

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение

высшего профессионального образования

«Казанский (Приволжский) федеральный университет»

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ.Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО

КАФЕДРА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Направление: 010901.65 – механика

Специализация: механика твердого деформируемого тела

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

(дипломная работа)

Расчет упругопластических тел с учетом больших деформаций.

Работа завершена:

Студент 05-001 группы

«___»_____2015 г. _____ (А.Р. Гордеева)

Работа допущена к защите:

Научный руководитель

Кандидат физико-математических наук, доцент

"__"_____2015 г. _____ (Л.У.Султанов)

Заведующий кафедрой

доктор физико-математических наук, профессор

"__"_____2015 г. _____ (Ю.Г.Коноплев)

Казань- 2015

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ МКЭ.....	4
2. ВАРИАЦИОННАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ.....	5
3. АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ	7
4. ЗАКОН ГУКА.....	16
5. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ТЕОРИИ ТЕЧЕНИЯ.....	22
6. СООТНОШЕНИЯ МКЭ В ПРИРПЩЕНИЯХ И УСЛОВИЕ РАВНОВЕСИЯ УПРУГОРЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЛА.....	26
7. МЕТОД ПРИРАЩЕНИЯ НАЧАЛЬНЫХ ДЕФРМАЦИЙ.....	28
8. ЭЛЕМЕНТ SOLID45.....	30
9. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕЛИНЕЙНОСТИ.....	30
10. ПРОВЕДЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО СТАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА	32
11. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ	34
12. РЕЗУЛЬТАТЫ.....	35
ВЫВОДЫ.....	43
ЛИТЕРАТУРА.....	44
ПРИЛОЖЕНИЕ	45

ВВЕДЕНИЕ

Данная работа посвящена моделированию и исследованию деформирования упругопластической балки. В последнее время со стороны исследователей значительно возрос интерес к нелинейным задачам механики твердого деформируемого тела, учитывающих все более сложные процессы. Такие задачи возникают в производстве, где широко используются материалы со сложными физико-механическими свойствами, также существует проблема моделирования технологических процессов. При этом нужно учитывать, что в элементах конструкций могут возникать конечные деформации, и решение задач такого рода осложняется тем, что материалы характеризуются различными физическими свойствами, такими как упругость, пластичность, вязкость. Поэтому создание эффективных методик исследования нелинейных процессов деформирования, применимых к более широкому классу задач, является актуальной задачей на сегодняшний день.

В этой работе используется процедура пошагового нагружения. Пространственная дискретизация основана на методе конечных элементов (МКЭ) в рамках полилинейной трехмерной изопараметрической аппроксимации. Для решения нелинейных задач используются, как правило, численные методы, к которым относится МКЭ. Геометрия, расчетная область и решение задачи строились в пакете Ansys.

1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ МКЭ.

С точки зрения практики расчета сложных конструкций матричными методами, МКЭ является естественным распространением принципов расчета стержневых систем на задачи механики сплошной среды. Это объясняется единством методологии классических методов строительной механики и МКЭ, которая сводится к расчленению исходной конструкции на отдельные части (фрагменты) как правило более простой структуры, механическое поведение (процесс деформирования) которых легко описывается, а затем к объединению их вновь в единую конструкцию путем выполнения условий равновесия и сплошности. С другой стороны МКЭ можно трактовать как специфическую форму метода Ритца приближенного решения задач механики деформируемого твердого тела, что дает ключ к теоретическому обоснованию его основных положений. В настоящей работе будем придерживаться вариационной постановки задач МКЭ: либо как задач минимизации функционала энергии, либо как решение вариационных уравнений равновесия (движения).

2. ВАРИАЦИОННАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Для единицы объема упругого тела, ориентированного вдоль произвольно выбранной декартовой системы координат x, y, z , удельная потенциальная энергия деформации записывается в виде

$$W = \frac{1}{2} (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} \varepsilon_{zz} + \sigma_{xy} \varepsilon_{xy} + \sigma_{yz} \varepsilon_{yz} + \sigma_{zx} \varepsilon_{zx}) \quad (2.1)$$

Введем вектор деформаций $\{\varepsilon\}$ и вектор напряжений $\{\sigma\}$

$$\{\varepsilon\}^T = \{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{zx}\}, \quad (2.2)$$

$$\{\sigma\}^T = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}\} \quad (2.3)$$

Тогда выражение W (2.1) можно записать

$$W = \frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} = \frac{1}{2} \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} \quad (2.4)$$

Потенциальная энергия деформации, накопленная всем телом, определяется в виде интеграла по всему объему тела V

$$U = \iiint_V W dV = \frac{1}{2} \iiint_V \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dV \quad (2.5)$$

Закон Гука запишем в матричном виде через матрицу упругости (матрицу упругих постоянных) $[D]$:

$$\{a\} = [D] \{e\} \quad (2.6)$$

Тогда выражение потенциальной энергии деформации можем записать

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} dV \quad (2.7)$$

Работу внешних сил тоже запишем в матричном виде. Для этого введем вектор перемещений

$$\{\mathcal{G}\}^T = \{u, v, w\}, \quad (2.8)$$

где u, v, w - проекции вектора перемещений вдоль осей x, y, z , вектор массовых сил $\{Q\}$

$$\{Q\}^T = \{Q^{(x)}, Q^{(y)}, Q^{(z)}\} \quad (2.9)$$

и вектор поверхностных сил $\{P\}$, действующий на части поверхности S_σ ,

$$\{P\}^T = \{P^{(x)}, P^{(y)}, P^{(z)}\} \quad (2.10)$$

Тогда работа внешних сил может быть записана в виде

$$A = \iiint_V \{Q\}^T \{g\} dV + \iint_{S_\sigma} \{P\}^T \{g\} dS \quad (2.11)$$

Полная энергия (функционал Лагранжа) системы определяется как

$$L = U - A \quad (2.12)$$

откуда, с учетом (2.7), (2.11), получим окончательное выражение

$$L = \frac{1}{2} \iiint_V \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} dV - \iiint_V \{Q\}^T \{g\} dV - \iint_{S_\sigma} \{P\}^T \{g\} dS \quad (2.13)$$

В соответствии с общими теоремами механики, истинное состояние равновесия тела соответствует минимуму полной энергии, т.е. задача сводится к поиску такого вектора $\{g\}$, и, как следствие, векторов $\{\varepsilon\}$, $\{\sigma\}$, которые дают $\min L$. Уравнениями Эйлера этой вариационной задачи являются уравнения равновесия и статические граничные условия [1].

3. АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ

Базовым уравнением, решение которого определяет равновесное состояние, принимается уравнение виртуальных работ

$$\iiint_{V_0} (S) \cdot \delta(E) dV_0 = \iiint_{v_0} \vec{Q} \cdot \delta \mathcal{G} dV_0 + \iint_{S_\sigma} \vec{P} \cdot \delta \vec{\mathcal{G}} dS_\sigma \quad (3.1)$$

Для сокращения дальнейших выкладок введем обозначение для правой части уравнения (1) в виде:

$$R = \iiint_{v_0} \vec{Q} \cdot \delta \mathcal{G} dV_0 + \iint_{S_\sigma} \vec{P} \cdot \delta \vec{\mathcal{G}} dS_\sigma \quad (3.2)$$

Рассмотрим основные методы решения уравнения (3.1).

1) Метод простой итерации.

Верхним индексом "к" будем обозначать решение на к-ой итерации в виде компонент вектора перемещений $\vec{\mathcal{G}}^k$, тензора деформаций (E^k), вариации тензора деформаций (δE^{k+1}), тензора напряжений (S^k) и, в случае физически нелинейного материала, тензора физических соотношений (D^k).

Уравнения для вычисления приращений перемещений $\Delta \vec{\mathcal{G}}$ получается из (3.1) путем его линеаризации на нулевом решении, что дает

$$\iiint_{v_0} (\Delta \varepsilon) \cdot (D) \cdot (\delta \varepsilon) dV_0 = R - \iiint_{v_0} (S^k) \cdot (\delta E^k) dV_0 \quad (3.3)$$

Фактически в левой части определяется оператор линейной теории упругости, а в правой части имеем невязку уравнений равновесия на текущей итерации.

Определяя из решения (3.3) приращение перемещений $\Delta \vec{\mathcal{G}}$, находим решение на следующей итерации

$$\vec{\mathcal{G}}^{k+1} = \vec{\mathcal{G}}^k + \Delta \vec{\mathcal{G}} \quad (3.4)$$

по соотношениям

$$(E) = \frac{1}{2} \left[(F)^T \cdot (F) - (I) \right] = \frac{1}{2} \left(\sum_m \frac{\partial y^m}{\partial x^i} \frac{\partial y^m}{\partial x^i} - \delta_{ij} \right) \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j =$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathcal{G}^i}{\partial x^j} + \frac{\partial \mathcal{G}^j}{\partial x^i} + \sum_m \frac{\partial \mathcal{G}^m}{\partial x^i} \frac{\partial \mathcal{G}^m}{\partial x^j} \right) \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j - (E^{k+1}) \quad (3.5)$$

По

$$(\delta E) = (\delta \varepsilon) + (\delta e) = \frac{1}{2} \left[(\delta P) + (\delta P)^T + (\delta P)^T \cdot (P) + (P)^T \cdot (\delta P) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[(I) + (P)^T \right] \cdot (\delta P)^T \cdot \left[(I) + (P) \right] \quad (3.5)$$

- δE^{k+1}

по $(S) = (D) \cdot (E) - (S^{k+1})$. Далее цикл вычислений повторяется.

Условием остановки итерационного процесса может быть либо малость приращений перемещений в той или иной норме, т.е.

$$\|\Delta \mathcal{G}\| \ll \|\mathcal{G}\| \quad (3.5)$$

либо малость приращений тензора напряжений

$$\|(S^{k+1}) - (S^k)\| \ll \|(S^k)\| \quad (3.7)$$

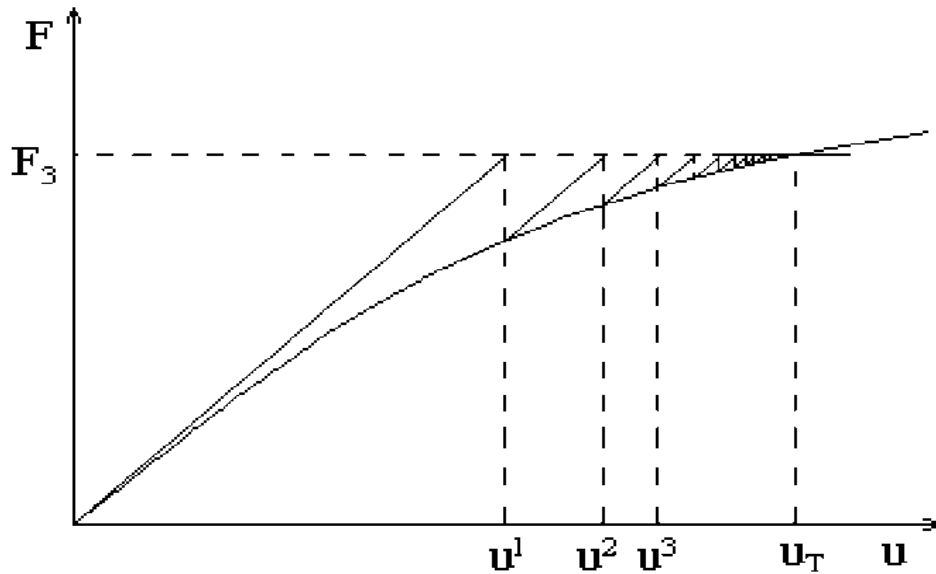


Рис. 1. Сходимость решения

Достоинством этого метода является простота и сравнительно небольшой объем вычислений, что объясняется необходимостью лишь однократного вычисления матрицы жесткости линейной задачи. Однако следует заметить, что во многих задачах он демонстрирует плохую скорость сходимости, особенно там, где имеет место сильно развитая нелинейность [4].

