УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА.
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

2017, Т. 159, кн. 3 ISSN 2541-7746 (Print)
С. 318–326 ISSN 2500-2198 (Online)

УДК 517.54

О ВЫХОДЕ ИЗ МНОЖЕСТВА ГАХОВА ПО СЕМЕЙСТВУ КЛАССОВ АВХАДИЕВА

А.В. Казанцев

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия

Аннотация

Профессору Ф.Г. Авхадиеву принадлежит решающая роль в становлении теории конечнолистности для классов голоморфных функций с ограниченным искажением. Такие классы будем называть классами Авхадиева, а их элементы – функциями Авхадиева. В настоящей заметке прослежены взаимосвязи указанных классов с множеством Гахова $\mathcal{G}$, состоящим из всех голоморфных и локально однолистных функций f в единичном круге $\mathbb{D}$ с (не более чем) единственным корнем уравнения Гахова в $\mathbb{D}$. В частности, для однопараметрической серии классов Авхадиева, строящейся на лучах $\alpha \ln f'$, $\alpha \geq 0$, причем $|f'(\zeta)| \in (e^{-\pi/2}, e^{\pi/2})$, $\zeta \in \mathbb{D}$, и $f''(0) = 0$, показано, что гаховский барьер (значение параметра выхода из $\mathcal{G}$) данной серии совпадает с ее авхадиевским барьером (значением параметра выхода из класса однолистности), и вычислено экстремальное семейство функций Авхадиева, характеризуемое тем, что для него индивидуальный параметр выхода из $\mathcal{G}$ совпадает с гаховским барьером для серии в целом.

Ключевые слова: множество Гахова, уравнение Гахова, гаховский поперечник, конформный радиус, гиперболическая производная, допустимый функционал, классы Авхадиева, гаховский барьер, авхадиевский барьер

К 70-летию профессора Ф.Г. Авхадиева

Введение

История исследования вопросов однолистности для голоморфных функций с ограниченным искажением кратко описана в работе [1] и по существу завершается монографией Ф.Г. Авхадиева [2]. В настоящей статье для указанных функций исследуются вопросы единственности корня уравнения Гахова. Введем необходимые обозначения и определения.

Пусть H – класс всех функций f, голоморфных в круге $\mathbb{D} = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < 1\}$. Через H_0 обозначим подкласс класса H, выделяемый условием $f'(\zeta) \neq 0$, $\zeta \in \mathbb{D}$, локальной однолистности f в $\mathbb{D}$ и нормировками

$$f(0) = f'(0) - 1 = 0. \tag{1}$$

Классом Авхадиева назовем любой класс функций $f \in H$ с ограниченным множеством значений $\operatorname{Re} \ln f'(\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{D}$ (очевидно, тогда f локально однолистна в $\mathbb{D}$); всякую такую функцию будем называть *функцией Авхадиева*.

Произвольный класс Авхадиева может быть записан в виде

$$\mathcal{A}_v(m, M) := \{f \in H : m \leq |f'(\zeta)| \leq M,\ \zeta \in \mathbb{D}\} \tag{2}$$

для подходящих $0 < m < M < +\infty$. С использованием метода подчиненности легко показать, что $f \in \mathcal{A}_v(m, M)$ тогда и только тогда, когда $f \in H$ и

$$\ln f'(\zeta) = \frac{i}{\pi}\alpha \ln \frac{1+\varphi(\zeta)}{1-\varphi(\zeta)} + \frac{1}{2}\ln Mm, \quad \zeta \in \mathbb{D}, \tag{3}$$

где $\alpha = \ln(M/m)$, а $\varphi(\zeta) = c_0 + c_1\zeta + c_2\zeta^2 + \cdots$ – функция, удовлетворяющая условиям леммы Шварца.

Уравнение Гахова для локально однолистной функции $f \in H$ имеет вид

$$f''(\zeta)/f'(\zeta) = 2\overline{\zeta}/(1-|\zeta|^2). \tag{4}$$

Множество Гахова $\mathcal{G}$ определяется как класс функций $f \in H_0$ с не более чем единственным корнем уравнения Гахова. Выбор H_0 удобен тем, что нормировка (1) не влияет на число корней (4), зато обусловливает инъективность отображения $f \mapsto f''/f'$.

