УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 153, кн. 3 Физико-математические науки *2011*

УДК 530.12+530.51

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ПЕТРОВА И ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ В ГРАВИТАЦИОННЫХ ПОЛЯХ

А.М. Баранов

Аннотация

Показана связь алгебраической классификации Петрова гравитационных полей с теорией катастроф как обобщенной теорией фазовых переходов. Проведена аналогия переходов между алгебраическими типами пространства-времени и фазовыми переходами на уровне кривизны (тензора Вейля) на примерах классификации Петрова, алгебраической классификации четырехмерных локально евклидовых пространств и получения гравитационных полей светоподобных источников.

Ключевые слова: алгебраическая классификация Петрова, гравитационные поля, теория катастроф, фазовые переходы, светоподобные источники, лайтон, геликсон.

Введение

В работах А.З. Петрова [1, 2] впервые была предложена естественная инвариантная классификация римановых пространств на основе исследования алгебраической структуры тензора Римана–Кристоффеля (или в более общем случае – тензора конформной кривизны) (см. монографию [3], где собраны основные результаты).

Одним из ключевых моментов классификации Петрова является отображение 4-мерного пространства-времени на 6-мерное евклидово пространство, которое в дальнейшем удается свести к 3-мерному комплексному евклидовому пространству. При этом тензор кривизны (или тензор Вейля) отображаются в симметричную вещественную бесследовую матрицу, которую затем можно представить как комплексную матрицу Вейля. Эта матрица легко получается и при специальном отображении тензора Вейля, которое оказывается следствием требования преобразования ортогональной 4-матрицы Лоренца в ортогональную 3-матрицу комплексного 3-пространства.

С другой стороны, существует тесная связь алгебраической классификации Петрова и эйнштейновской теорией гравитации через тензор кривизны Римана–Кристоффеля и уравнения тяготения.

В дальнейшем классификация комплексных матриц Вейля осуществляется путем постановки и решения задачи на собственные значения. Одним из важнейших результатов подхода А.З. Петрова к алгебраической классификации пространств является общая теорема (*теорема Петрова*), или *теорема об алгебраических типах гравитационных полей.*

Теорема 1. *Существует три и только три основных типа гравитационных полей по Петрову с сигнатурой метрики* $(+---)$*; в зависимости от собственных значений и векторов эти типы пространств распадаются на семь подтипов.*

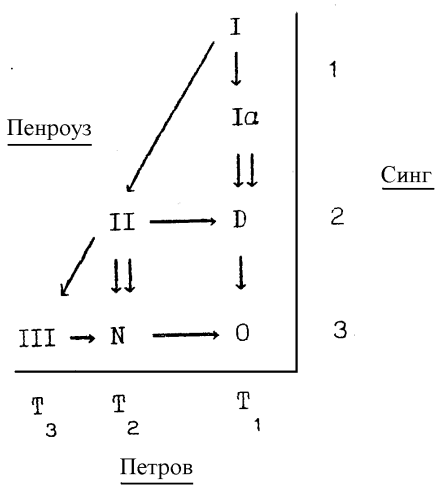

Рис. 1. Диаграмма алгебраической классификации пространства-времени согласно разным авторам

Приведем также результаты разбиения на классы в зависимости от собственных векторов и собственных значений матрицы Вейля. Из теоремы Петрова следует неоднозначность разбиения на классы (типы) матриц Вейля. На диаграмме (см. рис. 1) приведены результаты такого разбиения различными авторами. Необходимо подчеркнуть, что ни один из указанных в таблице авторов не выделяет подтип Ia в качестве самостоятельного. Такое выделение диктуется как классификацией матриц по рангам, так и чисто физическими соображениями, например, связанными с образованием стоячей гравитационной волны [4].

Стрелки на диаграмме Пенроуза (рис. 1) указывают направление возрастания кратности главных светоподобных направлений при переходах между типами пространств (в том числе вырождение по рангу матрицы Вейля) [5].

Что касается физической интерпретации алгебраической классификации, то она становится ясной при использовании уравнения девиации геодезических для анализа поведения облака пробных частиц в гравитационном поле [6]. Оказывается, что гравитационное поле типа N аналогично полю плоской электромагнитной волны (поперечно-поперечная плоская гравитационная волна). Поля типа III также волновые поля, но с продольной составляющей. Аналогом кулоновского поля (поля уединенного точечного заряда) является поле типа D. Тип II – комбинация полей типов D и N. В слабом приближении такое поле можно рассматривать как суперпозицию полей кулоновского типа и плоской гравитационной волны. Поля типа Ia аналогичны стоячим электромагнитным волнам (стоячая гравитационная волна, образованная из двух волн типа N, в приближении слабого поля относится как раз к такому типу). Обобщение пространства Минковского – это поля типа O с конформно-плоской метрикой. Примером такого пространства является вселенная Фридмана. Гравитационные поля, не обладающие какими-либо симметриями, относятся к наиболее общему типу I.

