определение правил предоставления доступа к данным (сенсорам) и прав контроля управляющих средств (устройств воздействия), определение правил регистрации новых устройств в сети ИВ и т.п.. Эти задачи, как правило, решают локальными средствами компаний, т. о., из-за ограниченности доступа к созданным технологиям, организуя инТРАнет вместо инТЕРнета вещей [2].

Даже учитывающие унифицирующие стандарты консорциума A-IoT [3] современные создаваемые протоколы, как правило, ориентируются на наличие в сети некоторых сервисов менеджмента пользователей [4], общего сбора и обработки данных без учёта возможных неполадок в сети, чрезмерных нагрузок на подобные жизненно важные сервисы. Для повышения отказоустойчивости сетей ИВ необходимы их децентрализация – перевод вычислительных нагрузок на саму сеть устройств (туманные вычисления [5]), а также введение протоколов регистрации, аутентификации, авторизации и идентификации устройств на основе решений самих агентов сети интернета

вещей.

В качестве основы для предлагаемых протоколов берутся идеи системы безопасности AllJoyn Security 2.0 [6] с использованием различных типов списков контроля доступа (ACL) [7, 8]. Для отказа от единого сервиса Security Manager, предлагаемого во фреймворке, применяется описание уровней доверия. Вводится тонкая система доступа к отдельным компонентам извне на основе ролей. В системе определяются основные типы действий, связанные с системой безопасности и категории типичных действий, связанных с основным функционалом.

На основе категоризаций, описанных выше, введена алгебра принятия решений агентов сети ИВ, позволяющая отказаться от централизованного подхода или снизить влияние центральных сервисов в сетях ИВ. За счёт гибкого подхода в описательной части принятия решений возможна совместимость с существующими системами организации безопасности.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Татарстан (проект № 15-47-02472).

ЛИТЕРАТУРА

1. What is Internet of Things (IoT)? - Definition from WhatIs.com [Электронный ресурс] URL: http://internetofthingsagenda.techtarget.com/definition/Internet-of-Things-IoT.

2. Carsten Magerkurth. *Converged architectural reference model for the IoT v2.0.*

3. Documents — IOT-A: Internet of Things Architecture [Электронный ресурс] URL: http://www.iot-a.eu/public/public-documents/documents-1.

4. AllJoyn IoT Framework Updated with Enhanced Security Functionality [Электронный ресурс] URL: https://allseenalliance

.org/announcement/alljoyn-iot-framework-updated-enhanced-security-functionality.

5. Distefano S. Merlino G. Puliafito A. *A utility paradigm for IoT: The sensing Cloud* // Pervasive and Mobile Computing. – 2015. – Т. 20. – С. 127–144.

6. AllJoyn Security 2.0 Feature High-Level Design [Электронный ресурс] URL: https://allseenalliance.org/framework/documentation/learn/core/security2_0/hld.

7. Seitz L. Selander G. Gehrmann C. *Authorization framework for the internet-of-things* // World of Wireless, Mobile and Multimedia Networks (WoWMoM). –2013. – Т. 14. – С. 1–6.

8. Godik S. Anderson A. Parducci B. Humenn P. *Oasis extensible access control markup language (xacml) 3,* // Техн. отчёт. – OASIS, 2002.

Н. М. Фирстова, Е. А. Щепакина

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева,

firstova.natalia@yandex.ru, shchepakina@yahoo.com

МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЙ В МОДЕЛИРОВАНИИ КРИТИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ХИМИЧЕСКОЙ КИНЕТИКИ

Работа посвящена проблемам моделирования и исследования критических явлений в задачах химической кинетики на основе геометрического подхода. При моделировании и исследовании объектов и процессов различной природы, характерной особенностью которых является способность одновременно

совершать быстрые и медленные движения, естественным образом возникают сингулярно возмущенные системы. Использование аппарата интегральных многообразий сингулярно возмущенных систем является эффективным инструментом качественного исследования динамических моделей, так как позволяет получить представление о поведении системы в целом, а не ее отдельных траекторий. Особенно это актуально для моделей с нефиксированными начальными условиями и/или с большим количеством параметров.