По поводу множества Гахова и его компонент см., например, [3] и приведенную там библиографию. Поскольку далее предполагаем, что функции f удовлетворяют условию $f''(0) = 0$, обеспечивающему наличие нулевого корня уравнения (4), то для любого класса $X \subseteq H$ используем обозначение $\widetilde{X} = X \bigcap \{f \in H : f''(0) = 0\}$. Нас будет интересовать класс $\widetilde{\mathcal{G}}_1$, где $\mathcal{G}_1$ – регулярная часть множества Гахова, состоящая из всех функций $f \in H_0$ с единственным корнем уравнения (4), являющимся при этом точкой максимума гиперболической производной (конформного радиуса)

$$h_f(\zeta) = (1-|\zeta|^2)|f'(\zeta)| \tag{5}$$

функции f (см. [4]).

В следующем разделе будут даны ограничения, при которых имеет место включение $\widetilde{\mathcal{A}}_v(m, M) \subset \widetilde{\mathcal{G}}_1$, где $\mathcal{A}_v(m, M)$ – класс (2). Сформулируем постановку задачи, которая будет решена в последнем разделе статьи.

Ограничения $\varphi(0) \equiv c_0 = 0$ и $f'(0) = 1$ силу (2), (3) и $\alpha = \ln(M/m)$ приводят к однопараметрической серии классов Авхадиева $\mathcal{A}_v(\alpha) := \mathcal{A}_v(e^{-\alpha/2}, e^{\alpha/2})$, которую будем рассматривать при условии $f''(0) = 0$:

$$\widetilde{\mathcal{A}}_v(\alpha) := \{f \in \widetilde{H}_0 : e^{-\alpha/2} \le |f'(\zeta)| \le e^{\alpha/2},\ \zeta \in \mathbb{D}\}. \tag{6}$$

Легко показать, что включение $f \in \widetilde{\mathcal{A}}_v(\alpha)$ эквивалентно выполнению условий $f \in \widetilde{H}_0$ и (3) при $M = 1/m = e^{\alpha/2}$, то есть

$$\ln f'(\zeta) = A(\varphi, \alpha) \equiv i\frac{\alpha}{\pi}\ln\frac{1+\varphi}{1-\varphi}, \quad \varphi = \varphi(\zeta), \quad \zeta \in \mathbb{D}, \tag{7}$$

где φ принадлежит классу $\mathcal{V}$ функций $\phi \in H$ с условием $\phi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ и разложением $\phi(\zeta) = c_2\zeta^2 + \cdots$ в $\mathbb{D}$. Поэтому для каждого $\alpha > 0$ класс $\widetilde{\mathcal{A}}_v(\alpha)$ определяется условием подчиненности

$$\ln f'(\zeta) \prec A(\zeta, \alpha), \quad \zeta \in \mathbb{D}, \quad f \in \widetilde{H}_0; \tag{8}$$

при $\alpha = 0$ из (7) следует, что $\widetilde{\mathcal{A}}_v(0) = \{f(\zeta) \equiv \zeta\}$.

Мы хотим построить аналог семейства F-линий уровня из [3]. Но если в [3] в качестве класса функций, для которых строились F-линии уровня, выбирался класс, отвечающий максимальному параметру серии, то в нашем случае таким «опорным» классом будет служить $\widetilde{\mathcal{A}}_v(\pi)$. Выбор значения $\alpha = \pi$ станет понятным из заключительного раздела настоящей статьи.

Итак, для произвольной функции $f \in \widetilde{\mathcal{A}}_v(\pi)$ представление (7) при $\alpha = \pi$ однозначно определяет функцию $\varphi \in \mathcal{V}$. С данной φ для любого $\alpha \geq 0$ задача (7), (1) имеет единственное решение f_α в классе $\widetilde{\mathcal{A}}_v(\alpha)$ такое, что $f_\pi = f$. Более того, для каждого $\alpha \geq 0$ всякий элемент класса $\widetilde{\mathcal{A}}_v(\alpha)$ имеет вид f_α для некоторой функции $f \in \widetilde{\mathcal{A}}_v(\pi)$.

