Известия вузов. Математика
2019, №10, с. 87–93

http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Краткое сообщение

А.В. АМИНОВА, Д.Р. ХАКИМОВ

ПРОЕКТИВНО-ГРУППОВЫЕ СВОЙСТВА h-ПРОСТРАНСТВ ТИПА $\{221\}$

Аннотация. Исследуется кривизна 5-мерного h-пространства H_{221} типа $\{221\}$ [3], получаются необходимые и достаточные условия для того, чтобы H_{221} было пространством постоянной кривизны K (теорема 1). Находится общее решение уравнения Эйзенхарта в h-пространстве H_{221} непостоянной кривизны. Устанавливаются необходимые и достаточные условия существования негомотетического проективного движения в h-пространстве H_{221} непостоянной кривизны (теорема 5) и как следствие определяется структура негомотетической проективной алгебры Ли в таком пространстве (теорема 6).

Ключевые слова: пятимерное псевдоримановo многообразие, уравнение Эйзенхарта, проективная алгебра Ли, h-пространство типа $\{221\}$.

УДК: 514.763: 514.8

DOI: 10.26907/0021-3446-2019-10-87-93

1. Векторное поле X на псевдоримановом многообразии (M, g) с проективной структурой Π называется *инфинитезимальным проективным преобразованием*, или *проективным движением*, если порождаемая этим полем в окрестности каждой точки $p \in M$ локальная 1-параметрическая группа состоит из (локальных) проективных преобразований, т. е. автоморфизмов проективной структуры. Необходимое и достаточное условие этого состоит в выполнении уравнения Эйзенхарта

$$\nabla h(Y,Z,W) = 2g(Y,Z)W\varphi + g(Y,W)Z\varphi + g(Z,W)Y\varphi, \tag{1}$$

равносильного после замены $h = a + 2\varphi g$ уравнению

$$\nabla a(Y,Z,W) = g(Y,W)Z\varphi + g(Z,W)Y\varphi, \tag{2}$$

и обобщенного уравнения Киллинга

$$L_X g = h,$$

где $Y, Z, W \in TM$, $(n+1)\varphi = \operatorname{div} X$ [1]. Если $\varphi = \text{const}$, т. е. $\operatorname{div} X = \text{const}$, то проективное движение является аффинным.

В косонормальном репере (Y_h) ([1], с. 98), адаптированном к характеристике Сегре симметричной билинейной формы h

$$\chi = \left\{ r_1 \dots r_{k_0} \left(m_1^{k_0+1} \dots m_{s_{k_0+1}}^{k_0+1} \right) \dots \left(m_1^{k} \dots m_{s_{k}}^{k} \right) \right\}$$

и заданном в области $V \subset M^n$ разбиением $I = \bigcup_{\alpha=1}^{k} I_\alpha$, $I_\alpha = \{ s \,|\, n_\alpha + 1 \le s \le n_\alpha + r_\alpha \}$, $n_1 = 0$, $n_\alpha = \sum_{l=1}^{\alpha-1} r_l$, $r_1 + \dots + r_k = n$, $\alpha = 2, \dots, k$, с множеством индексов $I = \{1, \dots, n\}$ и

Поступила в редакцию 30.04.2019, после доработки 30.04.2019. Принята к публикации 19.06.2019.

биекцией $\sim\colon\ I \to I\colon I_\alpha \ni p \to \tilde{p} = 2n_\alpha + r_\alpha + 1 - p \in I_\alpha$ $(\alpha = 1, \ldots, k)$, индексы поднимаются и опускаются с помощью метрики $\bar{g}_{pq} = g(Y_p, Y_q) \equiv \theta_p(Y_q) = e_p\delta^{\tilde{q}}_p$, например, $\theta^h = e_h\theta_{\tilde{h}}$, $e_p = \pm 1$, уравнение (2) принимает вид

$$d\bar{a}_{pq} + \sum_{h=1}^{n} e_h(\bar{a}_{hq}\omega_{p\tilde{h}} + \bar{a}_{ph}\omega_{q\tilde{h}}) = (Y_q\varphi)\theta_p + (Y_p\varphi)\theta_q,$$

где θ_h — каноническая 1-форма, сопряженная с Y_h, $\omega_{pq} = -\omega_{qp}$ — 1-форма связности, $p, q, r = 1, \ldots, n$.