В качестве иллюстраций такого подхода рассмотрены динамические модели электрохимических реакторов [1,2]. На основе исследования медленного интегрального многообразия определены основные режимы в исследуемых химических системах. Привлечение асимптотических методов позволило определить условия, при которых наблюдаются критические режимы, играющие роль водораздела между безопасными процессами и режимами с самоускорением. Следует отметить, что интерес к критическим явлениям объясняется не только соображениями безопасности, но и тем обстоятельством, что именно критические режимы во многих случаях являются наиболее эффективными с технологической точки зрения

Данная работа поддержана РФФИ (грант 14-01-97018) и Министерством образования и науки Российской Федерации в рамках реализации Программы “Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 20149 –2020 годы” в рамках соглашения RFMEFI58716X0033.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фирстова Н. М. *Исследование критических явлений в модели электрохимического реактора* // Вестник Самарского го-

сударственного университета – 2013. – Т. 110(9/2). – С. 221–226.

2. Shchepakina E. Firstova N. *Study of oscillatory processes in the one model of electrochemical reactor* // CEUR Workshop Proceedings. – 2016. – Vol. 1638. – P. 731–741. – DOI: 10.18287/1613-0073-2016-1638-731-741.

Ш. М. Хайдаров

Казанский (Приволжский) федеральный университет, shajdaro@kpfu.ru

МЕТОДЫ ФОРМИРОВАНИЯ МЕТАДАННЫХ НАУЧНЫХ КОЛЛЕКЦИЙ

Предложены методы и алгоритмы автоматического извлечения библиографических данных из однородных по структуре массивов публикаций (в частности, выпусков научного журнала) и формирования блоков метаданных для экспорта в международные информационно-аналитические системы.

Хранение и обработка данных в компьютерных системах, обмен данными между ними и доступ к ним пользователей невозможны без явно представленных описаний свойств этих данных. Такие описания необходимы программным средствам, выполняющим функции хранения и обработки, а также пользователям для оценки возможности применения имеющихся данных в различных ситуациях, интерпретации и анализа их содержания, формулировки поисковых запросов. Описания такого рода называются метаданными и являются особым видом информационных ресурсов [1]. Именно метаданные играют важную роль при обработке научной информации.

Метаданные научных публикаций включают библиографическое описание статьи (авторы, название, источник (например, журнал), год издания, том, номер, начальная и конечная страницы); авторское резюме (аннотация, реферат) и ключевые слова, названия и места расположения организаций, от имени которых авторы представили свои материалы; фамилии членов редколлегий или рецензентов, представивших статьи к публикации [2].

Сформированные метаданные позволяют в автоматизированном режиме получать любой набор выходных данных, например, оригинал-макет сборника трудов, аннотаций и т.д., а также интегрироваться в научное информационное пространство, например, в базы цитирования Scopus, Web of Science, РИНЦ и др.

В работе предложены методы и алгоритмы автоматизированного формирования метаданных научных статей из различных коллекций, апробированные, в частности, на материалах журнала “Электронные библиотеки”.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Татарстан в рамках научных проектов №15-07-08522.

ЛИТЕРАТУРА

1. Когаловский М. Р. *Метаданные в компьютерных системах* // Программирование. – 2013. – Т. 39, № 4. – С. 28–46.

2. Герасимов А. Н., Елизаров А. М., Липачев Е. К., Хайдаров Ш. М. *Методы автоматизированного извлечения метаданных научных публикаций для библиографических и реферативных баз цитирования* // Сб. науч. статей XIX Объединенной конференции “Интернет и современное общество” (IMS-2016). – СПб., 2016. – С. 41–48.

Чумаченко С.А.

Саратовский государственный университет
им. Н.Г. Чернышевского,
chumachenkosergei@gmail.com

ОБ ОДНОМ ИЗ АНАЛОГОВ СИСТЕМЫ ФАБЕРА-ШАУДЕРА

Системой Фабера-Шаудера называется система функций $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}, x \in [0,1],$ в которой

$$\varphi_0(x) = 1 - x, \varphi_1(x) = x, x \in [0,1],$$

и при $n = 2^k + i, k = 0, 1, ..., i = 1, 2, ...2^k$

$$\varphi_n(x) = \varphi_k^i(x) = \begin{cases} 0, x \notin (\frac{i-1}{2^k}, \frac{i-1}{2^k}) \\ \\ 1, x = \frac{2i-1}{2^{k+1}} \\ \\ \text{линейна и непрерывна} \\ \text{на}[\frac{i-1}{2^k}, \frac{2i-1}{2^{k+1}}] \quad [\frac{2i-1}{2^{k+1}}, \frac{i-1}{2^k}] \end{cases}$$

Эта система, состоящая из непрерывных функций, является одним из простейших базисов в пространстве $C[0,1]$. В работах [1], [2] приведены некоторые обобщения этой системы.