Построенное семейство $\{f_\alpha\}_{\alpha\geq 0}$ назовем *A-семейством функции f*, элементы f_α – ее *A-линиями уровня.* Ясно, что указанную конструкцию можно распространить на целый класс условий подчиненности вида (8), различающихся выбором мажоранты A.

С приведенной конструкцией связаны следующие величины.

Функционал первого выхода из множества Гахова,

$$\overline{G}_f = \sup\{\xi \geq 0 : \alpha \in [0, \xi] \Longrightarrow f_\alpha \in \mathcal{G}\}, \tag{9}$$

будем называть *гаховским барьером для A-семейства $\{f_\alpha\}_{\alpha\geq 0}$ функции f*; очевидно, соотношение (9) сохраняется при замене множества $\mathcal{G}$ на его часть $\widetilde{\mathcal{G}}_1$.

Гаховский поперечник класса $\widetilde{\mathcal{A}}_v(\pi)$,

$$\Gamma(\widetilde{\mathcal{A}}_v(\pi)) = \inf\{\overline{G}_f : f \in \widetilde{\mathcal{A}}_v(\pi)\}, \tag{10}$$

будем называть *гаховским барьером для серии классов $\{\widetilde{\mathcal{A}}_v(\alpha)\}_{\alpha\geq 0}$*.

Гаховские барьеры можно называть также *барьерами единственности* (корня уравнения Гахова). Наряду с ними естественно рассматривать *авхадиевские барьеры*, или *барьеры однолистности.* Обозначим через $\mathcal{S}$ известный класс однолистных в $\mathbb{D}$ функций $f \in H$ с нормировками (1). Однолистными аналогами величин (9) и (10) будут соответственно *авхадиевский барьер для A-семейства $\{f_\alpha\}_{\alpha\geq 0}$ функции f*,

$$\overline{A}_f = \sup\{\xi \geq 0 : \alpha \in [0, \xi] \Longrightarrow f_\alpha \in \mathcal{S}\}, \tag{11}$$

и *авхадиевский барьер для серии классов $\{\widetilde{\mathcal{A}}_v(\alpha)\}_{\alpha\geq 0}$* (*авхадиевский поперечник класса $\widetilde{\mathcal{A}}_v(\pi)$*),

$$\mathrm{A}(\widetilde{\mathcal{A}}_v(\pi)) = \inf\{\overline{A}_f : f \in \widetilde{\mathcal{A}}_v(\pi)\}, \tag{12}$$

Из работ Ф. Г. Авхадиева следует, что $\mathrm{A}(\widetilde{\mathcal{A}}_v(\pi)) = \pi/2$ ([1, с. 46], [2, с. 54]). В последнем разделе настоящей статьи будет установлено равенство гаховского и авхадиевского барьеров для серии классов $\{\widetilde{\mathcal{A}}_v(\alpha)\}_{\alpha\geq 0}$ и вычислено экстремальное множество

$$E_{\mathcal{G}}(\widetilde{\mathcal{A}}_v(\pi)) = \{f \in \widetilde{\mathcal{A}}_v(\pi) : \overline{G}_f = \Gamma(\widetilde{\mathcal{A}}_v(\pi))\} \tag{13}$$

для указанной серии.

Следует отметить, что структура функционала (9) (как и его $\mathcal{S}$-аналога (11)) заимствована у О. Лехто [5]; в соответствии с [2] следовало бы записать

$$\overline{G}_f = \inf\{\alpha \geq 0 : f_\alpha \notin \mathcal{G}\}.$$

Отметим, что в работе [2] была построена теория допустимых функционалов. В рамках развиваемых представлений дадим следующее расширение определения из [2, с. 51].

Рассмотрим пятерку (X, D, M, T, I) в предположении, что X – топологическое пространство, D – открытое связное множество в X, $M = M(D)$ и $T = T(D)$ – некоторые классы отображений $f : D \to \overline{X}$ такие, что $M, T \subset \overline{X}^D$, где $\overline{X}^D$ – множество всех непрерывных отображений из D в $\overline{X}$ – одноточечную компактификацию X, и $I : \overline{X}^D \to [0, +\infty]$ – некоторый функционал.