1. Теория катастроф и алгебраическая классификация гравитационных полей

Классификация Петрова гравитационных полей, с одной стороны, связана с решениями кубического характеристического уравнения на собственные значения

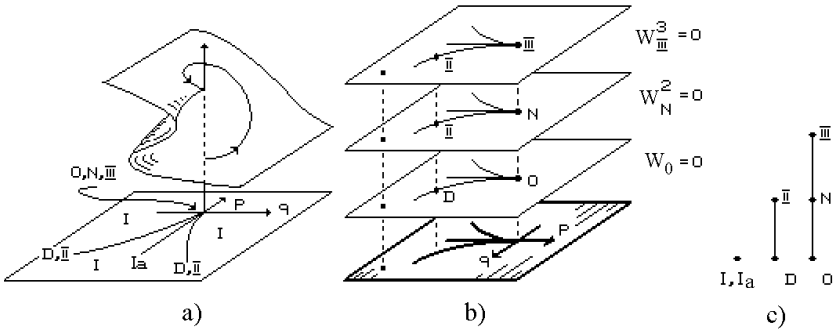

Рис. 2. *a*) Поверхность катастрофы сборки и ее проекция на плоскость управляющих параметров p и q. *b*) Листы, отвечающие классам сопряженности матриц Вейля. *c*) Нильпотентные и полупростые классы сопряженности матриц Вейля

матрицы Вейля

$$\lambda^3 + p\lambda + q = 0, \tag{1}$$

где λ обозначает характеристические значения, p и q – управляющие параметры.

С другой стороны, это уравнение может рассматриваться как условие на критические точки для «потенциальной» функции

$$U = (1/4)\,\lambda^4 + (1/2)\,p\lambda^2 + q\lambda, \tag{2}$$

которая описывает катастрофу сборки.

Задание сепаратрисы (полукубической параболы Нейля) уравнением (Q – дискриминант кубического уравнения)

$$Q = (p/3)^3 + (q/2)^2 = 0 \tag{3}$$

означает равенство двух корней из трех для уравнения (1). По алгебраической классификации это соответствует наличию типов D и II. Исключение переменной λ из уравнений

$$d^2U/d\lambda^2 = 3\lambda^2 + p = 0, \quad d^3U/d\lambda^3 = 6\lambda^2 = 0 \tag{4}$$

приводит к требованию $q = 0$ (вырожденность матрицы Вейля), что, в свою очередь, означает $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -\lambda_3 = \sqrt{p}$, или наличие на плоскости параметров (p, q) одномерного множества Максвелла. На этом множестве реализуется тип Ia. Совместное решение уравнений (4) дает точку сборки $p = q = 0$ (трижды вырожденную точку), которой отвечают типы пространств O, N, III. Вся оставшаяся плоскость параметров (p, q) отвечает типу I (см. рис. 2) [7, 8].

С другой стороны, точка сборки является аналогом точки фазового перехода 2-го рода [7, 8], а переход в тип 0 отвечает переходу в наиболее «симметричную» фазу. При этом собственные значения λ (инварианты тензора кривизны или тензора Вейля) играют роль параметра порядка, а параметр p – роль температуры; первая производная функции U по p – энтропии, а вторая производная - теплоемкости. Однако у матриц Вейля имеется собственная характеристика (ранг матрицы), которая ведет себя как теплоемкость твердого тела при фазовых переходах 2-го рода. Так, ранги матриц типов O, N, III соответственно равны $r = 0$, 1, 2. Следует подчеркнуть, что здесь «фазами субстанции» выступают типы гравитационных полей [8].

В точке сборки присутствует вырождение по λ (все $\lambda_i = 0,\ i = 1, 2, 3$), поэтому этой точке соответствуют сразу три типа матриц – O, N, III. Кроме того, скачки вторых производных по p от функции U в точке сборки отвечают скачкам рангов матриц Вейля.