Классификация псевдоримановых пространств, допускающих негомотетические проективные движения, основана на разбиении их по типам в соответствии с алгебраической структурой производной Ли L_Xg метрики g в направлении проективного движения X, определяемой в каждой точке $p \in V \subseteq M$ характеристикой Сегре χ тензора $h = L_Xg$. Тип тензора L_Xg определяет тип проективного движения X и тип метрики g в области V. Такие метрики будем называть *h-метриками типа* χ, а соответствующие пространства – *h-пространствами типа* χ [2].

В работе [3] с помощью метода косонормального репера определены пятимерные h-пространства H_{221} типа $\{221\}$ и установлены необходимые и достаточные условия существования проективного движения того же типа. Для нахождения всех проективных движений и вычисления максимальной проективной алгебры Ли в H_{221} нужно найти общее решение h уравнения Эйзенхарта (1) в H_{221}. В данной статье (п. 3, теорема 2) решение этой задачи требует обращения к условиям интегрируемости уравнений Эйзенхарта, включающих тензор кривизны. При этом необходимо выделить пространства постоянной кривизны $S^5(K)$, допускающие максимальную 35-мерную проективную группу, строение которой хорошо известно (например, [1], гл. 4). Структура кривизны h-пространства H_{221} выясняется в п. 2. В п. 3 находятся необходимые и достаточные условия для того, чтобы H_{221} было пространством постоянной кривизны K (теорема 1). В п. 4 находится общее решение уравнения Эйзенхарта в h-пространстве типа $\{221\}$ непостоянной кривизны, устанавливаются необходимые и достаточные условия существования негомотетического проективного движения в таком пространстве (теорема 5) и как следствие определяется строение негомотетической проективной алгебры Ли этого пространства (теорема 6).

2. Канонический косонормальный репер $(Y_h) = \underset{h}{\xi^i}\partial/\partial x^i$ задается в подходящих координатах x^i формулами

$$\underset{1}{\xi^1} = \frac{1}{(f_2 - f_1)(f_3 - f_1)^{1/2}},\quad \underset{2}{\xi^1} = \frac{1}{2(f_2 - f_1)(f_3 - f_1)^{1/2}}\left(\frac{2}{f_2 - f_1} + \frac{1}{f_3 - f_1}\right),$$

$$\underset{2}{\xi^2} = \frac{1}{(f_2 - f_1)(f_3 - f_1)^{1/2}\left(\varepsilon_1\left(x^1 + \tau(x^2)\right) + 1 - \varepsilon_1\right)},\quad \underset{3}{\xi^3} = \frac{1}{(f_1 - f_2)(f_3 - f_2)^{1/2}},$$

$$\underset{4}{\xi^3} = \frac{1}{2(f_1 - f_2)(f_3 - f_2)^{1/2}}\left(\frac{2}{f_1 - f_2} + \frac{1}{f_3 - f_2}\right), \tag{3}$$

$$\underset{4}{\xi^4} = \frac{1}{(f_1 - f_2)(f_3 - f_2)^{1/2}\left(\varepsilon_2\left(x^3 + \omega(x^4)\right) + 1 - \varepsilon_2\right)},\quad \underset{5}{\xi^5} = \frac{1}{(f_1 - f_3)(f_2 - f_3)}.$$

В этом репере метрика g h-пространства H_{221} и соответствующая билинейная форма $a = h - 2\varphi g$ определяются каноническими формами

$$\bar{a}_{pq}=\begin{pmatrix}0&e_1f_1&0&0&0\\e_1f_1&e_1&0&0&0\\0&0&0&e_2f_2&0\\0&0&e_2f_2&e_2&0\\0&0&0&0&e_3f_3\end{pmatrix},\quad \bar{g}_{pq}=\begin{pmatrix}0&e_1&0&0&0\\e_1&0&0&0&0\\0&0&0&e_2&0\\0&0&e_2&0&0\\0&0&0&0&e_3\end{pmatrix}. \tag{4}$$