Мы рассмотрим гладкий аналог системы Фабера-Шаудера как систему сжатий и сдвигов сплайна $F_2(x) = \int_0^x \int_0^{t_1} w_3(t)dtdt_1$, где $w_3(t)$ – функция Уолша, и исследуем вопрос базисности этой системы в пространстве $C[0,1]$. Обозначим для удобства $\varphi(x) := F_2(x)$ и будем рассматривать систему сжатий и сдвигов $\varphi_{n,j}(x) = \varphi(2^n x - j)$

Теорема. *Система $\varphi_{n,j}(x)$ является базисом в пространстве $C_0[0,1]$ и справедливо неравенство*

$$|f(x) - S_{2^n+j}(x)| \leqslant \omega_f(\frac{1}{2^{n+2}}) + \omega_f^2(\frac{1}{2^{n+2}}).$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 16-01-00152.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шайдуков К. М. *О базисах в пространстве непрерывных функций, построенных из дуг парабол* // Уч. зап. Казанск. уни-та. – 1965. – Т. 125 – № 2. – С. 133-142.

2. Аубакиров Т. У. Бокаев Н. А. *О новом классе систем функций типа Фабера–Шаудера* // Мат. заметки. – 2007. – Т. 82. – № 5. – С. 643-651.

И. М. Шакирова

Казанский (Приволжский) федеральный университет,

inna.sarvarova@yandex.ru

О СЛУЧАЯХ РАЗРЕШИМОСТИ В КВАДРАТУРАХ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА

В области $T = \{x_0 < x < x_1, \quad y_0 < y < y_1, \quad z_0 < z < z_1\}$

рассматривается уравнение

$$u(x,y,z)+\int\limits_{x_0}^{x}A(\xi,y,z)u(\xi,y,z)d\xi+\int\limits_{y_0}^{y}B(x,\eta,z)u(x,\eta,z)d\eta+$$
$$+\int\limits_{z_0}^{z}C(x,y,\zeta)u(x,y,\zeta)d\zeta+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y}D(\xi,\eta,z)u(\xi,\eta,z)d\eta d\xi+$$
$$+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{z_0}^{z}E(\xi,y,\zeta)u(\xi,y,\zeta)d\zeta d\xi+\int\limits_{y_0}^{y}\int\limits_{z_0}^{z}F(x,\eta,\zeta)u(x,\eta,\zeta)d\zeta d\eta+$$
$$+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y}\int\limits_{z_0}^{z}G(\xi,\eta,\zeta)d\zeta d\eta d\xi=\Phi(x,y,z),\quad (1)$$

где $A_{yz},B_{xz},C_{xy},D_z,E_y,F_x,G,\Phi_{xyz}\in C(\overline{T})$.

Применяя к (1) оператор $\dfrac{\partial^3}{\partial x\partial y\partial z}$, получим

$$u_{xyz}+au_{xy}+bu_{yz}+cu_{xz}+du_x+eu_y+fu_z+gu=\Phi_{xyz},\quad (2)$$

$a=C,\quad b=A,\quad c=B,\quad d=B_z+C_y+F,\quad e=A_z+C_x+$ $+E,\quad f=A_y+B_x+D,\quad g=B_{xz}+A_{yz}+C_{xy}+D_z+E_y+F_x+G$.

Из (1) легко видеть, что граничные значения задачи Гурса для уравнения (2) $u(x_0,y,z)=\varphi_1(y,z)$, $u(x,y_0,z)=$ $=\varphi_2(x,z)$, $u(x,y,z_0)=\varphi_3(x,y)$ удовлетворяют интегральным уравнениям вида (1), но с двумя независимыми переменными. При этом из интегрального уравнения для φ_1 следует, что, например, каждая из функций $\varphi_1(y,z_0)$ и $\varphi_1(y_0,z)$ является фактически решением определенного обыкновенного линейного уравнения первого порядка, то есть записывается в явном виде. Все это означает, что для вычисления $\varphi_1(y,z)$ получается классическая задача Гурса. На основании результатов из [1] можно убедиться, что имеет место

Лемма 1. *Пусть существуют функции* $m_1, s_1, t_1 \in C^2$ *и выполняется хотя бы одно из условий:*

$$\begin{gathered}
1)\quad [CB - B_z - F]_{(x_0,y,z)} \equiv 0;\\
2)\quad [CB - C_y - F]_{(x_0,y,z)} \equiv 0;\\
3)\quad C_y|_{(x_0,y,z)} \equiv B_z|_{(x_0,y,z)},\\
[CB - B_z - F]_{(x_0,y,z)} \equiv \xi_{01}(y)\eta_{01}(z) \neq 0;\\
4)\quad [B_z - C_y]_{(x_0,y,z)} \equiv [CB - B_z - F]_{(x_0,y,z)} \equiv \xi_{11}(y)\eta_{11}(z) \neq 0;\\
5)\quad [C_y - B_z]_{(x_0,y,z)} \equiv [CB - C_y - F]_{(x_0,y,z)} \equiv \xi_{21}(x)\eta_{21}(y) \neq 0;\\
6)\quad [m_1 C_y - B_z]_{(x_0,y,z)} \equiv [m_1 B_z - C_y]_{(x_0,y,z)} \equiv\\
\equiv (m_1 - 1)[CB - C_y - B_z - F]_{(x_0,y,z)};
\end{gathered} \tag{3}$$