Определение 1. Функционал I называется *T-допустимым на классе $M(D)$*, если найдется такая постоянная $\kappa > 0$, что условия $f \in M(D)$ и $I(f) < \kappa$ гарантируют выполнение включения $f \in T(D)$, то есть $\kappa_1 = \inf\{I(f) : f \in M \setminus T\} > 0$.

Функционал I назовем *однолистно допустимым*, или *допустимым по Авхадиеву на классе M*, если T – класс всех однолистных (инъективных) отображений на D. В настоящей статье рассматривается случай, когда $X = \mathbb{C}$, $D = \mathbb{D}$, M и T – подклассы H. В этом случае однолистная допустимость функционала I на M означает, что $T = \mathcal{S}$, и называется также *$\mathcal{S}$-допустимостью.* В этом же случае функционал I назовем *$\mathcal{G}$-допустимым*, или *допустимым по Гахову на M*, если $T = \mathcal{G}$.

С использованием приведенного определения можно сформулировать следующий результат, почти очевидный в свете доказанного в следующих разделах. Обозначим $\|\psi\|_{\mathbb{D}} = \sup_{\zeta\in\mathbb{D}} |\psi(\zeta)|$.

Теорема 1. *Допустимый по Авхадиеву функционал $\|f'\|_{\mathbb{D}} \cdot \|1/f'\|_{\mathbb{D}}$ является допустимым по Гахову на классе H.*

В то же время остается открытым вопрос об эквивалентности допустимости по Гахову функционала I его допустимости по Авхадиеву.

1. Теорема единственности

Для произвольной функции $f \in H_0$ через M_f обозначим множество корней уравнения (4) в $\mathbb{D}$, через k_f – число таких корней. Оценивая предшварциан f''/f' с использованием представления (7) и теоремы 5 из [6, с. 323], получаем, что имеет место следующий результат.

Предложение 1. *Функция $f \in \widetilde{H}$, принадлежащая классу* (2)*, где $0 < m < M < +\infty$, удовлетворяет неравенству*

$$\left|\frac{f''}{f'}(\zeta)\right| \le \frac{4\alpha}{\pi}\frac{|\zeta|}{1-|\zeta|^4}, \quad \zeta \in \mathbb{D}, \tag{14}$$

где $\alpha = \ln(M/m)$. В частности, оценка (14) *справедлива в классе* (6)*.*

С помощью оценки (14) устанавливается следующая теорема единственности.

Теорема 2. *Пусть f – голоморфная в круге $\mathbb{D}$ функция, удовлетворяющая условию $f''(0) = 0$. Если для f справедливы неравенства $m \le |f'(\zeta)| \le M$, $\zeta \in \mathbb{D}$, при $m > 0$ и $M/m \le e^{\pi/2}$, то $M_f = \{0\}$. Постоянная $e^{\pi/2}$ неулучшаема.*

Доказательство. Продолжая неравенство (14) при $0 < |\zeta| < 1$ и $0 \le \alpha = \ln(M/m) \le \pi/2$, получим

$$\left|\frac{f''}{f'}(\zeta)\right| \le \frac{2|\zeta|}{1-|\zeta|^4} < \frac{2|\zeta|}{1-|\zeta|^2}, \quad \zeta \in \mathbb{D}\setminus\{0\}. \tag{15}$$

Итоговое неравенство (15) означает, что уравнение (4) обращается в тождество только при $\zeta \ne 0$. Таким образом, если $M/m \le e^{\pi/2}$, то $M_f = \{0\}$.

Чтобы обосновать неулучшаемость постоянной $e^{\pi/2}$, рассмотрим семейство функций $t_\alpha \in \widetilde{\mathcal{A}}_v(\alpha)$ таких, что $\ln t'_\alpha = A(\zeta^2, \alpha)$ (см. представление (7)). Решая уравнение Гахова для функции t_α, получим $M_{t_\alpha} = \{0\}$, если $0 \le \alpha \le \pi/2$, и $M_{t_\alpha} = \{0, \pm\zeta(\alpha)\}$, если $\alpha > \pi/2$, где $\zeta(\alpha) = \rho(\alpha)e^{-i\pi/4}$, $\rho(\alpha) = [\sqrt{\beta^2+2\beta-1} - \beta]^{1/2}$ и $\beta = \alpha/\pi$. Это означает, что $t_\alpha \in \widetilde{\mathcal{G}}_1$ при $\alpha \in [0, \pi/2]$, $t_\alpha \notin \widetilde{\mathcal{G}}_1$ при $\alpha > \pi/2$. Динамика корней простейшая: единственный при $0 \le \alpha \le \pi/2$ максимум $\zeta = 0$ поверхности $\Psi = h_{t_\alpha}(\zeta)$ (см. (5)) при возрастании α через значение $\pi/2$ становится седлом, от которого ответвляются два максимума $\zeta = \pm\zeta(\alpha)$. □

Теорему 2 можно переформулировать следующим образом.