Выполняются уравнения

$$Y_1\varphi=Y_3\varphi=0, \tag{5}$$

$$df_1=e_1(Y_2\varphi)\theta_1,\quad df_2=e_2(Y_4\varphi)\theta_3,\quad df_3=2e_3(Y_5\varphi)\theta_5, \tag{6}$$

$$\omega_{14}=\frac{Y_4\varphi}{f_2-f_1}\theta_1,\ \omega_{15}=\frac{Y_5\varphi}{f_3-f_1}\theta_1,\ \omega_{21}=(Y_2\varphi)\theta_2,\ \omega_{23}=\frac{Y_2\varphi}{f_2-f_1}\theta_3,$$
$$\omega_{24}=\frac{Y_4\varphi}{(f_2-f_1)^2}\theta_1+\frac{Y_4\varphi}{f_2-f_1}\theta_2-\frac{Y_2\varphi}{(f_2-f_1)^2}\theta_3+\frac{Y_2\varphi}{f_2-f_1}\theta_4, \tag{7}$$
$$\omega_{25}=\frac{Y_5\varphi}{(f_3-f_1)^2}\theta_1+\frac{Y_5\varphi}{f_3-f_1}\theta_2+\frac{Y_2\varphi}{f_3-f_1}\theta_5,$$
$$\omega_{35}=\frac{Y_5\varphi}{f_3-f_2}\theta_3,\ \omega_{43}=(Y_4\varphi)\theta_4,\ \omega_{45}=\frac{Y_5\varphi}{(f_3-f_2)^2}\theta_3+\frac{Y_5\varphi}{f_3-f_2}\theta_4+\frac{Y_4\varphi}{f_3-f_2}\theta_5.$$

Здесь

$$\varphi=f_1+f_2+\frac{1}{2}f_3 \tag{8}$$

— определяющая функция проективного движения типа {221}, $\omega_{ij}=\gamma_{jik}\theta^k$ — 1-форма связности в косонормальном репере (Y_h), $f_1=\varepsilon_1x^2+(1-\varepsilon_1)\kappa_1$, $f_2=\varepsilon_2x^4+(1-\varepsilon_2)\kappa_2$, $f_3=\mu(x^5)$, ε_1 и ε_2 принимают значения 0 и 1, κ_1,κ_2 – постоянные, $e_1,e_2,e_3=\pm1$ [3].

Используя первое структурное уравнение Картана $d\theta_i=-\sum_{j=1}^5 e_j\omega_{ij}\wedge\theta_{\tilde{j}}$ и формулы (7), находим

$$d\theta_1=-e_1(Y_2\varphi)\theta_1\wedge\theta_2-\frac{e_2(Y_4\varphi)}{f_2-f_1}\theta_1\wedge\theta_3-\frac{e_3(Y_5\varphi)}{f_3-f_1}\theta_1\wedge\theta_5,$$
$$d\theta_2=-\frac{e_2(Y_4\varphi)}{(f_2-f_1)^2}\theta_1\wedge\theta_3-\frac{e_3(Y_5\varphi)}{(f_3-f_1)^2}\theta_1\wedge\theta_5-\frac{e_2(Y_4\varphi)}{f_2-f_1}\theta_2\wedge\theta_3-\frac{e_3(Y_5\varphi)}{f_3-f_1}\theta_2\wedge\theta_5,$$
$$d\theta_3=-\frac{e_1(Y_2\varphi)}{f_2-f_1}\theta_1\wedge\theta_3-e_2(Y_4\varphi)\theta_3\wedge\theta_4-\frac{e_3(Y_5\varphi)}{f_3-f_2}\theta_3\wedge\theta_5,$$
$$d\theta_4=\frac{e_1(Y_2\varphi)}{(f_2-f_1)^2}\theta_1\wedge\theta_3-\frac{e_1(Y_2\varphi)}{f_2-f_1}\theta_1\wedge\theta_4-\frac{e_3(Y_5\varphi)}{(f_3-f_2)^2}\theta_3\wedge\theta_5-\frac{e_3(Y_5\varphi)}{f_3-f_2}\theta_4\wedge\theta_5,$$
$$d\theta_5=-\frac{e_1(Y_2\varphi)}{f_3-f_1}\theta_1\wedge\theta_5-\frac{e_2(Y_4\varphi)}{f_3-f_2}\theta_3\wedge\theta_5.$$