и либо $[CB - B_z - F]_{(x_0,y,z)} = \dfrac{2s_1'(y)t_1'(z)}{(2-m_1)[s_1(y)+t_1(z)]^2}$, *либо*

$$[CB - C_y - F]_{(x_0,y,z)} = \frac{2s_1'(y)t_1'(z)}{(2-m_1)[s_1(y)+t_1(z)]^2},$$

причем $s_1'(y)t_1'(z) \neq 0, \quad s_1(y) + t_1(z) \neq 0, \quad m \neq 2$.

Тогда φ_1 *вычисляется в явном виде.*

Здесь перечислены 6 вариантов условий, но на самом деле их 7, т.к. в последнем из них содержатся две возможности.

Аналогичные утверждения (назовем их соответственно леммами см. 2 и см. 3) справедливы для функций φ_2 и φ_3 с соответствующими условиями, играющими роль (3). Таким образом, уравнение (1) оказывается редуцированным к задаче Гурса для уравнения (2), вернее к $7^3 = 343$ задачам, поскольку можно комбинировать вычисляемые граничные значения данной задачи, выбирая по одной из возможностей, содержащихся в каждом наборе соотношений вида (3), входящих в любую из лемм 1-3.

Остается сделать последний шаг: построить в квадратурах решение задачи Гурса для уравнения (2) с граничными значениями φ_k $(k=\overline{1,3})$. Пользуясь результатами из $[2, c.169]$ удается записать следующие условия, позволяющие осуществить такое построение:

$$A_y \equiv B_x, \quad A_z \equiv C_x, \quad B_z \equiv C_y,$$
$$A_z - AC + E \equiv 0, \quad B_x - AB + D \equiv 0,$$
$$C_y - BC + F \equiv 0, \quad (4)$$

А именно, имеет место

Теорема. *Если в предположениях лемм 1-3 выполняются тождества* (4)*, а конструкция* $BA_z - AB_z + E_y - AF + G$ *представляет собой произведение вида* $\lambda(x)\mu(y)\nu(z)$*, то уравнение* (1) *разрешимо в квадратурах.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Жегалов В. И., Сарварова И. М. *К условиям разрешимости задачи Гурса в квадратурах* // Изв. вузов. Математика, 2013. – № 3. – С. 68–73.

2. Жегалов В. И., Миронов А. Н., Уткина Е. А. *Уравнения с доминирующей частной производной* – Казань: Изд-во Казанского ун-та, 2014. – 385 с.

А. М. Шамсиев

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
h4rdfoe@gmail.com

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СЕЙСМИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ С ПОМОЩЬЮ ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗА

Обработка сигналов с помощью вейвлет-анализа нашла свое применение во многих сферах, начиная от создания музыкальных треков и заканчивая обработкой сейсмических волн при изучении нефтегазовых месторождений [1, 2]. Ниже рассмотрена следующая задача.

Пусть имеются сигнал-запрос, полученный при разведке месторождения, и база данных скалограмм шаблонных сигналов $\Theta = \{q_i \mid i \in N\}$. Требуется найти найти такой сигнал в Θ, который близок к исходному сигналу (по выбранной метрике) с заданной точностью. Отметим, что скалограммой называют функцию вида (см. [3]): $S\left(a_i, b_j\right) = \left|W_A\left(a_i, b_j\right)\right|^2$.

Предложен метод анализа и сравнения сейсмического сигнала с шаблонными сигналами из базы Θ, основанный на использовании их скалограмм.

Алгоритм сравнения полученного сейсмического сигнала $f(x, y)$ с «сигналом-шаблоном» из базы шаблонных сейсмических сигналов основан на методе поиска изображения по шаблону (см. [4]). Исходный сигнал $f(x, y)$ раскладывается по вейвлет-базису, выполняются стандартные операции квантования, усечения и сортировки коэффициентов вейвлет-разложения. Алгоритм сравнения можно разбить на шаги:

- *Шаг 1.* Расчет скалограммы для сигнала-запроса;
- *Шаг 2.* Графическое изображение скалограммы;

- *Шаг 3.* Вейвлет-преобразование скалограммы;
- *Шаг 4.* Усечение и квантование полученных вейвлет-коэффициентов;
- *Шаг 5.* Нахождение в базе данных скалограмм Θ близкой скалограммы с помощью выбранной метрики.