Иллюстрация сходимости решения для метода простой итерации, можно представить на Рис. 1, где изображена условная диаграмма деформирования в осях перемещение - нагрузка, и показаны решения получаемые на итерациях. Видно, что действительно скорость сходимости сильно зависит от величины нелинейности решения, т.е. от того насколько кривая деформирования отличается от прямой на первоначальном упругом участке [1].

2) "Инкрементальные методы".

Большое распространение получили методы пошагового нагружения, в которых особое место занимают приращения перемещений, деформаций и напряжений. Они получили название "инкрементальные методы" (incremental method) и являются основой многочисленных конечноэлементных реализаций. Различают два варианта. Первый называют "глобальной инкрементальной теорией Лагранжа" (total Lagrangian form) и в нем все величины относят к метрике исходного состояния. Второй называют "модифицированной теорией Лагранжа" (update Lagrangian form) и здесь основным является то, что на шаге нагружения все величины относят к метрике предыдущего шага нагружения.

Рассмотрим основные положения каждого из подходов. Общим является то, что процесс деформирования представляется в виде последовательности равновесных состояний, которые реализуются при соответствующих уровнях нагружения

$$\left({}^{(1)}\vec{Q}, {}^{(1)}\vec{P} \right); \left({}^{(2)}\vec{Q}, {}^{(2)}\vec{P} \right); \dots \left({}^{(l)}\vec{Q}, {}^{(l)}\vec{P} \right) \dots, \quad (3.8)$$

и в каждом состоянии объем тела определяется своей величиной V . Задача ставится так: известно некоторое l -ое состояние и заданы приращения нагрузок $\Delta\vec{Q}, \Delta\vec{P}$, требуется определить следующее $(l + 1)$ -ое состояние.

Общая постановка предполагает, что l -ое состояние характеризуется вектором перемещений ${}^l\vec{g}$, определяющим переход из первоначального

Состояния V_0 в l -ое, и компонентами второго тензора напряжений Пиолы-Кирхгофа (lS), отнесенным к тому же исходному состоянию V_0 . В результате приращения нагрузки точки тела получают приращение перемещений ($\Delta\vec{g}$), а нагружения - приращение напряжений (ΔS)

Разрешающее уравнение записывается как равенство виртуальных работ в виде

$$\iiint_{V_0} \left[({}^l S) + (\Delta S) \right] \cdot (\delta \Delta {}^l E) dV_0 = {}^l R + \Delta R \quad (3.9)$$

Если расписать подынтегральное выражение с учетом $(\Delta E) = (\Delta \varepsilon) + (\Delta e) + (\Delta L) = \frac{1}{2} [(I) + (P)^T] \cdot (\Delta P) + \frac{1}{2} (\Delta P)^T \cdot [(I) + (P)] + \frac{1}{2} (\Delta P)^T \cdot (\Delta P)$, $(\Delta E) = (\Delta \varepsilon) + (\Delta e)$ и $(S) = (D) \cdot (E)$, то получим

$$\begin{aligned} \delta \Delta W = & ({}^l S) \cdot \left[(\delta {}^l E) + (\Delta \delta E) \right] + \\ & \left[(\Delta {}^l E) + (\Delta L) \right] \cdot (D) \cdot (\delta {}^l E) + (\Delta {}^l E) \cdot (D) \cdot (\Delta \delta E) \end{aligned} \quad (3.10)$$

В предположении малости приращений перемещений на шаге нагружения подчеркнутыми слагаемыми в (3.10) можно пренебречь, как величинами малыми по сравнению с остальными. В результате получается система линейных уравнений для определения $\Delta \vec{g}$ в виде

$$\iiint_{V_0} \left[(\Delta {}^l E) \cdot (D) \cdot (\delta {}^l E) + ({}^l S) \cdot (\Delta \delta E) \right] dV_0 = \Delta R + {}^l R - \iiint_V {}^l S \cdot (\delta {}^l E) dV_0 \quad (3.11)$$

Следует обратить особое внимание на подчеркнутые слагаемые в правой части. По физическому смыслу это уравнения равновесия 1-го состояния, которое считается известным. Если считать, что это 1-ое состояние определено абсолютно точно, то эти члены в уравнении можно отбросить. Однако оснований для этого немного. Действительно, "пробрасывание" некоторых малых слагаемых в (3.10) приводит к появлению ошибки в определении очередного текущего напряженно-деформированного состояния. Эти ошибки по мере "движения" по нагрузке будут накапливаться, если их не корректировать, и "уводить" решение от истинной кривой. Чтобы этого не происходило подчеркнутые слагаемые в уравнении (3.11) следует оставить, как невязки (неуравновешенность) текущего равновесного состояния, которые будут препятствовать накоплению ошибок и удерживать получаемую кривую решения в осях нагрузках перемещения в непосредственной близости от истинного решения.

Переход к следующему шагу нагружения предполагает вычисления

$$\begin{aligned} {}^{l+1} \vec{g} = & {}^l \vec{g} + \Delta \vec{g}, (\Delta S) = (\Delta {}^l E) \cdot (D), \\ ({}^{l+1} S) = & ({}^l S) + (\Delta S), ({}^{l+1} R) = ({}^l R) + (\Delta R) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Как отмечалось выше, уравнение (3.11) справедливо в предположении малости градиентов приращений перемещений по сравнению с градиентами

перемещений $(\Delta P) \ll (P)$. Если такое предположение несправедливо, необходимо проводить итерационное уточнение на шаге нагружения. Соответствующее уравнение будет иметь вид

$$\iiint_{V_0} [(\Delta^l E) \cdot (D) \cdot (\delta^l E) + ({}^l S) \cdot (\Delta \delta E)] dV_0 = {}^{l+1} R - \iiint_{V_0} ({}^l S^k) \cdot (\delta^l E^k) dV \quad (3.13)$$

где k - номер итерации. При этом переход к следующей итерации предполагает следующие вычисления

$$\begin{aligned} \Delta \bar{\mathcal{G}}^{k+1} &= \Delta \bar{\mathcal{G}}^k + \Delta \bar{\mathcal{G}} \\ (\Delta^l E^{k+1}) &= \frac{1}{2} \left[(I) + ({}^l P)^T \right] \cdot (\Delta P^{k+1}) \frac{1}{2} (\Delta P^{k+1})^T \cdot \left[(I) + ({}^l P) \right] \\ (\Delta^l S^{k+1}) &= (\Delta^l E^{k+1}) \cdot (D), (\Delta^l S^{k+1}) = ({}^l S^k) + (\Delta^l S^{k+1}). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Следует обратить внимание, что уравнение (3.13) и (3.14) полностью идентичны. Отличие лишь в процедуре вычисления текущих значений напряжений: метод Ньютона-Рафсона предполагает вычисление их по формуле

$$({}^l S^{k+1}) = (D) + \left[({}^l E) + (\Delta^l E^{k+1}) \right] \quad (3.15)$$

Очевидно, что для физически линейного материала (3.15) и (3.14) тоже совпадают. Это дает основание утверждать, что итерационное уточнение в глобальной инкрементальной процедуре тождественно методу последовательного нагружения с самостоятельной линеаризацией на шаге нагружения.

Модифицированный подход предполагает, что l -ое состояние характеризуется координатами материальных точек ${}^l \bar{R}$, которые образуют объем V_l , и уровнем накопленных напряжений в терминах напряжений Коши (Эйлера).

Переход от l -го состояния в $(l + 1)$ -ое определяется компонентами деформации, в которых фигурируют производные не по исходным координатам x^i , а по текущим - ${}^l x^i$. Соответствующие компоненты будут помечаться звездочкой:

- тензор градиента перемещений

$$(\Delta^l P^*) = \frac{\partial \Delta \mathcal{G}^i}{\partial {}^l x^j} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j; \quad (3.16)$$

- тензор линейных деформаций

$$(\Delta^l \varepsilon^*) = \frac{1}{2} \left[(\Delta^l P^*) + (\Delta^l P^*)^T \right] = \Delta^l \varepsilon_{ij}^* \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j \quad (3.17)$$

здесь

$$\Delta^l \varepsilon_{ij}^* = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta \mathcal{G}^i}{\partial^l x^j} + \frac{\partial \Delta \mathcal{G}^j}{\partial^l x^i} \right) = \frac{1}{2} \left(\vec{e}_i \cdot \frac{\partial \Delta \vec{\mathcal{G}}}{\partial^l x^j} + \vec{e}_j \cdot \frac{\partial \Delta \vec{\mathcal{G}}}{\partial^l x^i} \right); \quad (3.18)$$

- тензор нелинейных деформаций

$$(\Delta^l e^*) = \frac{1}{2} (\Delta^l P^*)^T \cdot (\Delta^l P^*) = \Delta^l \xi_{ij}^* \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \quad (3.19)$$

Здесь

$$\Delta^l \xi_{ij}^* = \frac{1}{2} \sum_m \frac{\partial \Delta \mathcal{G}^m}{\partial^l x^i} \frac{\partial \Delta \mathcal{G}^m}{\partial^l x^j} = \frac{1}{2} \frac{\partial \Delta \vec{\mathcal{G}}}{\partial^l x^i} \cdot \frac{\partial \Delta \vec{\mathcal{G}}}{\partial^l x^j} \quad (3.20)$$

Напряженное состояние в $(l + 1)$ -ой конфигурации описывается компонентами тензора напряжений Пиолы-Кирхгофа $({}^l \Sigma) + (\Delta S^*)$, где приращения напряжений S^* называются в [] модифицированным тензором напряжений Кирхгофа. Предполагается, что они связаны с деформациями Грина

$$(\Delta^l E^*) = (\Delta^l \varepsilon^*) + (\Delta^l e^*) = \frac{1}{2} \left[(\Delta^l P^*) + (\Delta^l P^*)^T + (\Delta^l P^*) \right] \quad (3.21)$$

Соотношениями вида $(\Delta S) = (D) \cdot (\Delta E)$ будут иметь следующий вид

$$(\Delta S^*) = (D) \cdot (\Delta^l E^*) \quad (3.22)$$

Разрешающее вариационное уравнение составляется для текущего объема V и оно имеет вид

$$\iiint_{V_i} \left[({}^l \Sigma) + (\Delta S^*) \right] \cdot (\delta \Delta^l E^*) dV_i = {}^l R^* + \Delta R^* \quad (3.23)$$

Где

$$\begin{aligned} (\delta \Delta^l E^*) &= \frac{1}{2} \left[(I)^T + (\Delta^l P^*)^T \right] \cdot (\delta^l P^*) + \\ &\frac{1}{2} (\delta^l P^*) e^T \cdot \left[(I) + (\Delta^l P^*) \right] = (\delta^l \varepsilon^*) + (\delta \Delta^l e^*) \end{aligned} \quad (3.24)$$

Распишем подробнее подынтегральное выражение

$$\begin{aligned} &({}^l \Sigma) \cdot \left[(\delta^l \varepsilon^*) + (\delta \Delta^l e^*) \right] + \\ &\left[(\Delta^l \varepsilon^*) + (\Delta^l e^*) \right] \cdot (D) \cdot \left[(\delta^l \varepsilon^*) + \delta \Delta^l e^* \right] \end{aligned} \quad (3.25)$$

В предположении малости перемещений при переходе из l -го состояния в $(l + 1)$ -ое, можно пренебречь подчеркнутыми слагаемыми в (3.18), как величинами большого порядка малости. В результате получается линейное уравнение для определения $\Delta \vec{\mathcal{G}}$ в виде

$$\left[(\Delta^l \varepsilon^*) \cdot (D) \cdot (\delta^l \varepsilon^*) + ({}^l \Sigma) \cdot (\delta \Delta^l e^*) \right] dV_l = \Delta R^* + R^* - \iiint_{V_l} ({}^l \Sigma) \cdot (\delta^l \varepsilon^*) dV_l \quad (3.26)$$

Подчеркнутые слагаемые в этом уравнении, определяющие степень неуровновешенность 1 -го состояния, аналогично уравнению (3.4) следует оставить, как корректирующие точность решения при "движении" по равновесным состояниям.