Введем обозначения

$$A_1\equiv Y_2\varphi,\quad A_2\equiv Y_4\varphi,\quad A_3\equiv Y_5\varphi,$$
$$C_1\equiv e_1Y_2(Y_2\varphi),\quad C_2\equiv e_2Y_4(Y_4\varphi),\quad C_3\equiv e_3Y_5(Y_5\varphi).$$

Взяв внешний дифференциал от обеих частей равенства $df_1=e_1(Y_2\varphi)\theta_1\equiv e_1A_1\theta_1$ (6) и сравнивая это с $dA_1=\theta^lY_lY_2\varphi=\theta^l[Y_l,Y_2]+\theta^lY_2Y_l\varphi$, с учетом (5) получим

$$dA_1=C_1\theta_1-e_1A_1^2\theta_2-A_1\left(e_2\frac{A_2}{f_2-f_1}\theta_3+e_3\frac{A_3}{f_3-f_1}\theta_5\right).$$

Так же вычисляются dA_2 и dA_3. Воспользовавшись полученными соотношениями и вторым структурным уравнением Картана

$\Omega_{ij} = d\omega_{ij} + \sum_{l=1}^{5} e_l \omega_{il} \wedge \omega_{\tilde{l}j}$, вычислим 2-форму кривизны Ω_{ij} h-пространства типа $\{221\}$:

$$\Omega_{12} = -\left(C_1 + \frac{e_3 A_3^2}{(f_3-f_1)^2}\right)\theta_1 \wedge \theta_2, \quad \Omega_{13} = -\frac{e_3 A_3^2}{(f_3-f_1)(f_3-f_2)}\theta_1 \wedge \theta_3,$$

$$\Omega_{14} = -\left(\frac{C_2}{f_2-f_1} + \frac{e_3 A_3^2}{(f_3-f_1)(f_3-f_2)^2}\right)\theta_1 \wedge \theta_3 - \frac{e_3 A_3^2}{(f_3-f_1)(f_3-f_2)}\theta_1 \wedge \theta_4,$$

$$\Omega_{15} = -\left(\frac{C_3}{f_3-f_1} - \frac{e_3 A_3^2}{(f_3-f_1)^2}\right)\theta_1 \wedge \theta_5,$$

$$\Omega_{23} = \left(\frac{C_1}{f_2-f_1} - \frac{e_3 A_3^2}{(f_3-f_1)^2(f_3-f_2)}\right)\theta_1 \wedge \theta_3 - \frac{e_3 A_3^2}{(f_3-f_1)(f_3-f_2)}\theta_2 \wedge \theta_3,$$

$$\Omega_{24} = -\left(\frac{C_1}{(f_2-f_1)^2} + \frac{C_2}{(f_2-f_1)^2} + \frac{e_3 A_3^2}{(f_3-f_1)^2(f_3-f_2)^2}\right)\theta_1 \wedge \theta_3 + \tag{9}$$

$$\left(\frac{C_1}{f_2-f_1} - \frac{e_3 A_3^2}{(f_3-f_1)^2(f_3-f_2)}\right)\theta_1 \wedge \theta_4 - \left(\frac{C_2}{f_2-f_1} + \frac{e_3 A_3^2}{(f_3-f_1)(f_3-f_2)^2}\right)\theta_2 \wedge \theta_3 -$$

$$\frac{e_3 A_3^2}{(f_3-f_1)(f_3-f_2)}\theta_2 \wedge \theta_4,$$

$$\Omega_{25} = -\left(\frac{C_3}{(f_3-f_1)^2} - \frac{2e_3 A_3^2}{(f_3-f_1)^3} - \frac{C_1}{f_3-f_1}\right)\theta_1 \wedge \theta_5 - \left(\frac{C_3}{f_3-f_1} - \frac{e_3 A_3^2}{(f_3-f_1)^2}\right)\theta_2 \wedge \theta_5,$$