Также предложен модернизированный алгоритм анализа сейсмического сигнала на основе метода [5], известного как Shazam.

Алгоритм сравнения исходного сейсмического сигнала и «сигнала-шаблона» реализован на языке программирования $C\sharp$. Создан класс «Wave», способный производить вейвлет-разложение сейсмических сигналов, а также выполнять операции усечения, квантования и сортировки коэффициентов вейвлет-разложения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-07-05380)

ЛИТЕРАТУРА

1. Малла С. *Вейвлеты в обработке сигналов: Пер. с англ.* – М.: Мир, 2005. – 671 с.

2. Keller W. *Wavelets in Geodesy and Geodynamics.* – Walter de Gruyter GmbH and Co. KG, 2004. – 277 с.

3. Витязев В.В. *Вейвлет анализ временных рядов: Учеб. пособие.* – Спб.: Издательство С.-Петерб. ун-та, 2001. – 58 с.

4. Столниц Э., ДеРоуз Т., Салезин Д. *Вейвлеты в компьютерной графике: Пер. с англ.* – Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика, 2002. – 272 с.

5. Wang Avery Li-Chun. *An Industrial-Strength Audio Search Algorithm* // Shazam Entertainment. – 2002. – С. 1–7.

З. Эскандариан

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Zohreh.Eskandarian@gmail.com

ИНДУКТИВНЫЕ И ПРОЕКТИВНЫЕ ПРЕДЕЛЫ ПРОСТРАНСТВ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ С ПОРЯДКОВЫМИ ЕДИНИЦАМИ ПО СТЕПЕННОМУ ПАРАМЕТРУ И ИХ ДВОЙСТВЕННЫЕ

Пусть (Ω, Σ, μ) – пространство с σ-конечной мерой, а $L_0(\Omega, \Sigma, \mu)$ – соответсвующее пространство всех измеримых функций. Пусть $f \in L_0(\Omega, \Sigma, \mu)$ и $f > 0$ почти всюду.

Для $\alpha \in \mathbb{R}$ рассмотрим

$$I(f^\alpha) = \{g \in L_0(\Omega,\ \Sigma,\ \mu) \mid \exists \lambda \in \mathbb{R}^+\ (-\lambda f^\alpha \leqslant g \leqslant \lambda f^\alpha)\}$$

с нормой

$$p_{f^\alpha}(g) = \inf\{\lambda \in \mathbb{R}^+ \mid -\lambda f^\alpha \leqslant g \leqslant \lambda f^\alpha\}.$$

Двойственное пространсво $I^*(f^\alpha)$ в таком случае снабжено нормой

$$r_{f^\alpha}(\varphi) = \sup\{|\varphi(g)| \mid g \in I(f^\alpha),\ p_{f^\alpha}(g) \leqslant 1\}.$$

Далее

$$\Omega_0 = \{x \in \Omega \mid |f(x)| \leqslant 1\},\ \Omega_\infty = \{x \in \Omega \mid |f(x)| > 1\},$$

$$\Sigma_0 = \{A \cap \Omega_0 \mid A \in \Sigma\},\ \Sigma_\infty = \{A \cap \Omega_\infty \mid A \in \Sigma\},$$

$$\mu_0 = \mu|_{\Sigma_0},\ \mu_\infty = \mu|_{\Sigma_\infty}.$$

В таком случае функции $f_0 = f|_{\Omega_0}$, $f_\infty = f|_{\Omega_\infty}$ являются измеримыми для пространств с мерой $(\Omega_0,\ \Sigma_0, \mu_0)$ и $(\Omega_\infty,\ \Sigma_\infty,\ \mu_\infty\}$.

Пространство $I^*(f^\alpha)$ изометрически изоморфно топологическим векторным пространствам $(I(f_0^\alpha) \oplus I(f_\infty^\alpha))^*$ и $I^*(f_0^\alpha) \oplus I^*(f_\infty^\alpha)$.