Переход в (l + 1)-ое состояние предполагает вычисление следующих величин:

- тензор приращений напряжений (ΔS^*) по (3.14), (3.15);

- новой конфигурации

$${}^{l+1} \vec{R} = {}^l \vec{R} + \Delta \vec{\mathcal{G}} \quad \text{или} \quad {}^{l+1} x^i = x^i + \Delta \vec{\mathcal{G}} \quad (3.27)$$

- тензор градиента деформаций

$$(\Delta F^*) = \frac{\partial^{l+1} x^i}{\partial^l x^j} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \quad (3.28)$$

- изменение объёма

$$J^* = \det \left| \frac{\partial^{l+1} x^i}{\partial^l x^j} \right| \quad (3.29)$$

- тензор напряжений Коши в (l + 1)-ом состоянии

$$({}^{l+1} \Sigma) = \frac{1}{J^*} (\Delta F^*) \cdot [({}^l \Sigma) + (\Delta S^*)] \cdot (\Delta F^*)^T \quad (3.30)$$

Если не делать предположение о малости деформаций при переходе из очередного равновесного состояния в последующее, то необходимо проводить итерационные уточнения на шаге нагружения. Соответствующие уравнения, для определения очередного приращения перемещений на k -ой итерации, будет иметь вид [1]

$$\begin{aligned} & \iiint_{V_l} \left[(\Delta^l \varepsilon^*) \cdot (D) \cdot (\delta^l \varepsilon^*) + ({}^l \Sigma) \cdot (\delta \Delta^l e^*) \right] dV_l = \\ & {}^{l+1} R - \iiint_{V_l} \left[({}^l \Sigma) + \Delta S^k \cdot (\delta^l E^k) \right] dV_l \end{aligned} \quad (3.31)$$

Переход к следующей итерации сводится к следующим вычислениям

$$\begin{aligned} \Delta \vec{\mathcal{G}}^{k+1} &= \Delta \vec{\mathcal{G}}^k + \Delta \vec{\mathcal{G}} \\ ({}^l E^{k+1}) &= \frac{1}{2} \left[({}^l P^{k+1}) + ({}^l P^{k+1})^T + ({}^l P^{k+1})^T \cdot ({}^l P^{k+1}) \right] \\ (\Delta^l S^{k+1}) &= (\Delta^l E^{k+1}) \cdot (D) \end{aligned} \quad (3.32)$$

3) Метод последовательных нагружений.

Для того, чтобы описанные выше методы хорошо работали и демонстрировали приемлемую скорость сходимости необходимо правильно задать начальное приближение \vec{g}^0 . В случае неудачного его задания, сходимости может не наблюдаться. Одним из способов решения этой проблемы является не прямое решение задачи для заданной нагрузки, а решение ряда задач при последовательно увеличивающейся нагрузке. Это позволяет определять хорошее приближение для начала итераций при очередной нагрузке путем интерполяции решения по предыдущим уровням нагружения. Пусть индекс "l" слева от полученной величины означает решение при l-ом нагружении

$$({}^l R), {}^l \vec{g}, ({}^l E), ({}^l S) \text{ и т.д.} \quad (4.33)$$

Для нахождения решения на (l + 1)-ом шаге нагружения используется тот или иной итерационный метод. В качестве начального приближения принимается решение предыдущего нагружения, т.е.

$${}^{l+1} \vec{g}^0 = {}^l \vec{g}, ({}^{l+1} S^0) = ({}^l S) \quad (4.34)$$

Можно использовать более сложные интерполяционные формулы для задания начального приближения. Например, формулу Ньютона первого порядка

$${}^{l+1} \vec{g}^0 = {}^l \vec{g} + \Delta {}^l \vec{g} \left\| \frac{{}^{l+1} Q - {}^l Q}{\Delta {}^l \vec{g}} \right\|, \Delta {}^l \vec{g} = \frac{{}^l \vec{g} - {}^{l-1} \vec{g}}{\left\| \frac{{}^l Q - {}^{l-1} Q}{\Delta {}^{l-1} \vec{g}} \right\|}, \quad (4.35)$$

где Q - параметр нагрузки.

Получил распространение некоторый симбиоз метода простой итерации и метода Ньютона, который известен как метод Ньютона-Рафсона. В этом случае предполагается построение линеаризованного оператора один раз на шаге нагружения и проведение итерации с этим оператором. Соответствующее вариационное уравнение можно записать в виде

$$\iiint_{V_0} [(\Delta {}^l E) \cdot (D) \cdot (\delta {}^l E) + ({}^l S) \cdot (\Delta \delta E)] dV_0 = {}^{l+1} R - \iiint_{V_0} ({}^{l+1} S^k) \cdot (\delta {}^{l+1} E^k) dV_0, \quad (4.36)$$

где тензоры приращений и вариаций деформаций $(\Delta {}^l E)$ и $(\delta {}^l E)$ вычисляются по компонентам перемещений ${}^l \vec{g}$.

Иллюстрация процесса построения решения по шагам нагружения приведена на рис 2. Можно отметить, что такая методика построения решения на интересующем интервале возрастания нагрузки является достаточно разумной и эффективной с точки зрения объема вычислений на

шаге нагружения и числа итераций, находимых для достижения требуемой точности.

Следует отметить, что определение в качестве правой части разрешающей системы уравнений невязки полных уравнений равновесия, без пренебрежения никакими слагаемыми, служит гарантией того, что решение не будет отходить в процессе догружения от истинной деформации [1].

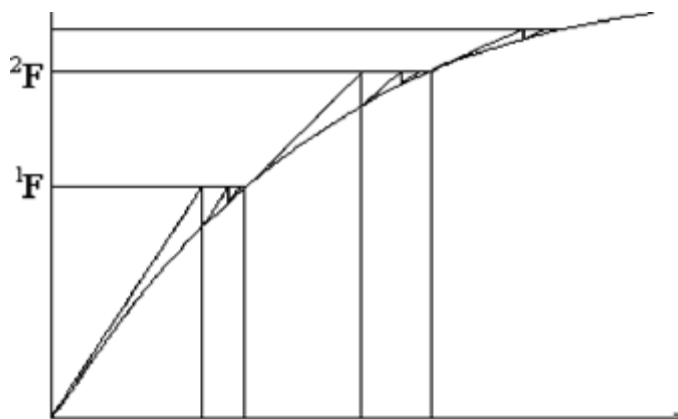


Рис. 2. Сходимость решения

4. ЗАКОН ГУКА

Напряжения связаны с деформациями соотношением:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon^{el}\} \quad (4.1)$$

Где $\{\sigma\} = [\underline{\sigma}_x \underline{\sigma}_y \underline{\sigma}_z \underline{\sigma}_{xy} \underline{\sigma}_{yz} \underline{\sigma}_{xz}]^T$ - вектор напряжений (как выходная величина помечается меткой S).

[D] – матрица упругости (описывается уравнениями (4.18) ... (4.23), обратная матрица записывается в виде (4.4) и (4.5); для некоторых анизотропных элементов эта матрица вводится командами **TBDATA** с опцией **TB,ANEL**.);

$\{\varepsilon^{el}\} = \{\varepsilon\} - \{\varepsilon^{th}\}$ - выходной массив EPEL;

$\{\varepsilon\} = [\underline{\varepsilon}_x \underline{\varepsilon}_y \underline{\varepsilon}_z \underline{\varepsilon}_{xy} \underline{\varepsilon}_{yz} \underline{\varepsilon}_{xz}]^T$ - вектор полной (суммарной) деформации;

$\{\varepsilon^{th}\}$ – вектор температурной деформации (определяется соотношением (4.3), выходной массив EPTH).

Выходная величина EPEL представляет собой вектор деформаций, которые вызывают напряжения, т.е. $\{\varepsilon\} - \{\varepsilon^{th}\}$.

Замечание: в постпроцессоре POST1 подобная же величина EPTO, именуемая “компонентом суммарной деформации (component total strain)”, может использоваться для маркировки оси деформаций при построении нелинейных кривых “ σ - ε ”. Составляющие приведенного выше вектора полной деформации $\{\varepsilon\}$ можно трактовать как деформации, которые измеряются соответствующим датчиком. Эти два "полных" набора деформаций отличаются наличием или отсутствием вектора температурной деформации.

Компоненты вектора напряжений показаны на рис. 3. Для используемых в программе ANSYS напряжений и деформаций принято следующее правило знаков: величины, относящиеся к растяжению являются положительными, к сжатию - отрицательными. Компоненты сдвига считаются положительными, если их направления совпадают с направлениями соответствующих координатных осей. Деформации сдвига представляют собой инженерные деформации, а не компоненты тензора.

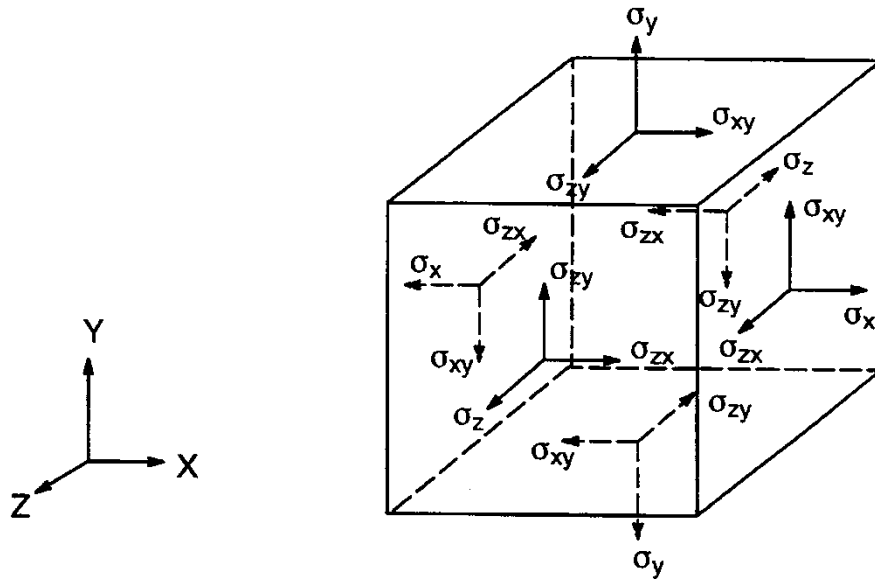


Рис. 3. Компоненты вектора напряжений

Уравнение (4.1) может быть обращено следующим образом:

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon^{th}\} + [D]^{-1} \{\sigma\} \quad (4.2)$$

Для трехмерного случая вектор температурных деформаций определяется в виде соотношения

$$\{\varepsilon^{th}\} = \Delta T [\alpha_x \alpha_y \alpha_z 000] \quad (4.3)$$

Где α_x – коэффициент температурного расширения в направлении оси x (вводится в виде параметра ALPX командой **MP**),

$$\Delta T = T - T_{REF}$$

T – текущая температура в интересующей точке,

T_{REF} – температура, при которой деформации отсутствуют (вводится командой **TREF**).

Матрица $[D]^{-1}$, нормализованная по столбцам, имеет вид:

$$[D]^{-1} = \begin{vmatrix} 1/E_x & -\nu_{xy}/E_y & -\nu_{xz}/E_z & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{yx}/E_x & 1/E_y & -\nu_{yz}/E_z & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{zx}/E_x & -\nu_{zy}/E_y & 1/E_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_z \end{vmatrix} \quad (4.4)$$

Если используется нормализация по строкам, то эта матрица записывается следующим образом:

$$[D]^{-1} = \begin{vmatrix} 1/E_x & -v^*_{xy}/E_y & -v^*_{xz}/E_z & 0 & 0 & 0 \\ -v^*_{yx}/E_x & 1/E_y & -v^*_{yz}/E_z & 0 & 0 & 0 \\ -v^*_{zx}/E_x & -v^*_{zy}/E_y & 1/E_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{yz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{zx} \end{vmatrix} \quad (4.5)$$

Для записи элементов этих матриц используются обозначения:

E_x – модуль Юнга в направлении оси x (вводится как параметр E_X командой **MP**),

v_{xy} – минимальный коэффициент Пуассона (вводится как параметр $NUXY$ командой **MP**),

v^*_{xy} – максимальный коэффициент Пуассона (вводится как параметр $PRXY$ командой **MP**),

G_{xy} – модуль сдвига в плоскости x - y (вводится как параметр GXY командой **MP**).