$$\Omega_{34} = -\left(C_2 + \frac{e_3 A_3^2}{(f_3-f_2)^2}\right)\theta_3 \wedge \theta_4, \quad \Omega_{35} = -\left(\frac{C_3}{f_3-f_2} - \frac{e_3 A_3^2}{(f_3-f_2)^2}\right)\theta_3 \wedge \theta_5,$$

$$\Omega_{45} = -\left(\frac{C_3}{(f_3-f_2)^2} - \frac{C_2}{f_3-f_2} - \frac{2e_3 A_3^2}{(f_3-f_2)^3}\right)\theta_3 \wedge \theta_5 - \left(\frac{C_3}{f_3-f_2} - \frac{e_3 A_3^2}{(f_3-f_2)^2}\right)\theta_4 \wedge \theta_5.$$

3. Запишем 2-форму кривизны в виде $\Omega_{ij} \equiv \sum_{(kl)} K_{ijkl}\theta_k \wedge \theta_l \quad (k,l = 1,\ldots,5,\ k<l)$ и положим $K_{ijij} \equiv \rho_{ij}$, тогда предыдущая формула примет вид

$$\Omega_{ij} = \rho_{ij}\theta_i \wedge \theta_j + \sum_{(kl)\neq(ij)} K_{ijkl}\theta_k \wedge \theta_l \quad (i,j,k,l = 1,\ldots,5,\ i<j,\ k<l),$$

где в силу (9)

$$\rho_{12} = -C_1 - \frac{e_3 A_3^2}{(f_3-f_1)^2},\ \rho_{13} = \rho_{14} = \rho_{23} = \rho_{24} = -\frac{e_3 A_3^2}{(f_3-f_1)(f_3-f_2)},\ \rho_{34} = -C_2 - \frac{e_3 A_3^2}{(f_3-f_2)^2},$$

$$\rho_{15} = \rho_{25} = -\frac{C_3}{f_3-f_1} + \frac{e_3 A_3^2}{(f_3-f_1)^2}, \quad \rho_{35} = \rho_{45} = -\frac{C_3}{f_3-f_2} + \frac{e_3 A_3^2}{(f_3-f_2)^2},$$

а из коэффициентов K_{ijkl} при $(kl) \neq (ij)$ отличны от нуля только

$$K_{1413} = -\frac{C_2}{f_2-f_1} - \frac{e_3 A_3^2}{(f_3-f_1)(f_3-f_2)^2}, \quad K_{2313} = \frac{C_1}{f_2-f_1} - \frac{e_3 A_3^2}{(f_3-f_1)^2(f_3-f_2)},$$

$$K_{2413} = -\frac{C_1+C_2}{(f_2-f_1)^2} - \frac{e_3 A_3^2}{(f_3-f_1)^2(f_3-f_2)^2}, \quad K_{2414} = K_{2313}, \quad K_{2423} = K_{1413},$$

$$K_{2515} = -\frac{C_3}{(f_3-f_1)^2} + \frac{2e_3 A_3^2}{(f_3-f_1)^3} + \frac{C_1}{f_3-f_1},\ K_{4535} = -\frac{C_3}{(f_3-f_2)^2} + \frac{2e_3 A_3^2}{(f_3-f_2)^3} + \frac{C_2}{f_3-f_2}.$$

Теорема 1. *Для того чтобы h-пространство H_{221} типа $\{221\}$ было пространством постоянной кривизны K: $\Omega_{ij} = K\theta_i \wedge \theta_j$, необходимо и достаточно выполнения условий $K_{1413} = K_{2313} = K_{2515} = 0$, что равносильно*

$$C_1 = \frac{e_3(f_2 - f_1)A_3^2}{(f_3 - f_1)^2(f_3 - f_2)},\ C_2 = -\frac{e_3(f_2 - f_1)A_3^2}{(f_3 - f_1)(f_3 - f_2)^2},\ C_3 = \frac{e_3(2f_3 - f_1 - f_2)A_3^2}{(f_1 - f_3)(f_2 - f_3)}, \tag{10}$$

при этом $K_{ijkl} = 0$ для всех $(kl) \neq (ij)$,

$$\Omega_{ij} = \rho\theta_i \wedge \theta_j, \quad \rho_{ij} = -\frac{e_3A_3^2}{(f_3 - f_1)(f_3 - f_2)} \equiv \rho = K \tag{11}$$

$(i, j, k, l = 1, \ldots, 5;\ i < j,\ k < l)$.