Теорема 2′. *Имеют место неулучшаемые включения* $\widetilde{\mathcal{A}}_v(m,M)\subset\widetilde{\mathcal{G}}_1$ *при* $m>0$ *и* $M/m\le e^{\pi/2}$, $\widetilde{\mathcal{A}}_v(\alpha)\subset\widetilde{\mathcal{G}}_1$ *при* $0\le\alpha\le\pi/2$.

В 70-е годы XX в. однолистный аналог теоремы 2 было принято рассматривать как предельный случай при $\beta\to+\infty$ ситуации, в которой значения $\ln f'(\zeta)$ при $\zeta\in\mathbb{D}$ лежат внутри прямоугольника с длиной основания α и высотой 2β (см., например, [7], а также [8]). Соответствующее обобщение теоремы 2 имеет следующий вид (см. [9]).

Теорема 3. *Функция* $f\in\widetilde{H}_0$, *удовлетворяющая условиям* $0<m\le|f'(\zeta)|\le M$ *и* $|\arg f'(\zeta)|\le\beta$ *при* $\zeta\in\mathbb{D}$, *принадлежит классу Гахова* $\widetilde{G}_1$, *если*

$$\frac{\alpha}{(1+\lambda)K(\lambda)}\le 1, \tag{16}$$

где $\alpha=\ln(M/m)$,

$$K(\lambda)=\int_0^1[(1-u^2)(1-\lambda^2u^2)]^{-1/2}\,du,$$

а величина $\lambda=\lambda(\alpha,\beta)$, $0\le\lambda\le1$, *определяется из уравнения* $4\beta K(\lambda)= =\alpha K(\sqrt{1-\lambda^2})$.

При $\beta\to+\infty$ неравенство (16) переходит в неулучшаемую оценку $\alpha\le\pi/2$ из теоремы 2′.

Вопрос о том, является ли оценка (16) неулучшаемой при сохранении остальных условий и заключения теоремы 3, пока остается открытым.

2. Экстремальное множество для серии классов Авхадиева

Гаховский барьер (10) для серии классов $\{\widetilde{\mathcal{A}}_v(\alpha)\}_{\alpha\ge0}$ по существу был вычислен в теореме 2:

$$\Gamma(\widetilde{\mathcal{A}}_v(\pi))=\pi/2. \tag{17}$$

Для нахождения экстремального множества (13) понадобится следующее утверждение, обобщающее теорему 2. Через $\mathcal{B}_0$ обозначается малый класс Блоха, состоящий из всех функций $f\in H$ с $\lim\limits_{|\zeta|\to1}h_f(\zeta)=0$, где h_f – функция вида (5).

Предложение 2. *Пусть функция* $f\in\widetilde{H}$ *удовлетворяет условию* $m\le \le|f'(\zeta)|\le M$, $\zeta\in\mathbb{D}$, *при* $m>0$ *и* $M<+\infty$, *и пусть* $\alpha=\ln(M/m)$. *Тогда* $f\in\mathcal{B}_0$. *Кроме того, если* $0\le\alpha\le\pi/2$, *то* $M_f=\{0\}$, *а если* $\pi/2<\alpha<\pi$, *то кольцо* $E_{q(\alpha)}=\{\zeta\in\mathbb{C}:q(\alpha)<|\zeta|<1\}$, *где* $q(\alpha)=\sqrt{2\alpha/\pi-1}$, *свободно от элементов* M_f.