Матрица $[D]^{-1}$ должна быть положительно определенной. Кроме того, эта матрица должна быть симметричной, поэтому для ортотропных материалов предполагается существование соотношений:

$$\frac{v_{yx}}{E_x} = \frac{v_{xy}}{E_y} \quad (4.6)$$

$$\frac{v_{zx}}{E_x} = \frac{v_{xz}}{E_z} \quad (4.7)$$

$$\frac{v_{zy}}{E_y} = \frac{v_{yz}}{E_z} \quad (4.8)$$

Или

$$\frac{v^*_{yx}}{E_y} = \frac{v^*_{xy}}{E_x} \quad (4.9)$$

$$\frac{v^*_{zx}}{E_z} = \frac{v^*_{xz}}{E_x} \quad (4.10)$$

$$\frac{v^*_{zy}}{E_z} = \frac{v^*_{yz}}{E_y} \quad (4.11)$$

Согласно приведенным выше соотношениям, величины v_{xy} , v_{zy} , v_{zx} , v^*_{yx} , v^*_{zy} и v^*_{zx} являются зависимыми и поэтому не задаются при вводе исходных данных.

Использование конкретных значений для коэффициентов Пуассона при анализе ортотропных материалов иногда приводит к затруднениям, поэтому

к этому следует подходить с осторожностью. Обычно для ортотропных материалов бывают известны значения ν_{xy}^* , или главного коэффициента Пуассона (PRXY). Величина ν_{xy}^* считается главным коэффициентом Пуассона, поскольку это значение больше, чем ν_{xy} , если исходить из того, что E_x превосходит E_y .

Для упрощения в остальной части этого раздела будут использоваться только параметры ν_{xy} , ν_{yz} , ν_{xz} . Для изотропных материалов выполняются условия $E_x = E_y = E_z$ и $\nu_{xy} = \nu_{yz} = \nu_{xz}$, поэтому ввод исходных данных не вызывает затруднений. Для ортотропных материалов требуется проверять соответствие приведенных в справочной литературе данных требуемому формату ввода.

Если переписать равенство (4.2) в развернутом виде, используя выражения (4.3), (4.4), а также (4.6) - (4.8), то получим шесть уравнений:

$$\varepsilon_x = \alpha_x \Delta T + \frac{\sigma_x}{E_x} - \nu_{xy} \frac{\sigma_y}{E_y} - \nu_{xz} \frac{\sigma_z}{E_z} \quad (4.12)$$

$$\varepsilon_y = \alpha_y \Delta T + \frac{\sigma_y}{E_y} - \nu_{xy} \frac{\sigma_x}{E_x} - \nu_{yz} \frac{\sigma_z}{E_z} \quad (4.13)$$

$$\varepsilon_z = \alpha_z \Delta T + \frac{\sigma_z}{E_z} - \nu_{xy} \frac{\sigma_x}{E_x} - \nu_{yz} \frac{\sigma_y}{E_y} \quad (4.14)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{G_{xy}} \quad (4.15)$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{\sigma_{yz}}{G_{yz}} - \quad (4.16)$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{\sigma_{xz}}{G_{xz}} \quad (4.17)$$

где ε_x - деформация в направлении оси x,

ε_{xy} - деформация сдвига в плоскости x - y,

σ_x - напряжения в направлении оси x,

σ_{xy} - напряжения сдвига в плоскости x - y;

компоненты с другими индексами получаются циклическим сдвигом (x - y- z).

С другой стороны, уравнение (4.1) можно переписать в развернутом виде, используя обратную матрицу (4.4), что вместе с уравнениями (4.3), (4.6) ... (4.8) дает шесть соотношений для напряжений:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= E_x/h \left[1 - (v_{yz})^2 E_x/E_y \right] (\varepsilon_x - \alpha_x \Delta T) + \\ &+ E_x/h \left[v_{xy} + v_{xz} v_{yz} E_x/E_y \right] (\varepsilon_y - \alpha_y \Delta T) + \\ &+ E_x/h \left[v_{xz} + v_{yz} v_{xy} \right] (\varepsilon_z - \alpha_z \Delta T)\end{aligned}\quad (4.18)$$

$$\begin{aligned}\sigma_y &= E_x/h \left[v_{xy} + v_{xz} v_{yz} E_y/E_z \right] (\varepsilon_x - \alpha_x \Delta T) + \\ &+ E_y/h \left[1 - (v_{xz})^2 E_x/E_z \right] (\varepsilon_y - \alpha_y \Delta T) + \\ &+ E_y/h \left[v_{yz} + v_{xz} v_{xy} E_x/E_y \right] (\varepsilon_z - \alpha_z \Delta T)\end{aligned}\quad (4.19)$$

$$\begin{aligned}\sigma_z &= E_x/h \left[v_{xz} + v_{yz} v_{xy} \right] (\varepsilon_x - \alpha_x \Delta T) + \\ &+ E_y/h \left[v_{yz} + v_{xz} v_{xy} E_x/E_y \right] (\varepsilon_y - \alpha_y \Delta T) + \\ &+ E_z/h \left[1 - (v_{xy})^2 E_x/E_y \right] (\varepsilon_z - \alpha_z \Delta T)\end{aligned}\quad (4.20)$$

$$\sigma_{xy} = G_{xy} \in xy \quad (4.21)$$

$$\sigma_{yz} = G_{yz} \in yz \quad (4.22)$$

$$\sigma_{xz} = G_{xz} \in xz \quad (4.23)$$

где: $h = 1 - (v_{xy})^2 E_x/E_y - (v_{yz})^2 E_y/E_z - (v_{xz})^2 E_x/E_z - 2v_{xy}v_{yz}v_{xz} E_x/E_z$

Если модули сдвига G_{xy} , G_{yz} , G_{xz} не задаются при вводе, то их значения вычисляются следующим образом:

$$\sigma_{xy} = \frac{(E_x E_y)}{(E_x + E_y + 3v_{xy} E_x)} \quad (4.24)$$

$$G_{yz} = G_{xy} \quad (4.25)$$

$$G_{xz} = G_{xy} \quad (4.26)$$

Такие значения используются по умолчанию и предназначены только для изотропных материалов, поэтому при задании свойств ортотропных материалов пользователь должен убедиться, что справочное пособие по свойствам материала содержит нужное значение модуля сдвига.

Матрица [D] должна быть положительно определенной. Программа проверяет значение каждого задаваемого параметра материала, чтобы гарантировать положительную определенность этой матрицы. В случае зависящих от температуры свойств материала такая проверка выполняется

при одинаковой температуре (команда **BFUNIF**) на первом шаге нагружения. Если материал изотропный или ν_{xy} , ν_y и ν_{xz} равны нулю, то матрица [D] будет всегда положительно определенной. Примером материала, нарушающим положительную определенность матрицы [D], служит материал, для которого выполняется условие $E_y \leq E_x (\nu_{xy})^2$ [2].

5 ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ТЕОРИИ ТЕЧЕНИЯ

Будем считать, что существует условие текучести, определяющее напряженное состояние, при котором бесконечно близкая окрестность материальной точки деформируется пластически. Для идеально-пластических тел оно имеет вид

$$F(\{\sigma\}) = 0 \quad (5.1)$$

Для упругопластических тел с упрочнением, где в качестве внутренних параметров состояния, связанных с пластической деформацией и описывающих возникшие в материале структурные изменения, выбран только скалярный параметр упрочнения χ , условие текучести имеет вид

$$F(\{\sigma\}, \chi) = 0 \quad (5.2)$$

Это возможно при изотропном упрочнении при условии, что деформационная анизотропия не имеет места и не учитывается эффект Баушингера. Принимается, что полные приращения деформаций состоят из двух слагаемых: упругих деформаций $\{\Delta\varepsilon^e\}$ и пластических деформаций $\{\Delta\varepsilon^p\}$, т.е.

$$\{\Delta\varepsilon\} = \{\Delta\varepsilon^e\} + \{\Delta\varepsilon^p\} \quad (5.3)$$

Упругие приращения деформаций связаны с приращениями напряжений при помощи симметричной матрицы упругих постоянных $[D]$, что можно выразить соотношением

$$\{\Delta\varepsilon^e\} = [D]^{-1} \{\Delta\sigma\} \quad (5.4)$$

Для приращения пластической деформации, согласно ассоциированному закону течения, принимается соотношение

$$\{\Delta\varepsilon^p\} = \Delta\lambda \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}, \quad (5.5)$$

где $\Delta\lambda$ - некоторый положительный коэффициент пропорциональности, который определяет наличие пластических деформаций и их величину.

Это соотношение можно трактовать как требование ортогональности вектора приращения пластических деформаций к поверхности текучести. При пластическом течении напряжения находятся на поверхности текучести, определяемой равенством (5.1) или (5.2). Дифференцируя (5.1), получим

$$\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T \{ \Delta \sigma \} = 0 \quad (5.6)$$

Умножая (6.3) на $\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T [D]$ слева и учитывая (5.4), получим

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T [D] \{ \Delta \varepsilon \} &= \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T [D] [D]^{-1} \{ \Delta \sigma \} + \\ &+ \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\} [D] \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\} \Delta \lambda \end{aligned} \quad (5.7)$$

В соответствии с (5.6) первое слагаемое в правой части исчезнет, в результате чего получим

$$\Delta \lambda = \frac{\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T [D] \{ \Delta \varepsilon \}}{\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T [D] \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}} \quad (5.8)$$

Если умножить уравнение (5.3) на $[D]$ слева и записать его относительно приращений напряжений, то можно получить

$$\{ \Delta \sigma \} = [D] \{ \Delta \varepsilon \} - \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\} \frac{\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T [D] \{ \Delta \varepsilon \}}{\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T [D] \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}} = [D_{ep}] \{ \Delta \varepsilon \}, \quad (5.9)$$

откуда получается выражение для упругопластической матрицы в виде

$$[D_{ep}] = [D] - \frac{[D] \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T [D]}{\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T [D] \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}} \quad (5.10)$$

Для материала с упрочнением необходимо дифференцировать соотношение (5.2), после чего получим

$$\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T \{ \Delta \sigma \} - A \Delta \lambda = 0 \quad (5.11)$$

где введено обозначение

$$A = -\frac{\partial F}{\partial \chi} \Delta \chi \frac{1}{\Delta \lambda} \quad (5.12)$$

Тогда, учитывая соотношения (5.3), (5.4), (5.5) и (5.11), получим

$$\begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D^{-1} \frac{\partial F}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial F^T}{\partial \sigma} - A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \sigma \\ \Delta \lambda \end{Bmatrix}. \quad (5.13)$$

Исключив неопределенную постоянную, $\Delta \lambda$ избегая при этом умножения или деления на величину A , которая в общем случае может равняться нулю, получим упругопластическую матрицу $[D]$, связывающую приращения напряжений с приращениями деформаций в явном виде

$$\{\Delta \sigma\} = [D_{ep}] \{\Delta \varepsilon\}, \quad (5.14)$$

Где

$$[D_{ep}] = [D] - \frac{[D] \frac{\partial F}{\partial \sigma} \frac{\partial F^T}{\partial \sigma} [D]}{A + \frac{\partial F^T}{\partial \sigma} [D]} \frac{\partial F}{\partial \sigma}, \quad (5.15)$$

Для определения параметра A необходимо рассмотреть сущность параметра упрочнения χ . Действительно, если рассматривается процесс пластической деформации в интервале времени (t_1, t_2) , то уравнения эволюции для параметра χ записывают либо в виде

$$\chi = \int_{t_1}^{t_2} \varepsilon_i^p dt, (\chi = \varepsilon_i^p) \quad (5.16)$$

где ε_i^p - интенсивность пластических деформаций, приращение которой определяется как

$$\Delta \varepsilon_i^p = \sqrt{\frac{2}{3} \{\Delta \varepsilon^p\}^T \{\Delta \varepsilon^p\}} \quad (5.17)$$

либо как

$$\chi = \int_{t_1}^{t_2} W_p dt, (\chi = W_p), \quad (5.18)$$

где W_p - мощность пластической деформации в единице объема, определяемая в виде

$$W_p = \{\sigma\}^T \{\varepsilon^p\} \quad (5.19)$$

Физический смысл приведенных выше параметров упрочнения состоит в том, что они суммируют эффект всех предварительных пластических деформаций, полученных в процессе нагружения тела [5].