Схема доказательства. Необходимость условий $K_{1413} = K_{2313} = K_{2515} = 0$ следует из формулы $\Omega_{ij} = K\theta_i \wedge \theta_j$, определяющей пространство постоянной кривизны K. Если выполняется (10), то $\rho_{ij} = \rho_{kl}$ для всех $i, j, k, l = 1, \ldots, 5;\ i < j,\ k < l$. Обозначив $\rho_{ij} \equiv \rho$, найдем $\Omega_{ij} = \rho\theta_i \wedge \theta_j$, где по теореме Шура [4] $\rho = \text{const} \equiv K$.

4. Найдем общее решение уравнения Эйзенхарта в h-пространстве (H_{221}, g) непостоянной кривизны.

Теорема 2. *Любое решение (k, g, ψ) уравнения Эйзенхарта*

$$\nabla k(Y, Z, W) = 2g(Y, Z)W\psi + g(W, Z)Y\psi + g(Y, W)Z\psi,$$

равносильного после замены $k = b + 2\psi g$ уравнению

$$\nabla b(Y, Z, W) = g(W, Z)Y\psi + g(Y, W)Z\psi, \tag{12}$$

в h-пространстве (H_{221}, g) типа $\{221\}$ непостоянной кривизны удовлетворяет условию

$$\psi = c_1\left(f_1 + f_2 + \frac{1}{2}f_3\right) + \text{const} = c_1\varphi + \text{const}, \tag{13}$$

где функция φ определена равенством (8), c_1 — произвольная постоянная.

Схема доказательства. Ввиду инвариантности величин f_i и тензорного характера равенства (13) достаточно доказать его в каноническом косореперe (3), где уравнение (12) принимает вид

$$d\bar{b}_{pq} + \sum_{h=1}^{5} e_h\left(\bar{b}_{hq}\omega_{p\tilde{h}} + \bar{b}_{ph}\omega_{q\tilde{h}}\right) = (Y_q\psi)\theta_p + (Y_p\psi)\theta_q, \tag{14}$$

$\omega_{p\tilde{h}}$ определены формулами (7), а $\bar{b}_{pq}$ — компоненты тензора b в косореперe (3).

Применив внешний дифференциал d к уравнению (14), получим условия интегрируемости этого уравнения

$$\bar{b}_{ph}\Omega^h{}_q + \bar{b}_{hq}\Omega^h{}_p = \psi_{ph}\theta^h \wedge \theta_q + \psi_{hq}\theta^h \wedge \theta_p, \tag{15}$$

где $\Omega^h{}_p = e_h\Omega_{\tilde{h}p}$, $\psi_{ph} \equiv -Y_hY_p\psi - \gamma^l{}_{ph}Y_l\psi = \psi_{hp}$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых базисных 2-формах $\theta_h \wedge \theta_q$ слева и справа в (15), при $(pq) = (11), (13), (15), (14)$ найдем

$$\psi_{11} = -\bar{b}_{11}\left(C_1 + \frac{e_3A_3^2}{(f_3 - f_1)^2}\right) = -\bar{b}_{11}\frac{e_3A_3^2}{(f_3 - f_1)(f_3 - f_2)} = \bar{b}_{11}\left(\frac{e_3A_3^2}{(f_3 - f_1)^2} - \frac{C_3}{f_3 - f_1}\right),$$

$$\bar{b}_{11}\left(\frac{C_2}{f_2 - f_1} + \frac{e_3A_3^2}{(f_3 - f_1)(f_3 - f_2)^2}\right) = 0.$$