Доказательство. Включение $\mathcal{A}_v(m,M)\subset\mathcal{B}_0$ проверяется тривиально. Ввиду доказанного в теореме 2 остается рассмотреть случай выполнения двусторонней оценки $\pi/2<\alpha<\pi$, эквивалентной $0<q(\alpha)<1$. Сравнивая правые части (14) и (15), будем иметь

$$\left|\frac{f''}{f'}(\zeta)\right|\le\frac{4\alpha}{\pi}\frac{|\zeta|}{1-|\zeta|^4}<\frac{2|\zeta|}{1-|\zeta|^2},\quad \zeta\in E_{q(\alpha)},$$

откуда

$$M_f\bigcap E_{q(\alpha)}=\varnothing,$$

что и требовалось. □

Замечание 1. Из предложения 2 следует, что π – это точная верхняя грань значений α, для которых мы можем гарантировать отсутствие у слоения

$$\mathfrak{G}[0,\alpha] = \bigcup\nolimits_{\sigma\in[0,\alpha]} M_{f_\sigma} \times \{\sigma\} \tag{18}$$

предельных точек на $\partial\mathbb{D}\times(0,\pi)$. Отсюда и следует выбор класса $\widetilde{\mathcal{A}}_v(\pi)$ в качестве максимального из рассматриваемых классов серии $\{\widetilde{\mathcal{A}}_v(\alpha)\}_{\alpha\geq 0}$ (см. введение).

Обратимся к нахождению экстремального множества (13). Для этого определим семейство

$$\mathcal{T} = \{\bar\varepsilon t(\varepsilon\zeta) : |\varepsilon| = 1\}$$

вращений функции $t = t(\zeta)$ класса $\widetilde{H}_0$, определяемой из соотношения (7) при $f = t$, $\varphi(\zeta) = \zeta^2$ и $\alpha = \pi$, то есть

$$\ln t'(\zeta) = i\,\ln\frac{1+\zeta^2}{1-\zeta^2}. \tag{19}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. *Имеет место соотношение*

$$E_{\mathcal{G}}(\widetilde{\mathcal{A}}_v(\pi)) = \mathcal{T}. \tag{20}$$

Доказательство. Рассмотрим A-семейство $\{t_\alpha\}_{\alpha\geq 0}$ функции $t(\zeta)$. Из доказательства теоремы 2 имеем $\overline{G}_t = \pi/2$. В силу (17) и (13) отсюда следует, что $t \in E_{\mathcal{G}}(\widetilde{\mathcal{A}}_v(\pi))$. Таким образом, в (20) обосновано включение $E_{\mathcal{G}}(\widetilde{\mathcal{A}}_v(\pi)) \supset \mathcal{T}$. Докажем противоположное.

Пусть $f \in E_{\mathcal{G}}(\widetilde{\mathcal{A}}_v(\pi))$. Тогда $f \in \widetilde{\mathcal{A}}_v(\pi)$ и $\gamma := \overline{G}_f = \Gamma(\widetilde{\mathcal{A}}_v(\pi)) = \pi/2$. Рассмотрим A-семейство $\{f_\alpha\}_{\alpha\geq 0}$ функции f; $\varphi(\zeta) = c_2\zeta^2 + \cdots$ – однозначно определяемая по f представлением (7) при $\alpha = \pi$ функция класса $\mathcal{V}$ (см. введение).

Поскольку $f_\gamma \in \widetilde{\mathcal{G}}_1$ по теореме 2 и $\overline{G}_f = \gamma$, точка $\alpha = \gamma$ будет предельной для значений $\alpha > \gamma$ с $k_{f_\alpha} = \# M_{f_\alpha} > 1$. Поэтому существует последовательность $\{\alpha_n\}_{n\geq 1}$, сходящаяся к γ при $n \to \infty$, такая что для любого номера n имеет место неравенство $\alpha_n \geq \gamma$ и найдется элемент $b_n \in M_{f_{\alpha_n}} \setminus \{0\}$. Переходя к подпоследовательностям на основании стандартных аналитических приемов, получим $(b_n, \alpha_n) \to (b, \gamma) \in \overline{\mathbb{D}} \times (0,\pi)$. Значит, (b,γ) – предельная точка слоения (18) при $\alpha = \pi$, кроме того, $(b,\gamma) \notin \partial\mathbb{D}\times(0,\pi)$ согласно замечанию 1, откуда $b \in \mathbb{D}$.