Используя (5.5), (5.16), (5.17), соотношение (5.12) можно представить в виде

$$A = -\frac{\partial F}{\partial \chi} \sqrt{\frac{2}{3} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}} \quad (5.20)$$

откуда можно определить А при известной зависимости F от χ [1].

6. СООТНОШЕНИЯ МКЭ В ПРИРПЩЕНИЯХ И УСЛОВИЕ РАВНОВЕСИЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЛА

Все уравнения для тела выпишем как для отдельного элемента, имея в виду, что применение стандартных правил сборки позволяет перейти от величин, относящихся к одному элементу, к соответствующим матрицам и векторам для всего тела.

Запишем в матричном виде соотношения теории упругости, позволяющие по узловым перемещениям $\{q^m\}$ определить векторы деформации $\{\varepsilon\}$ и напряжения $\{\sigma\}$

$$\{\varepsilon\} = [B]\{q^m\} \quad (6.1)$$

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (6.2)$$

Здесь $[B]$ - матрица аппроксимаций деформаций, $[D]$ - матрица упругих постоянных. По принципу возможных перемещений сумма работ внешних и внутренних сил $\{P^m\}$ на возможных перемещениях $\{\delta q^m\}$ равна нулю

$$\{\delta q^m\}^T \{P^m\} - \iiint_{V^m} \{\delta\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV = 0 \quad (6.3)$$

Используя (6.1) и (6.2), получим

$$[K^m]\{q^m\} = \{P^m\} \quad (6.4)$$

Где

$$[K^m] = \iiint_{V^m} [B]^T [D][B] dV \quad (6.5)$$

- матрица жесткости.

Для любых бесконечно малых величин в упругопластической области уравнение равновесия тела запишется в виде [6]

$$[K_{ep}]\{\Delta q^m\} = \{\Delta P^m\} \quad (6.6)$$

Где $[K_{ep}]$ - упругопластическая матрица жесткости, $\{\Delta q^m\}$ - приращение вектора узловых перемещений, $\{\Delta P^m\}$ - приращение вектора силовой нагрузки.

Выражение для матрицы жесткости в упругопластической области имеет вид

$$[K_{ep}] = \iiint_{V^m} [B]^T [D_{ep}] [B] dV \quad (6.7)$$

где матрица $[D]$ связывает приращение напряжений и деформаций при упругопластическом деформировании

$$\{\Delta \sigma\} = [D_{ep}] \{\Delta \varepsilon\}$$

Подставляя (6.7) в (6.6) и используя соотношения (6.1) и $\{\Delta \sigma\} = [D_{ep}] \{\Delta \varepsilon\}$, получаем, что равновесные приращения напряжений должны подчиняться условию

$$\iiint_{V^m} [B]^T \{\Delta \sigma\} dV = \{\Delta P^m\} \quad (6.8)$$

Отметим, что для упругого состояния тела все соотношения аналогичны формулам (6.6-6.8) и получаются из последних опусканием индекса ep. Поэтому условие равновесия тела при любом уровне нагрузки получают суммированием выражений типа (6.8):

$$\iiint_{V^m} [B]^T \{\sigma\} dV = \{P\} \quad (6.9)$$

Здесь $\{P\}$ - достигнутый уровень силовой нагрузки [1].

7. МЕТОД ПРИРАЩЕНИЯ НАЧАЛЬНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ

Этот метод представляет собой сочетание метода последовательных упругих решений при учете на каждом этапе дополнительных начальных деформаций и метода конечных элементов для линейно-упругого тела. Примем, что время механического процесса упругопластического деформирования, включая разгрузку, разбивается на конечные интервалы Δt , и нагрузки прилагаются постепенно, малыми приращениями. В этом случае решение находится путем определения приращения напряжений $\{\Delta\sigma\}$ и $\{\Delta\varepsilon\}$ деформаций на каждом этапе.

Разбивая приращение полной деформации на упругую и пластическую составляющие так, как это делалось раньше, преобразуем выражение

$$[K^m] = \iiint_{V^m} [B]^T [D] [B] dV. \text{ Для этого, используя } \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T \{\Delta\sigma\} - A\Delta\lambda = 0 \text{ и,}$$

$A = H_\chi$ получим

$$\Delta\lambda = \frac{1}{H_\chi} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T \{\Delta\sigma\} \quad (7.1)$$

Учитывая соотношения $\{\sigma_i\} = \sqrt{\frac{3}{2}} \{\sigma^*\}^T \{\sigma^*\}$, $\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\} = \frac{3\{\sigma^*\}}{2\sigma_i}$ и тот факт, что

$$\{\Delta\sigma\} = \{\Delta\sigma^*\} \quad (7.2)$$

получим, что

$$\Delta\lambda = \frac{\Delta\sigma_i}{H_\chi} \quad (7.3)$$

$$\{\Delta\varepsilon^p\} = \frac{3\{\sigma^*\} \Delta\sigma_i}{2\sigma_i H_\chi} \quad (7.4)$$

Следует отметить, что пластические деформации возникают только при определенных условиях. Для тел с упрочнением эти условия таковы: напряжения должны достигнуть такого уровня, что

$$\sigma_i - H(\chi) = 0 \text{ и } \{\sigma\} > 0 \quad (7.5)$$

Если

$$\sigma_i - H(\chi) < 0 \text{ или } \sigma_i - H(\chi) = 0, \{\Delta\sigma_i\} \leq 0 \quad (7.6)$$

то материал деформируется упруго [7].

Итерационная процедура метода заключается в следующем.

1. Для первой итерации принимаем

$$\{\Delta\varepsilon^p\}_1 = 0 \quad (7.7)$$

Решая упругую задачу для первого приращения нагрузки, вычисляем $\{\Delta\varepsilon^e\}_1$ и $\{\Delta\sigma\}_1$. Напряжения и деформации на первом шаге получаются, если к напряжениям $\{\Delta\sigma\}_0$ и деформациям $\{\varepsilon\}_0$, заданным начальными условиями, добавим соответствующие вычисленные приращения. На следующих шагах вычисленные приращения добавляются к напряжениям и деформациям на предыдущем шаге [9]. При помощи (7.4) при выполнении условия (7.5) по $\{\Delta\sigma\}_1$ и напряжений $\{\sigma\}_0$, заданных начальными условиями или, соответственно, предыдущим шагом, определяем и $\{\Delta\varepsilon^p\}_1$ прибавляем к текущим значениям деформаций. Аналогично поступаем с параметром текучести, который выбираем равным интенсивности пластических деформаций [9]. Его приращение определяем по формуле $\Delta\varepsilon_i^p = \sqrt{\frac{2}{3}} \{\Delta\varepsilon^p\}^T \{\Delta\varepsilon^p\}$. Параметр текучести χ считается равным нулю на первой итерации, или определяется предыдущим шагом.

$$\begin{aligned} \{\Delta\sigma\}_1 &= \{\sigma\}_0 + \{\Delta\sigma\}_1 \\ \{\Delta\varepsilon\}_1 &= \{\varepsilon\}_0 + \{\Delta\varepsilon^e\}_1 + \{\Delta\varepsilon^p\}_1, \\ \chi_1 &= \chi_0 + \Delta\chi_1 \end{aligned} \quad (7.7)$$

2. За начальную деформацию $\{\varepsilon\}_0$ принимаем $\Delta\varepsilon^p$ и возвращаемся к первому шагу процедуры. Снова из решения упругой задачи находим $\{\Delta\varepsilon^e\}_2$ и $1/7$ и т.д., пока не достигнем полной величины нагрузки.

Следует отметить, что к идеально пластическим телам этот метод неприменим [10].

8. ЭЛЕМЕНТ SOLID45

Описание элемента

Элемент SOLID 45 применяется для трехмерных задач в ANSYS. Геометрия данного элемента представлена на рис 4. Как видно из рисунка элемент состоит из 8 узлов SOLID 45 обладает пластичностью, набуханию, также предназначен для расчета на большие деформации и напряжения [3].

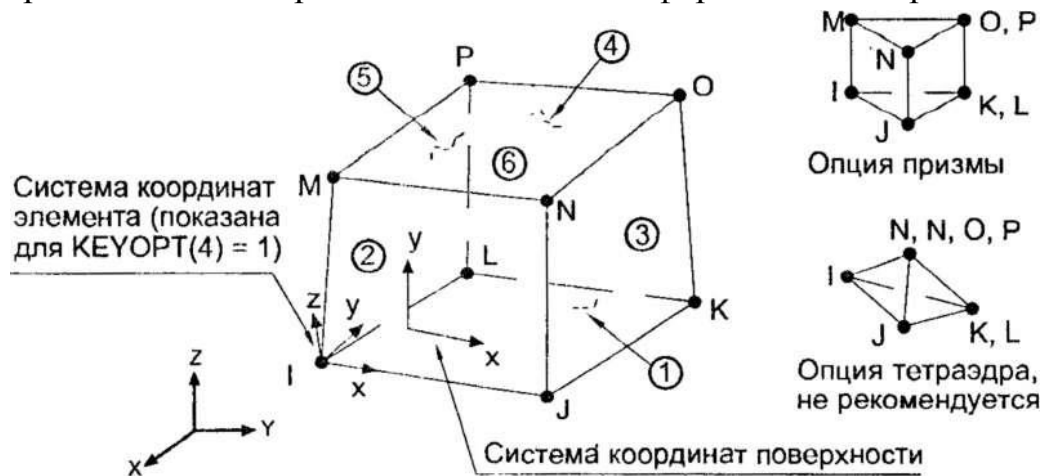


Рис. 4. Геометрия элемента SOLID45

9. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕЛИНЕЙНОСТИ

Геометрические нелинейности соответствуют нелинейностям конструкции или компонента, вызванным изменением геометрической формы при появлении перемещений. Это значит, что жесткость $[K]$ является функцией перемещений $\{u\}$. Жесткость изменяется под влиянием изменения формы и (или) поворотов материала в конструкции. Комплекс может учитывать пять типов геометрических нелинейностей.

- Большие деформации предполагают, что деформации не являются бесконечно малыми (являются конечными). Изменения формы (например, площади поперечного сечения, толщины и т. д.) также учитываются. Перемещения и повороты могут являться произвольно значительными.

- Большие повороты предполагают, что повороты являются большими, но механические деформации (вызывающие напряжения) оцениваются при помощи линеаризованных уравнений. Конструкция считается не изменяющей форму, за исключением движения в виде жесткого целого. Элементы этого класса соответствуют своей первоначальной форме.

- Изменение жесткости при приложении нагрузок предполагает, что и деформации, и повороты являются малыми. Для учета отдельных нелинейных эффектов поворотов используется аппроксимация первого порядка.

- Изменение жесткости при наличии скорости вращения предполагает, что и деформации, и повороты являются малыми. Данная опция описывает радиальное движение массы тела в задачах МДТТ, связанное с наличием угловой скорости. Следовательно, данный эффект схож с большими перемещениями и одновременной аппроксимацией малого вращения.

- Изменение жесткости, связанное с приложением давления, описывает изменение жесткости, вызванное эффектом следящей нагрузки при повороте нагрузки в форме давления. В задачах с большими перемещениями подобное может влиять на скорость сходимости [3].

10. ПРОВЕДЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО СТАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Процедура выполнения нелинейного статического расчета состоит из перечисленных ниже задач:

- создание модели;
- назначение опций контроля решения;
- назначение дополнительных опций контроля решения;
- выполнение вычислений;
- просмотр результатов.