Для положительного вещественного $\alpha > 0$ через J_α^0 обозначено пополнение множества ограничений

$$\{\varphi|_{I^\infty(f_0)} \mid \varphi \in I^*(f_0^\alpha)\},$$

снабженных нормой

$$r'_{f_0^\alpha}(\varphi|_{I^\infty(f_0)}) = \sup\{|\varphi|_{I^\infty(f_0)}(g)| \mid g \in I^\infty(f_0),\ p_{f_0^\alpha}(g) \leqslant 1\}.$$

Определим предельное пространство $J_\infty^0 := \bigcup\limits_{\alpha>0} J_\alpha^0$ и снабдим его финальной топологией T_0 для отображений

$$A_\alpha :\ x \in (J_\alpha^0, r'_{f_0^\alpha}) \mapsto x \in J_\infty^0.$$

Через T_α^0 обозначим топологию пространства $(I(f_0^\alpha), r'_{f_0^\alpha})$. Для $\beta > \alpha$ через $(T_\alpha^0)^\beta$ обозначим топологию, индуцированную T_α^0 в $I(f_0^\beta)$, т.е. топологию $(I(f_0^\beta), r'_{f_0^\alpha})$.

Для положительных $\alpha < \beta$ верно включение $I(f_\infty^\alpha) \subset \subset I(f_\infty^\beta)$. Для всех $\varphi \in I^*(f_\infty^\beta)$ ограничение $\varphi|_{I(f_\infty^\alpha)}$ лежит в $I^*(f_\infty^\alpha)$. Кроме того, для любого $\alpha > 0$ и для любого непрерывного линейного функционала φ на $(I^\infty(f_\infty), \tau_\infty)$ ограничение $\varphi|_{I(f_\infty^\alpha)}$ лежит в $I^*(f_\infty^\alpha)$.

Мы снабжаем пространство J_∞^∞ всех непрерывных линейный функционалов на локально-выпуклом пространстве $(I^\infty(f_\infty), \tau_\infty)$ локально-выпуклой топологией T_∞ всех полунорм ρ_α $(\alpha > 0)$, таких что $\rho_\alpha(\varphi) = r_\alpha(\varphi|_{I(f_\infty^\alpha)})$.

Теорема 1. $(J_\infty^\infty, T_\infty)$ *– пространство Фреше.*

Теорема 2. *Пространство* $I^\infty(f) = I^\infty(f_0) \oplus I^\infty(f_\infty)$, *снабженное топологией с базой* $\tau_0 \times \tau_\infty$, *и пространство* $J_\infty(f) := = J_\infty^0 \oplus J_\infty^\infty$, *снабженное топологией с базой* $T_0 \times T_\infty$, *находятся в двойственности.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Novikov A. *L_1-space for a positive operator affiliated with von Neumann algebra* // Positivity. – 2016. – http://dx.doi.org/101007/s11117-016-0422-4

2. Новиков Ан.Ан., Эскандариан З. Индуктивные и проективные пределы банаховых пространств измеримых функций с порядковыми единицами по степенному параметру // Изв. вуз. Матем. – 2016. – No.10. – С. 80–85.

3. Эскандариан З., Новиков Ан.Ан. Индуктивные и проективные пределы пространств с порядковыми единицами // Матер. межд. конф. по алгебре, анализу и геометрии. – Казань: Изд-во АН РТ, 2016. – С. 360–362.

Г. Ш. Ямалутдинова

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
yamalytdinova@mail.ru

АЛГОРИТМ АВТОМАТИЧЕСКОГО КЛАССИФИЦИРОВАНИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПУБЛИКАЦИЙ

Одним из требований научных журналов к работам, представленным для публикации, является наличие кода, позволяющего отнести работу к соответствующей предметной области. Для этого используются различные классификаторы, среди которых наиболее известны УДК, ББК и MSC2010 [1]–[3]. Они содержат буквенно-цифровые коды. Отметим, что процесс ручного подбора классификационных кодов затруднителен из-за большого объема классификаторов. Например, УДК содержит более 120 тысяч наименований. Поэтому актуальна задача автоматизации процесса подбора этих кодов.

Один из подходов к решению этой задачи для математических публикаций рассмотрен в [4]. В настоящей работе предложен подход к решению названной задачи, основанный на использовании рекомендательных систем. Рекомендательная система – комплекс программных инструментов, который на основании семантического анализа документа формирует список рекомендаций [5]. Отметим, что в последнее время стали создаваться рекомендательные системы для работы с научным контентом, что связано, прежде всего, со значительным ростом объемов научной информации [6]. Предложен алгоритм автоматического подбора классификационных кодов УДК, основанный на использовании лексем, полученных из названия работы, и списка ключевых слов, указанных автором в работе. Алгоритм состоит из следующих шагов:

Шаг 1. Из статьи выделяются ключевые слова.