Записывая уравнение Гахова для функций f_{α_n} при $\zeta = b_n$, $n \geq 1$, получим тождества

$$\frac{i\alpha_n}{\pi}\frac{2\varphi'(b_n)}{1-\varphi^2(b_n)} \equiv \frac{2\bar b_n}{1-|b_n|^2}, \quad n \geq 1. \tag{21}$$

Переходя в (21) к пределу при $n \to \infty$ и пользуясь тем, что $b \in \mathbb{D}$, имеем тождество

$$\frac{i\gamma}{\pi}\frac{2\varphi'(b)}{1-\varphi^2(b)} \equiv \frac{2\bar b}{1-|b|^2}$$

в уравнении Гахова для функции f_γ. Таким образом, $(b,\gamma) \in M_{f_\gamma} \times \{\gamma\}$, откуда $b = 0$ в силу $f_\gamma \in \widetilde{\mathcal{G}}_1$.

Итак, имеются две различные последовательности $(0,\alpha_n) \neq (b_n,\alpha_n)$ из $\mathfrak{G}[0,\pi]$, сходящиеся к точке $(0,\gamma)$, которая тем самым оказывается точкой бифуркации слоения $\mathfrak{G}[0,\pi]$. Но тогда $|A(\gamma)| = 2$ по лемме 4 из [3], где $A(\alpha) = 4\alpha c_2 i/\pi$ – коэффициент при ζ в тейлоровском разложении предшварциана f''_α/f'_α.

Так как $2 = |A(\gamma)| = 4\gamma|c_2|/\pi$ и $\gamma = \pi/2$, то $|c_2| = 1$. По лемме 2 из [3] функцию φ можно представить в виде $\varphi(\zeta) = (\varepsilon\zeta)^2$ для некоторого $\varepsilon \in \partial\mathbb{D}$. Но тогда из представления (7) получаем в силу (19)

$$\ln f'(\zeta) = i \ln \frac{1+\varepsilon^2\zeta^2}{1-\varepsilon^2\zeta^2} = \ln t'(\varepsilon\zeta),$$

то есть $f(\zeta) = \overline{\varepsilon} t(\varepsilon\zeta)$ и, таким образом, $f \in \mathcal{T}$. □

Открытым остается вопрос о вычислении $\mathcal{S}$-аналога

$$E_{\mathcal{S}}(\widetilde{\mathcal{A}}_v(\pi)) = \{f \in \widetilde{\mathcal{A}}_v(\pi) : \overline{A}_f = \mathrm{A}(\widetilde{\mathcal{A}}_v(\pi))\}$$

экстремального множества (13); см. (11) и (12).

Литература

1. *Авхадиев Ф.Г., Аксентьев Л.А., Елизаров А.М.* Достаточные условия конечнолистности аналитических функций и их приложения // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анал. – М.: ВИНИТИ, 1987. – Т. 25. – С. 3–121.
2. *Авхадиев Ф.Г.* Конформные отображения и краевые задачи. – Казань: Казан. фонд «Математика», 1996. – 216 с.
3. *Казанцев А.В.* О выходе из множества Гахова, контролируемом условиями подчиненности // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2014. – Т. 156, кн. 1. – С. 31–43.
4. *Казанцев А.В.* О линейной связности регулярной части множества Гахова // Вестн. ВолГУ. Серия 1. Математика. Физика. – 2016. – № 6. – С. 55–60.
5. *Lehto O.* Univalent functions, Schwarzian derivatives and quasiconformal mappings // Monogr. Ensegn. Math. – 1979. – No. 2. – P. 73–84.
6. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1966. – 628 с.
7. *Авхадиев Ф.Г., Аксентьев Л.А.* Основные результаты в достаточных условиях однолистности аналитических функций // Усп. матем. наук. – 1975. – Т. 30, № 4. – С. 3–60.
8. *Аксентьев Л.А., Хохлов Ю.Е., Широкова Е.А.* О единственности решения внешней обратной краевой задачи // Матем. заметки. – 1978. – Т. 24. – С. 319–333.
9. *Губайдуллина С.А., Казанцев А.В.* О некоторых условиях единственности корня уравнения Гахова // Труды Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. – Казань: Казан. матем. о-во, 2017. – Т. 54. – С. 135–136.