Построение модели

В сущности, этот шаг одинаков и для линейного, и для нелинейного расчетов, хотя нелинейный расчет может включать специальные элементы или нелинейные свойства материала. Если расчет включает эффекты больших деформаций, данные кривой деформирования (связи напряжений с деформацией) должны быть выражены в терминах *истинных* напряжений и *истинных* (или *логарифмических*) деформаций.

После создания модели в комплексе ANSYS указываются средства контроля расчета (тип расчета, опции расчета, опции шага нагрузки и т. д.), прикладываются нагрузки и проводятся вычисления. Нелинейный расчет отличается от линейного расчета, в нелинейном расчете часто требуется приложение нагрузки шагами с приращениями и используются итерации.

Назначение опций контроля решения

Процесс назначения опций контроля решения для нелинейного расчета использует те же самые опции и метод доступа (диалоговую панель Solution Controls), что и используемые для расчетов линейных задач МДТТ.

Средства контроля расчета комплекса ANSYS автоматически вызывают включение автоматического назначения шага по времени (команда **AUTOTS,ON**). Внутренняя схема автоматического назначения шага по времени гарантирует, что изменение шага по времени не является чрезмерным (приводит к многочисленным делениям пополам или

сокращениям) или слишком консервативным (размер шага по времени является слишком малым). В конце текущего шага по времени размер следующего шага по времени предсказывается на основе четырех факторов:

- числа итераций, использованных в последнем шаге по времени (увеличение числа итераций вызывает уменьшение шага по времени);

- предсказание изменения состояния нелинейных элементов (размер шага по времени уменьшается, если изменение состояния неизбежно);

- значений приращения пластических деформаций;

- значений приращения деформаций ползучести.

Назначение дополнительных опции решателя

В этом разделе рассматриваются дополнительные параметры, которые можно установить для решения задачи. Эти параметры не отображаются в диалоговом окне решателя, поскольку они используются редко, и их значения по умолчанию редко требуется изменять.

Выполнение вычислений

Для нелинейной задачи, используя те же команды и процедуры, как и в решении линейной статической задачи. Если вам нужно определить несколько уровней нагрузки, необходимо заново задать настройки времени, шаг нагрузки, и так далее, а затем сохранить и решить для каждой из дополнительных ступеней нагрузки.

Просмотр результатов

Результаты нелинейного статического анализа состоят главным образом из перемещений, напряжений, деформаций и сил реакции. Вы можете просмотреть эти результаты в POST1, общий постпроцессор, или в POST26.

11. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Постановка задачи

Рассмотрим задачу об упругопластическом деформировании жестко заземленной с обоих концов балки прямоугольного поперечного сечения под действием распределенной нагрузки $q = 75 \text{ кэ/см}$ (Рис. 5). Длина балки $l = 25 \text{ см}$, высота $h = 1 \text{ см}$, ширина $b = 0.125 \text{ см}$, модуль упругости $E = 2 \cdot 10^6 \text{ кэ/см}^2$,

коэффициент Пуассона $\mu = 0.3$, предел текучести 3000 кэ/см^2 . Материал идеально пластический, подчиняющийся критерию пластичности Губера-Мизеса.

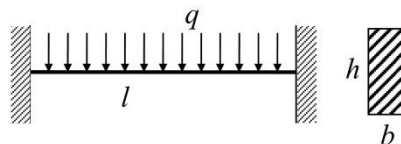


Рис. 5

Так как задача является симметричной, то достаточно рассмотреть половину балки, введя дополнительные условия симметрии. При решении используем сетку конечных элементов размером $100 \times 10 \times 1$ (Рис. 6). Нагрузку разбиваем на 100 шагов.

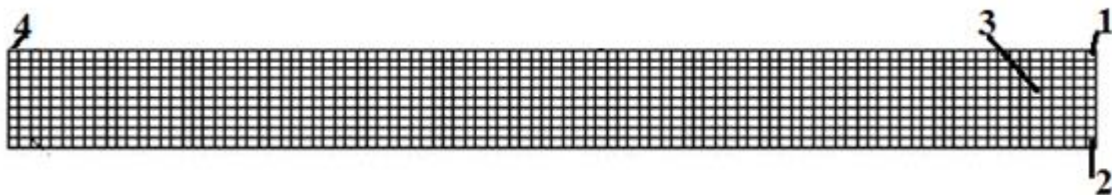


Рис. 6. Сетка пластинки

12. РЕЗУЛЬТАТЫ

Все расчёты были проведены в пакете ANSYS, log file которых приведен в приложении.

Для проведения расчета сначала была построена геометрия исследуемой пластинки, которая изображена на рис. 7. Размеры для данной пластины следующие: ширина 0.125, длина 25 и высота 1. Далее данную пластинку разбили на сетку с шагом h , которая представлена на рис.8. В качестве шага h были выбраны следующие параметры: вдоль оси x с разбиением равным 10; вдоль оси y с разбиением 1; вдоль оси z с разбиением равным 100. На рис. 9 представлен увеличенный вариант разбиения пластинки сеткой.

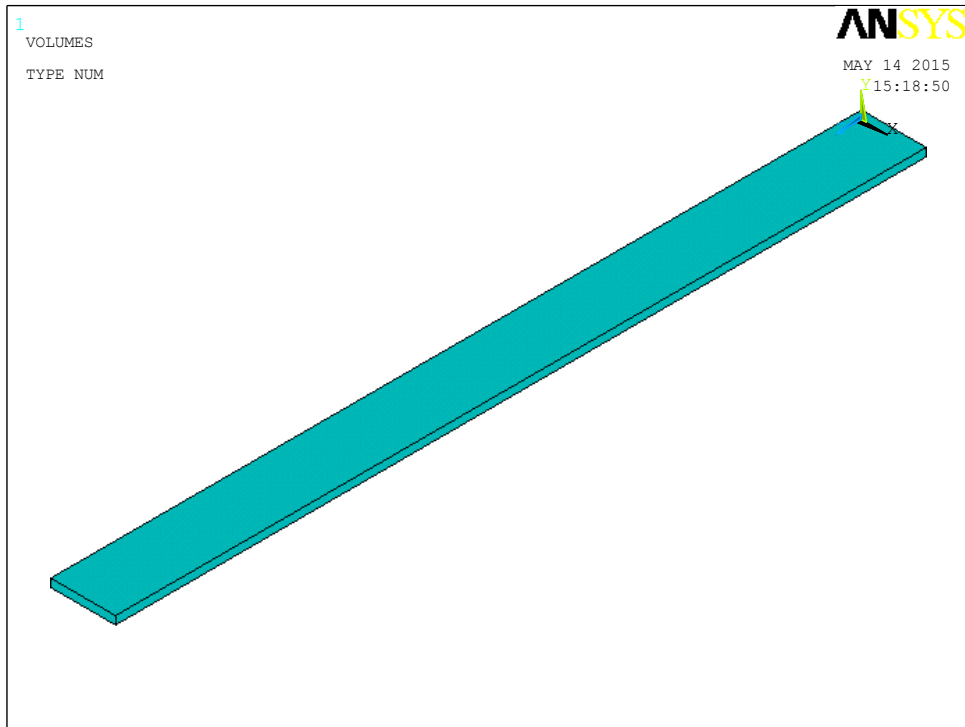


Рис. 7. Геометрия исследуемой пластинки

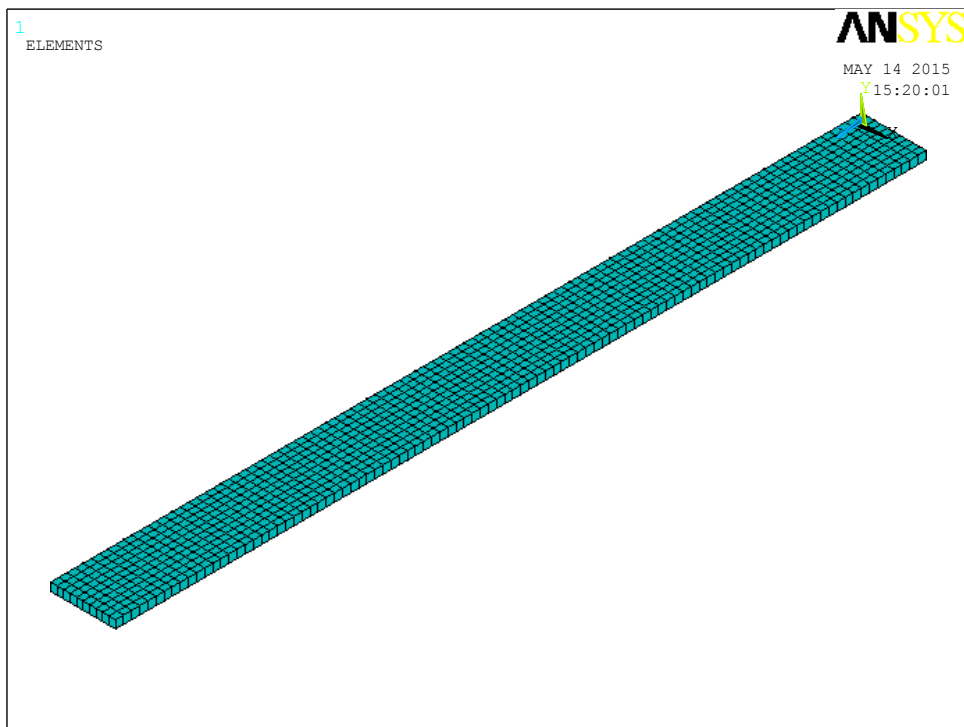


Рис. 8. Сетка исследуемой пластинки

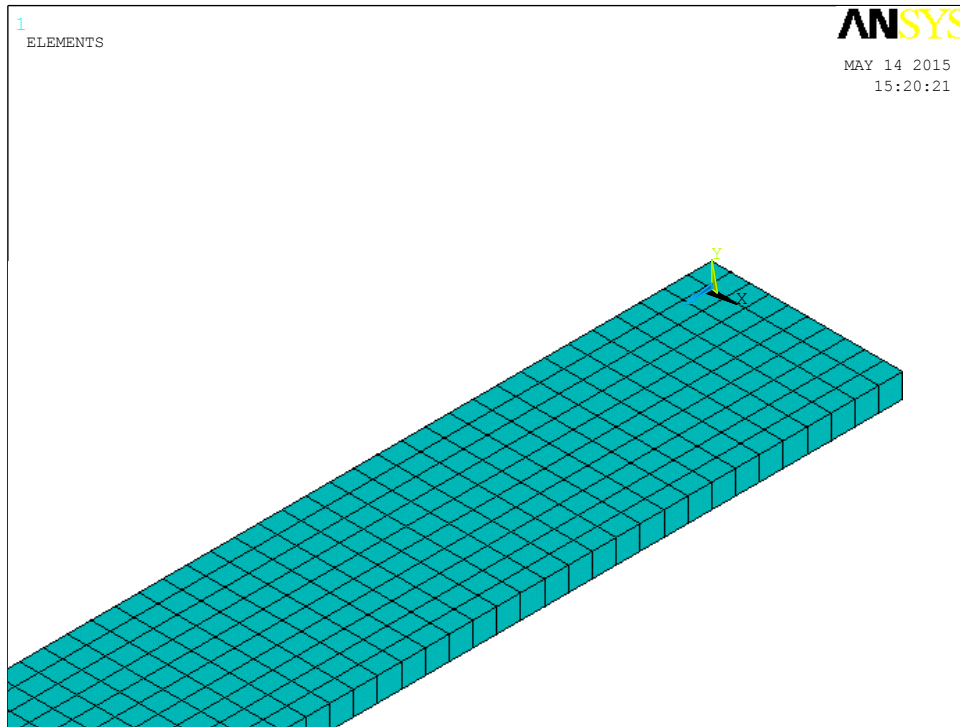


Рис. 9. Сетка исследуемой пластинки(в увеличенном виде)

Построив геометрию и разбив ее на сетку, выбрав граничные условия и приложив нагрузку, был произведен расчет на деформацию пластины. На рис 10 и рис. 11 представлено деформированное состояние пластины. На втором из них представлено для сравнения вместе с начальным положением пластины. На рис. 12 и рис. 13 представлена интенсивность напряжений в пластинке. По проведенному анализу напряженно-деформированного состояния были выбраны критические точки, которые изображены на рис. 6. Далее в каждой точке были построены графики зависимости напряжений от времени, которые представлены на рис. 14 - 17. Стоит отметить, что начиная от 0 и до 100 единиц времени производится нагружение и начиная со 100 и до 200 единиц времени происходит разгружение.