Шаг 2. Название статьи разделяется на лексемы.

Шаг 3. Формируются классы эквивалентности для лексем, выделенных из названия.

Шаг 4. Производится поиск в словаре классификаторов и генерируется рекомендуемый список кодов.

Шаг 5. На основании выбора пользователя формируется конечный список классификаторов.

Разработан язык представления классификационных кодов в виде XML-файла. Набор этих кодов преобразован в XML-формат. В дальнейшем предполагается также использовать JSON-представление перечня кодов. Алгоритм реализован в виде веб-сервиса на основе платформы Open Server. Для создания веб-формы использован язык HTML, для функционала сервиса – JavaScript и PHP. Пользователю предоставляется форма с полями для ввода названия статьи и ключевых

слов. Система апробирована на коллекциях физико-математических публикаций из журналов «Известия вузов. Математика» и «Ученые записки Казанского университета. Физико-математические науки».

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты №№ 15-07-08522, 15-47-02472).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Universal Demical Classification.* – URL: http://www.udcc.org

2. *Библиотечно-библиографическая классификация: история разработки и развития, современное состояние и перспективы.* – URL: http://referat.tver.ru/cat39/referat9283/index3.html.

3. *2010 Mathematic Subject Classification.* – URL: http://www.ams.org/msc/pdfs/classifications2010.pdf.

4. Řehůřek R., Sojka P. *Automated Classification and Categorization of Mathematical Knowledge* // Lecture Notes in Artificial Intelligence. – 2008. – 5144. – P. 543—557.

5. Ricci F., Rokach L., Shapira B. (Eds.) *Recommender Systems Handbook.* Springer Science+Business Media New York 2011, 2015. – 1003 p.

6. Елизаров А.М., Жижченко А.Б., Жильцов Н.Г., Кириллович А.В., Липачёв Е.К. *Онтологии математического знания и рекомендательная система для коллекций физико-математических документов* // Докл. РАН. – 2016. – 467(4). – С. 392-–395

Sami Abdullah Abed

University of Diyala, samialbarkish@gmail.com

COMMUTATIVITY OF PROJECTIONS

Let H be a Hilbert space, $B(H)$ be the algebra of all bounded linear operators on H, $B(H)^{\mathrm{pr}}$ be the set of all projections on H. Let E be the unit of $B(H)$.

Lemma 1. *Let $f \in C[0,1]$, $\lambda \in (0,1)$, and $p,\ q \in M_2(\mathbb{C})^{\mathrm{pr}}$, then the equality $f(\lambda p + (E-\lambda)q) = \lambda f(p) + (E-\lambda)f(q)$ implies $p+q=E$ if and only if*

$$\frac{f(\lambda)-f(0)}{\lambda} = \frac{f(1-\lambda)-f(1)}{1-\lambda} = f(1)-f(0) \tag{1}$$

and for any $\mu \in (0,1) \setminus \{\lambda,\ 1-\lambda\}$ either

$$f(\mu) \neq \mu f(1) + (1-\mu)f(0) \tag{2}$$

or

$$f(1-\mu) \neq (1-\mu)f(1) + \mu f(0). \tag{3}$$

Lemma 2. *For each pair of projections $p,\ q \in B(H)^{\mathrm{pr}}$ such that $pq = qp$, for $\lambda \in (0,1)$, and for a continuous function $f \in$ $\in C[0,1]$ such that the condition (1) holds*

$$f(\lambda p + (1-\lambda)q) = \lambda f(p) + (1-\lambda)f(q). \tag{4}$$

Theorem 1. *Let $p,\ q \in B(H)^{\mathrm{pr}}$, $\lambda \in [0,1]$, and $f \in C[0,1]$ be such that the condition (1) holds and for any $\mu \in (0,1) \setminus \{\lambda, 1-\lambda\}$ either (2) or (3) holds. Then the equality (4) holds if and only if $pq = qp$.*

For some functions the implication

$$f(\lambda p + (1-\lambda)q) = \lambda f(p) + (1-\lambda)f(q) \implies pq = qp$$

can be obtained directly without using Theorem 1.

Example 1. Let $f(x) = x(x - \frac{1}{3})(x - \frac{2}{3})(x - 1)$. The equality

$$f(\frac{1}{3}p + \frac{2}{3}q) = \frac{1}{3}f(p) + \frac{2}{3}f(q) \tag{5}$$

implies $pq = qp$.

Example 2. Let $f(x) = x(x - \frac{1}{3})(x - \frac{1}{2})(x - 1)$. The equality

$$f(\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}q) = \frac{1}{2}f(p) + \frac{1}{2}f(q) \tag{6}$$

implies $pq = qp$.