Поступила в редакцию
27.06.17

Казанцев Андрей Витальевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической статистики

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия

E-mail: *avkazantsev63@gmail.com*

ISSN 2541-7746 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

**UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)**

2017, vol. 159, no. 3, pp. 318–326

On the Exit of the Gakhov Set along the Family of Avkhadiev's Classes

A.V. Kazantsev

Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia
E-mail: *avkazantsev63@gmail.com*

Received June 5, 2017

Abstract

Professor F.G. Avkhadiev has played a crucial role in the formation of the finite-valence theory for the classes of holomorphic functions with bounded distortion. We call them the Avkhadiev classes, and their elements are called the Avkhadiev functions. In this paper, we have studied the connections of the above classes with the Gakhov set $\mathcal{G}$ consisting of all holomorphic and locally univalent functions f in the unit disk $\mathbb{D}$ with (no more than) the unique root of the Gakhov equation in $\mathbb{D}$. In particular, for the one-parameter series of the Avkhadiev classes constructing on the rays $\alpha \ln f'$, $\alpha \geq 0$, where $|f'(\zeta)| \in (e^{-\pi/2}, e^{\pi/2})$, $\zeta \in \mathbb{D}$, and $f''(0) = 0$, we have shown that the Gakhov barrier (the exit value of the parameter out of $\mathcal{G}$) of the given series coinsides with its Avkhadiev barrier (the exit value of the parameter out of the univalence class), and we have found the extremal family of the Avkhadiev functions. This family is characterized by the coincidence of its individual exit value out of $\mathcal{G}$ and the Gakhov barrier for the whole series.

Keywords: Gakhov set, Gakhov equation, Gakhov width, inner mapping (conformal) radius, hyperbolic derivative, admissible functional, Avkhadiev classes, Gakhov barrier, Avkhadiev barrier

References

1. Avkhadiev F.G., Aksent'ev L.A., Elizarov A.M. Sufficient conditions for the finite-valence of analytic functions, and their applications. *J. Sov. Math.*, 1990, vol. 49, no. 1, pp. 715–799.
2. Avkhadiev F.G. Conformal Mappings and Boundary Value Problems. Kazan, Kazan. Fond "Mat.", 1996. 216 p. (In Russian)
3. Kazantsev A.V. On the exit out of the Gakhov set controlled by the subordination conditions. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2014, vol. 156, no. 1, pp. 31–43. (In Russian)
4. Kazantsev A.V. On the linear connectivity of the regular part of Gakhov set. *Vestn. Volgogr. Gos. Univ., Ser. 1: Mat., Fiz.*, 2016, no. 6, pp. 55–60. (In Russian)
5. *Lehto O.* Univalent functions, Schwarzian derivatives and quasiconformal mappings. *Monogr. Enseign. Math.*, 1979, no. 2, pp. 73–84.
6. Goluzin G.M. Geometric Theory of Functions of a Complex Variable. Moscow, Nauka, 1966. 628 p. (In Russian)

7. Avkhadiev F.G., Aksent'ev L.A. The main results on sufficient conditions for an analytic function to be schlicht. *Russ. Math. Surv.*, 1975, vol. 30, no. 4, pp. 1–63. doi: 10.1070/RM1975v030n04ABEH001511.

8. Aksent'ev L.A., Khokhlov Ju.E., Shirokova E.A. Uniqueness of solution of an exterior inverse boundary value problem. *Math. Notes*, 1978, vol. 24, no. 3, pp. 672–678.

9. Gubaydullina S.A., Kazantsev A.V. On some conditions for the uniqueness of a root of Gakhov's equation. *Tr. Mat. Tsentra im. N.I. Lobachevskogo.* Kazan, Kazan. Mat. O-vo., 2017, vol. 54, pp. 135–136. (In Russian)

Для цитирования: *Казанцев А.В.* О выходе из множества Гахова по семейству классов Авхадиева // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2017. – Т. 159, кн. 3. – С. 318–326.

For citation: Kazantsev A.V. On the exit of the Gakhov set along the family of Avkhadiev's classes. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2017, vol. 159, no. 3, pp. 318–326. (In Russian)