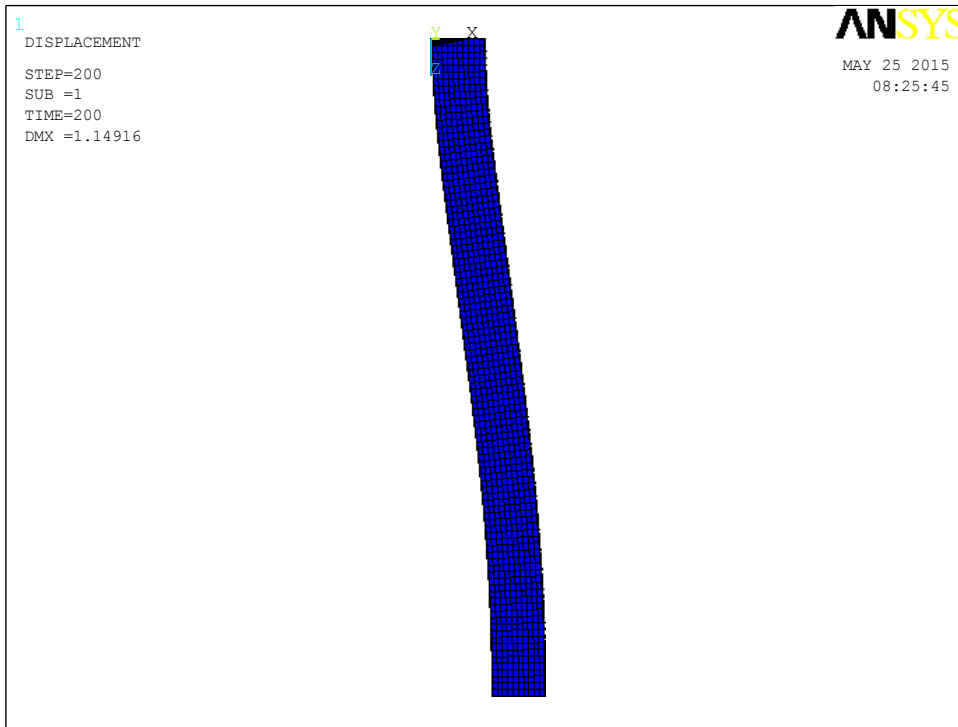


Рис. 10. Деформированное состояние пластины

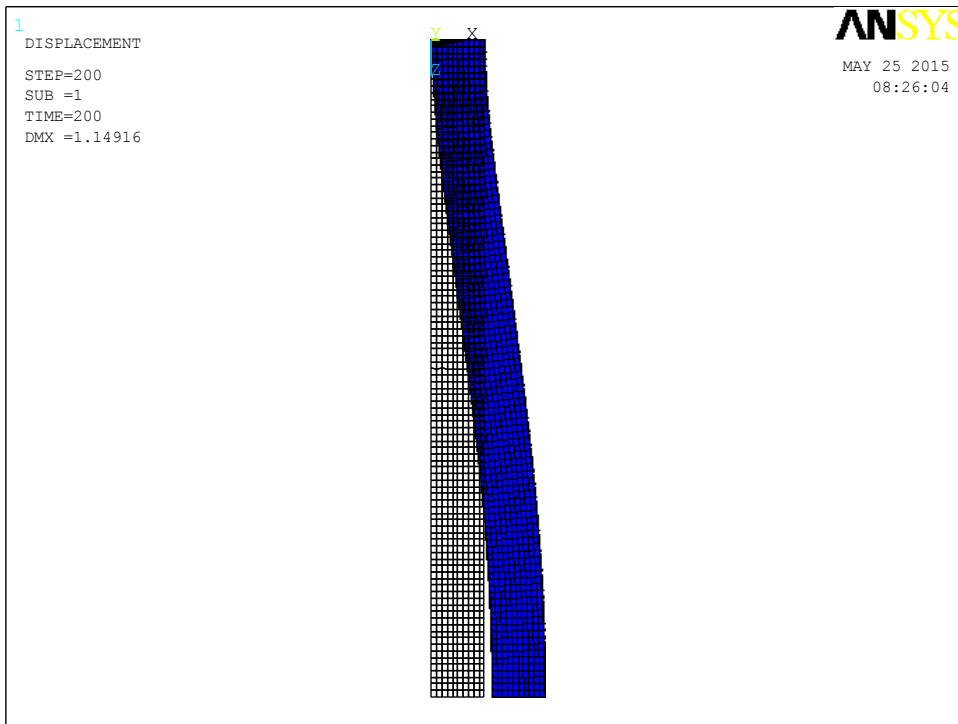


Рис. 11. Деформированное состояние пластины в сравнение с исходным

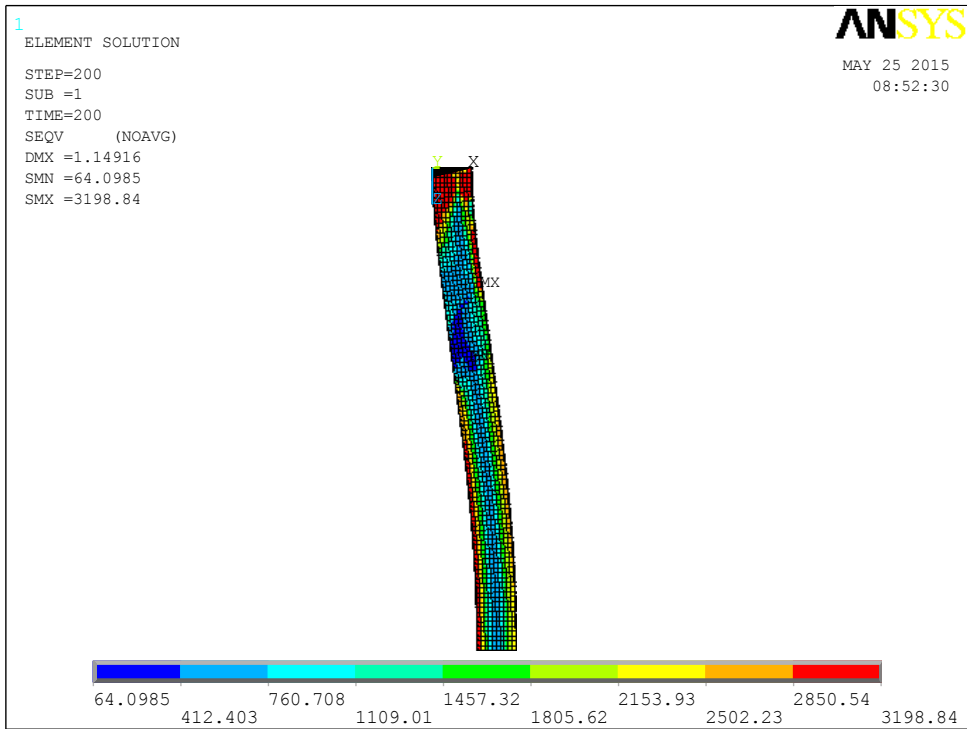


Рис. 12. Интенсивность напряжений

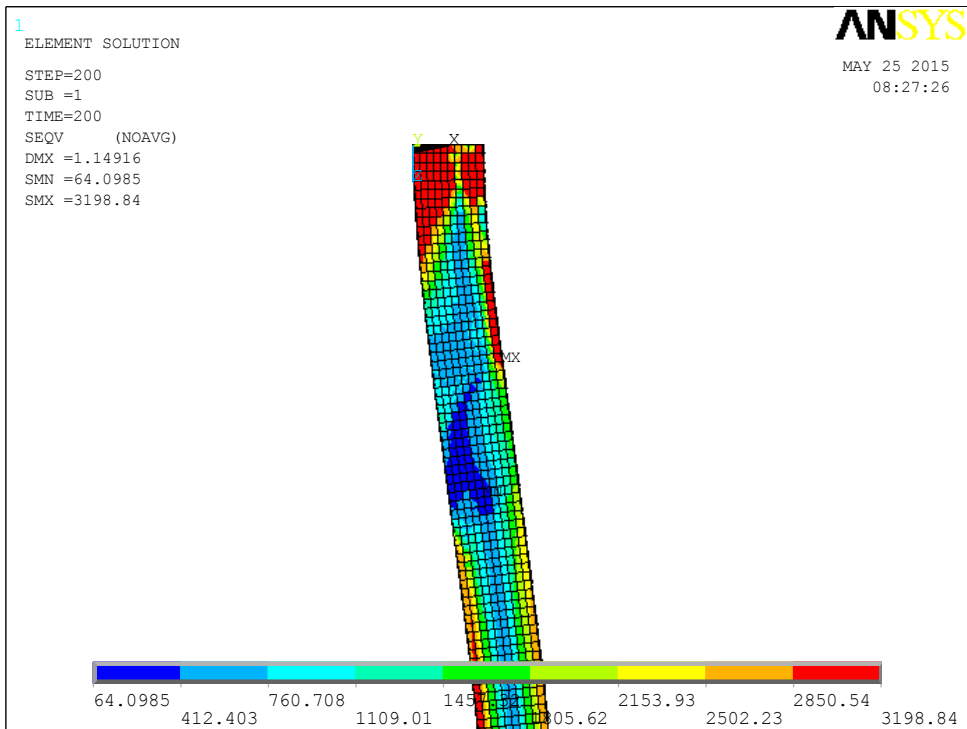


Рис. 13. Интенсивность напряжений

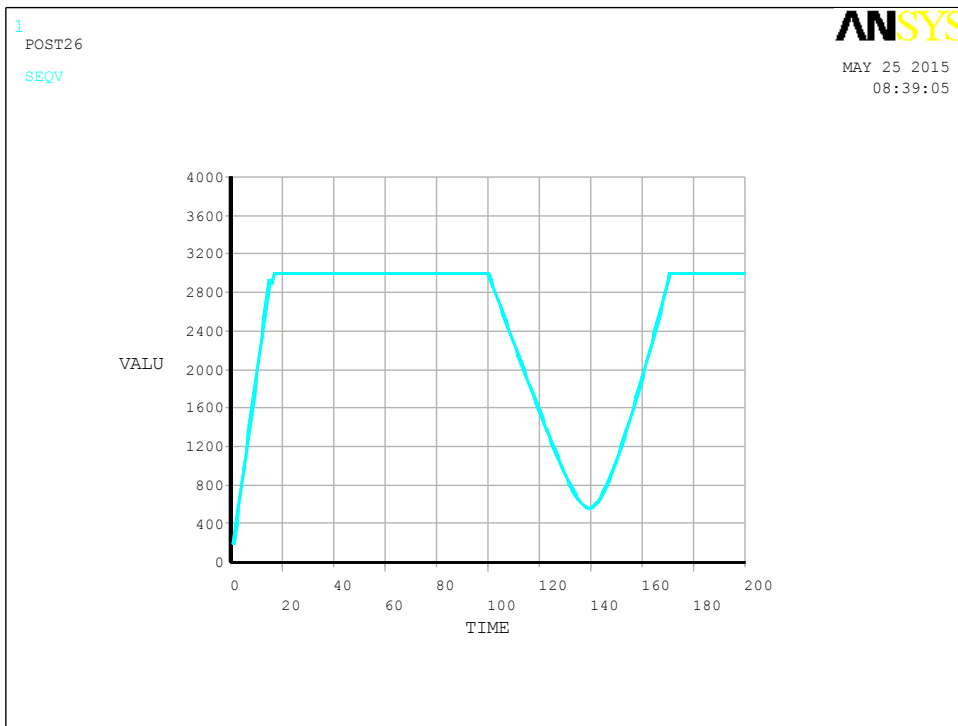


Рис. 14. График зависимости времени от напряжений (точка 1)