Theorem 1 provides a pathway to more complicated examples.

Example 3. The function $f(x) = \sin(2\pi x)$ satisfies the conditions of Theorem 1. The equality (6) implies $pq = qp$.

Example 4. The function $f(x) = \sin(3\pi x)$ satisfies the conditions of Theorem 1. The equality (5) implies $pq = qp$.

This work was supported by the Ministry of Higher Education and Scientific Research of Republic of Iraq.

BIBLIOGRAPHY

1. Bikchentaev A.M. *Commutation of projections and trace characterization on von Neumann algebras.* II // Math. Notes. – 2011. –V. 89. – No. 4. – P. 461–471.

2. Bikchentaev A.M. *Commutation of projections and characterization of traces on von Neumann algebras.* III // Inter. J. Theor. Physics. – 2015. – V. 54. – No.12. – P. 4482-4493.

3. Sami Abdullah Abed. *An inequality for projections and a convex function* // Матер. межд. конф. по алгебре, анализу и геометрии. – Казань: Изд-во АН РТ, 2016. – P. 37-38.

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

Агачев Ю. Р. 4, 41, 44
Аксанова И. И. 47
Амозова К. Ф. 49
Бережной Д. В. 53, 56
Выучейская М. В. 60
Габсаликова Н. Ф. 53
Гайнуллина А. Р. 62
Гайнулина Л. Р. 56
Гайсин Т. И. 63
Галимханова З. Т. 65
Галимянов А. Ф. 4
Галямова Р. А. 68
Ганенкова Е. Г. 49
Гафурова П. О. 70
Гермидер О. В. 73
Дорофеева С. И. 85
Жегалов В. И. 75
Зайцева Н. В. 77
Кадырова Д. Р. 78
Капитанов Д. В. 80
Кужаев А. Ф. 83, 129
Кузнецов А. С. 85
Кукушкина А. И. 78
Липачёв Е. К. 4, 86
Лубышева А. И. 88
Маклецов С. В. 90
Малькович Е. Г. 92
Марков А. В. 94
Миронова С. Р. 96
Минегалиева М. М. 68
Мифтахова З. Ф. 137
Михайловская Я. А. 98
Михеев В. В. 100
Мохов А. С. 86
Насырова Н. И. 102
Низамиева Л. Ю. 104, 108
Никитина А. А. 111
Новиков Ан. Ан. 113, 116
Новиков А. О. 118
Новиков В. В. 120
Новиков П. А. 122
Ожегова А. В. 4
Паймеров С. К. 124
Першагин М. Ю. 41
Печенкина А. Д. 78
Погодина Л. Д. 96
Половинкина Ю. С. 126
Поташов К. А. 88
Попов В. Н. 73
Рафиков А. И. 83, 129
Рахимов А. А. 78
Ризванов З. З. 130
Рожков А. В. 133, 135
Рожкова М. В. 133, 135
Садыкова Е. Р. 65
Саламатин А. А. 137

Савина А. В. 44
Семёнова А. В. 124
Созонтова Е. А. 75
Соколова Д. Э. 124
Софронова Т. В. 139
Суслова М. Е. 80
Тестова И. В. 139, 144
Турыгина И. А. 148
Тутыгин Р. А. 151
Ульянова Е. С. 153
Уразова Д. З. 47
Фазлеева Э. И. 130
Фатыхов А. Х. 155
Февральских Л. Н. 120
Ференец А. А. 157
Фирстова Н. М. 159
Хайдаров Ш. М. 161
Хвиюзова И. А. 102
Чумаченко С. А. 163
Шакирова И. М. 164
Шамсиев А. М. 168
Шилова Н. А. 139, 144
Щепакина Е. А. 159
Щербинин Е. С. 126
Эскандариан З. 170
Ямалутдинова Г. Ш. 172
Sami A. A. 175

ТРУДЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ЦЕНТРА
ИМЕНИ Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО

ТОМ 53

ЛОБАЧЕВСКИЕ ЧТЕНИЯ – 2016

Материалы Пятнадцатой молодежной школы-конференции
(Казань, 24 – 29 ноября 2016 г.)

Подписано в печать 21.11.2016.
Бумага офсетная. Формат 60x84 1/16. Гарнитура «Таймс».
П. л. 11,25. Печать ризографическая.
Тираж 200 экз. Заказ 21/11.

Издательство Академии наук
Республики Татарстан
420111, г. Казань, ул. Баумана, 20
e-mail: izdat.anrt@yandex.ru