Если $\bar{b}_{11} \neq 0$, то отсюда следует (10), и по теореме 1 H_{221} имеет постоянную кривизну, что противоречит предположению, поэтому $\bar{b}_{11} = \psi_{11} = 0$. Так же выводятся равенства

$$\bar{b}_{i_1 5} = \bar{b}_{i_2 5} = \bar{b}_{i_1 i_2} = 0, \psi_{i_1 5} = \psi_{i_2 5} = \psi_{i_1 i_2} = 0 \quad (i_1 = 1, 2;\ i_2 = 3, 4). \tag{16}$$

С учетом этих равенств уравнения (14), где ω_{hs} определены формулами (7), при $(pq) = (11), (12)$ дают $Y_1\psi = 0$, $d\bar{b}_{12} \equiv \theta^l Y_l \bar{b}_{12} = (Y_2\psi)\theta_1$. Пользуясь формулами (3), отсюда выводим $\bar{b}_{12} = e_1\alpha(x^2)$, $\partial_2\psi = \alpha'$. Так же получаются равенства $\bar{b}_{34} = e_2\beta(x^4)$, $\bar{b}_{55} = e_3\gamma(x^5)$ и $\psi = \alpha(x^2) + \beta(x^4) + (1/2)\gamma(x^5) + \text{const}$. Из (14) при $(pq) = (23), (14)$ найдем

$$\alpha' = \frac{\beta - \alpha}{f_2 - f_1} f_1', \quad \beta' = \frac{\beta - \alpha}{f_2 - f_1} f_2'.$$

В случае $f_2' f_1' \neq 0$ отсюда следует $(\alpha'/f_1')(x^2) = (\beta'/f_2')(x^4) \equiv c_1 = \text{const}$, т. е. $\alpha = c_1 f_1 + \text{const}$, $\beta = c_1 f_2 + \text{const}$; к такому же выводу придем при $f_2' f_1' = 0$.

Интегрируя уравнение (14), $(pq) = (15)$:

$$\gamma' = \frac{\gamma - c_1 f_1}{f_3 - f_1} f_3',$$

получим $\gamma = c_1 f_3 + \text{const}$, в итоге имеем (13). □

Теорема 3. *Любой ковариантно постоянный симметричный тензор b_{ij} в h-пространстве (H_{221}, g) типа $\{221\}$ непостоянной кривизны пропорционален метрическому тензору*

$$b_{ij} = c_2 g_{ij} \qquad (c_2 = \text{const}).$$

Схема доказательства. В косонормальном репере (3) уравнение $b_{ij,k} = 0$ принимает вид

$$d\bar{b}_{pq} + \sum_{h=1}^{5} e_h \left(\bar{b}_{hq}\omega_{p\tilde{h}} + \bar{b}_{ph}\omega_{q\tilde{h}} \right) = 0. \tag{17}$$

Так как это уравнение получается из уравнения (14) при $\psi = \text{const}$, то справедливы равенства (16): $\bar{b}_{i_1 5} = \bar{b}_{i_2 5} = \bar{b}_{i_1 i_2} = 0$ $(i_1 = 1, 2; i_2 = 3, 4)$, благодаря которым система (17) сводится к уравнениям $d\bar{b}_{12} = d\bar{b}_{34} = d\bar{b}_{55} = 0$, $e_2\bar{b}_{34} - e_1\bar{b}_{12} = e_3\bar{b}_{55} - e_2\bar{b}_{34} = 0$, из которых следует $\bar{b}_{pq} = c_2\bar{g}_{pq}$, где матрица $(\bar{g}_{pq})$ определена каноническими формами (4) и множитель c_2 постоянен ввиду условия $b_{ij,k} = 0$ и ковариантного постоянства метрического тензора g_{ij}.