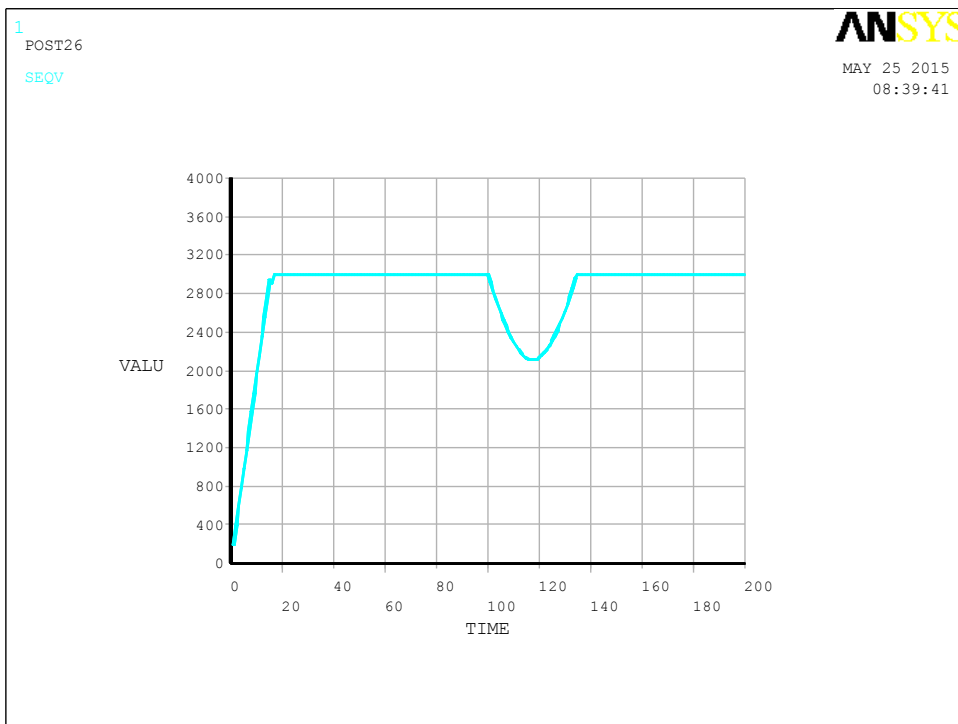


Рис. 15. График зависимости времени от напряжений (точка 2)

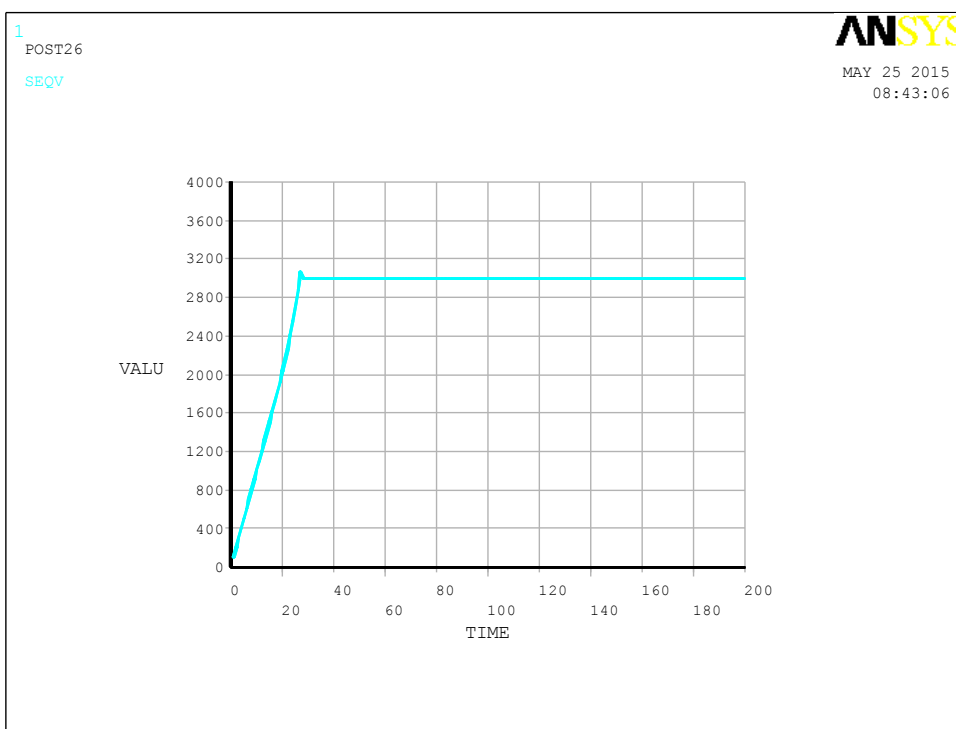


Рис. 16. График зависимости времени от напряжений (точка 4)

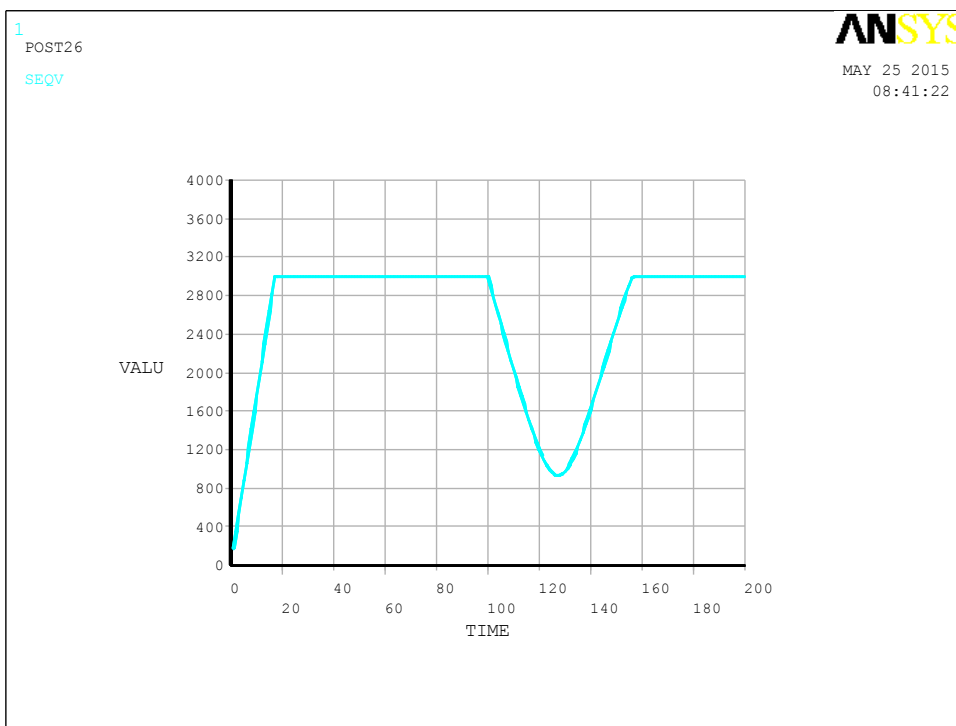


Рис. 17. График зависимости времени от напряжений (точка 3)

На рис. 14 видно, что для точки 1 сначала происходит этап с возрастанием интенсивности напряжений до предела текучести. Затем наступает этап, когда интенсивность напряжений не меняется со временем; при разгрузке сначала происходит убывание интенсивности напряжений, затем увеличение до предела текучести и наступление этапа постоянного

напряжения. То же самое наблюдается для точки 2 и точки 3, что нельзя сказать о точке 4. На этапе разгрузки точка 4 находится в пластичной зоне.

ВЫВОДЫ

Настоящая работа посвящена исследованию упругопластического материала. Рассмотрена методика расчета упругопластических задач.

Приведены основные уравнения и определяющие соотношения. Так как любой расчет основан на методе конечных элементов (МКЭ), поэтому был изучен принцип и основные соотношения МКЭ для упругопластического тела.

Для данной задачи применялся метод пошагового нагружения, было выбрано условие пластичности Губера-Мизеса. Была построена геометрия и проведен расчет на деформацию в пакете ANSYS. По полученным напряженно – деформируемому состоянию был произведен анализ и были выбраны характерные точки. По данным точкам были построены графики зависимости времени (нагружения и разгружения) от напряжений и произведен анализ этих графиков.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.И. Голованов, Д.В. Бережной. Метод конечных элементов в механике деформируемых твердых тел, Казанский государственный университет. – Казань : Дас, 2001. – 301 с.
2. 1. Артюхин Ю.П. Строительная механика в пакетах «МАТНЕМАТИСА» и «ANSYS». – Казань: Казанский гос. ун-т, 2009. – 120 с.
3. К.А. Басков. ANSYS: справочник пользователя. -М.:ДМК Пресс, 2005. -640 с.
4. 2. Тимошенко С.П., Гере Дж. Механика материалов. – М.: Мир, 1976. – 669 с.
5. Норри Д. де Фриз Ж. Введение в метод конечных элементов. М.: Мир, 1981.–304 с.
6. Розин Л.А. Метод конечных элементов в применении к упругим системам. - М. : Стройиздат, 1977.–129 с.
7. Грин А., Адкинс Д. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. - М.: Мир,1965.-455 с.
8. Черных К.Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. - Л.: Машиностроение, 1986.-336 с.
9. Баженов В.Г., Кибец А.И. Численное моделирование трехмерных задач нестационарного деформирования упругопластических конструкций методом конечных элементов // Изв. РАН МТТ.- 1994, № 1,с. 52-59.
10. Алфутов Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем/ Н.А. Алфутов. – М.: Машиностроение, 1978. – 312 с.
11. Султанов Л.У., Давыдов Р.Л. Численный алгоритм решения задачи о больших упругопластических деформациях МКЭ. Вестник ПНИПУ. Механика. -Пермь: Изд-во ПНИПУ 2013. № 1.-С. 81–93.
12. Султанов Л.У., Давыдов Р.Л. Численное исследование больших деформаций методом конечных элементов. Инженерно-строительный журнал.-Санкт-Петербург: СПбГУ, 2013. №9 (44). -С. 64–68.

ПРИЛОЖЕНИЕ

```
FINISH
/CLEAR,NOSTART
/PREP7
pp=75
n=100
pp=pp/n
e=0.2e7
strpr=3000
BLOCK,0,1,0,0.125,0,12.5,
ET,1,SOLID45
KEYOPT,1,1,1
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,EX,1,,e
MPDATA,PRXY,1,,0.3
TB,BISO,1,1,2,
TBTEMP,0
TBDATA,,strpr,,,,
!*AESIZE,ALL,0.125,
LESIZE,1,,1,,,,1
LESIZE,3,,1,,,,1
LESIZE,6,,1,,,,1
LESIZE,8,,1,,,,1
LESIZE,2,,10,,,,1
LESIZE,9,,100,,,,1
MSHAPE,0,3D
MSHKEY,1
VMESH,All
D,ALL,,0,,,UY,,,,
DA,1,ALL,
DA,2,UZ,
!SFA,5,1,PRES,pp
/SOLU
```

```
ANTYPE,0
NLGEOM,ON
PSTRESS,On
SSTIFF,ON
AUTOTS,0
DELTIM,1,0,0
OUTRES,BASIC,ALL
TIME,1
NEQIT,200
!*CNVTOL,U, ,0.001,2, ,
!*
!*EQLSV,SPAR
NCNV,2,0,0,0,0
*DO,I,1,n
SFA,5,1,PRES,i*pp
SOLVE
*ENDDO
*DO,I,n-1,0,-1
SFA,5,1,PRES,i*pp
SOLVE
*ENDDO
FINISH
/POST26
ESOL,2,1,2,S,EQV,
PLVAR,2
```