Так как векторное поле X является аффинным движением в H_{221}, если и только если $(L_X g)_{,k} = 0$, то из теоремы 3 следует

Теорема 4. *Всякое аффинное движение X в h-пространстве (H_{221}, g) типа $\{221\}$ непостоянной кривизны есть инфинитезимальная гомотетия: $L_X g = cg$, $c = \text{const}$.*

Поскольку любые два решения h_1 и h_2 уравнения Эйзенхарта (1) с одинаковой правой частью могут отличаться лишь на ковариантно постоянный тензор b, то из теоремы 2 и линейности уравнения (1) следует, что общее решение уравнения Эйзенхарта в обыкновенном h-пространстве (H_{221}, g) типа $\{221\}$ может быть записано в виде $c_1 h + b$ или в силу теоремы 3 в виде $c_1 h + c_2 g$, где $h = a + 2\varphi g$, g и a определены в косонормальном репере (3) каноническими формами (4) [3], c_1, c_2 – const. Отсюда получается

Теорема 5. *Векторное поле X является проективным движением в h-пространстве (H_{221}, g) непостоянной кривизны тогда и только тогда, когда*

$$L_X g = c_1 h + c_2 g \equiv c_1(a + 2\varphi g) + c_2 g,$$

где φ — определяющая функция проективного движения X, g и a определены в косонормальном репере (3) каноническими формами (4), c_1, c_2 — произвольные постоянные.

Из теоремы 5 вытекает

Теорема 6. *Если h-пространство (H_{221}, g) типа $\{221\}$ непостоянной кривизны допускает r-мерную негомотетическую проективную алгебру Ли P_r, то эта алгебра содержит $(r-1)$-мерную гомотетическую подалгебру.*

Схема доказательства. Если $(X_1, \dots, X_r)$ — базис алгебры Ли P_r, то $L_{X_s} g = \underset{s}{c}_1 h + \underset{s}{c}_2 g$, $s = 1, \dots, r$, где одна из постоянных $\underset{s}{c}_1$, например, $\underset{1}{c}_1$ отлична от нуля (в противном случае P_r состоит из гомотетий). В новом базисе $Z_1 = X_1$, $Z_\tau = \underset{1}{c}_1 X_\tau - \underset{\tau}{c}_1 X_1$ имеем $L_{Z_\tau} g = (\underset{1}{c}_1 \underset{\tau}{c}_2 - \underset{1}{c}_2 \underset{\tau}{c}_1) g$, $\tau = 2, \dots, r$.

Литература

[1] Аминова А.В. *Проективные преобразования псевдоримановых многообразий* (Янус-К, М., 2003).

[2] Аминова А.В. *Алгебры Ли инфинитезимальных проективных преобразований лоренцевых многообразий*, УМН, **50** (1), 69–142 (1995).

[3] Аминова А.В. , Хакимов Д.Р. *О проективных движениях пятимерных пространств специального вида*, Изв. вузов. Матем., №5, 1–7 (2017).

[4] Schur F. *Über den Zusammenhang der Räume konstanter Krümmungsmasses mit den projectiven Raumen*, Math. Ann., **27**, 537–567 (1886).

Ася Васильевна Аминова

Казанский федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

e-mail: asya.aminova@kpfu.ru

Джамолиддин Рахмонович Хакимов

Казанский федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

e-mail: dzhamoliddink@mail.ru

A.V. Aminova and D.R. Khakimov

Projective group properties of h-spaces of type $\{221\}$

Abstract. We investigate the curvature of a 5-dimensional h-space H_{221} of the type $\{221\}$ [3], necessary and sufficient conditions are obtained in order that H_{221} be a space of constant curvature K (theorem 1). A general solution of the Eisenhart equation is found in the h-space H_{221} of non-constant curvature. The necessary and sufficient conditions for the existence of non-homothetical projective motion in the h-space H_{221} of non-constant curvature are established (theorem 5) and, as a consequence, the structure of the non-homothetical projective Lie algebra in such a space is determined (theorem 6).

Keywords: five-dimensional pseudo-Riemannian manifold, the Eisenhart equation, projective Lie algebra, h-space of the type $\{221\}$.

Asya Vasilyevna Aminova
Kazan Federal University,

18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

e-mail: asya.aminova@kpfu.ru

Dzhamoliddin Rakhmonovich Khakimov
Kazan Federal University,

18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

e-mail: dzhamoliddink@mail.ru