Необходимо еще учитывать и то, что матрицы Вейля упомянутых трех типов обладают следующими свойствами: $W_0 = 0$ (нильпотент индекса 1), $W_N^2 = 0$ (нильпотент индекса 2), $W_{III}^3 = 0$ (нильпотент индекса 3). Описанная ситуация с типами пространств наглядно изображена на рис. 2. Фактически плоскость (p, q) (рис. 2, *b*) есть проекция трех листов, отвечающих классам сопряженности матриц Вейля [1]: нильпотентные классы сопряженности и полупростые классы сопряженности, то есть содержащие диагональные матрицы (рис. 2, *c*).

Над точкой сборки (точкой фазового перехода 2-го рода) лежат три класса сопряженности нильпотентных матриц индексов 1, 2, 3. При этом на каждом листе точке фазового перехода 2-го рода отвечает своя нильпотентная матрица Вейля. Над кривой Нейля – два полупростых класса сопряженности матриц D и II типов, а над остальными точками – по одному полупростому классу (типы I и Ia). Приведенная на рис. 2, *b* диаграмма совпадает с разбиением матриц Вейля на классы по Сингу (см. рис. 1). Необходимо отметить, что наличие классов сопряженности матриц Вейля снимает вырождение, присущее решению задачи на собственные значения в данном случае. Кроме того, введение матриц типа Ia имеет здесь обоснование в виде существования множества Максвелла, при пересечении которого происходит «фазовый» переход 1-го рода, и где потенциальная функция U структурно неустойчива ($q = 0$), то есть критические значения функции совпадают в двух и более точках. В этом смысле структурно неустойчив и тип Ia. Забегая вперед, к этому следует добавить, что все алгебраические типы гравитационных полей (кроме типа I) крайне неустойчивы к малым возмущениям другими типами гравитационных полей как и показано в работах [9, 10], где получены возможные результирующие типы гравитационных полей при конкретных возмущениях с точки зрения алгебраической классификации. Это и понятно, так как такая смена типа поля связана с фазовыми переходами определенного рода.

2. Алгебраическая классификация четырехмерных локально евклидовых пространств

Алгебраическая классификация пространств, впервые построенная А.З. Петровым, применялась и интерпретировалась в основном как классификация гравитационных полей, описываемых общей теорией относительности, использующей псевдориманову метрику. Поэтому было бы небезынтересно применить метод Петрова к классификации локально евклидовых 4-мерных пространств, то есть 4-пространств с метрикой, имеющей сигнатуру $(++++)$. Кроме того, появляется возможность продемонстрировать одно из немногих применений теории двойного переменного.

Двойные переменные представляют собой разновидность гиперкомплексных переменных и записываются в виде (см., например, [11])

$$\zeta = x + \mathrm{e}y, \tag{5}$$

где e – базовая единица двойных переменных, $\mathrm{e}^2 = +1$.

[1]Подобие матриц ($A = TBT^{-1},\ \det T \neq 0$) является отношением эквивалентности на множестве матриц. Определенные этим отношением классы эквивалентности называются классами сопряженности.

При введении двойных переменных обычно считается, что x, y принадлежат полю вещественных переменных, однако из-за трудностей с нахождением радикалов под двойными переменными будем понимать конструкцию (5), но, вообще говоря, x и y будут считаться принадлежащими полю комплексных переменных.

Операция сопряжения вводится как смена знака при e : $\zeta^{\times} = x - \mathrm{e}y$ Квадрат модуля двойного переменного определяется произведением $\zeta\zeta^{\times} = \zeta^{\times}\zeta = x^2 - y^2$, и при $x^2 = y^2 \neq 0$; $\zeta\zeta^{\times} = 0$. При этом корень из этой величины может быть и мнимым (в смысле комплексных переменных). Поэтому, чтобы избежать этого следует различать на плоскости двойного переменного области с $\zeta\zeta^{\times} > 0$ и $\zeta\zeta^{\times} < < 0$, границей которых служит область $\zeta\zeta^{\times} = 0$. Для записи двойных переменных справедлив аналог формулы Эйлера.

Как и для комплексных переменных введем на плоскости двойного переменного квадрат расстояния между двумя точками с координатами (x_1, y_1) и (x_2, y_2) :

$$(\Delta\zeta)\,(\Delta\zeta)^{\times} = (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 = (\Delta l)^2\,. \tag{6}$$

Плоскость с такой метрикой оказывается псевдоевклидовой, а если придать x физический смысл временной координаты, а y – пространственной, то получим пример двумерной плоскости Минковского, на которой выделяются области, разделенные светоподобными линиями, удовлетворяющими условию $|\zeta| = 0$ (двумерный световой конус). Алгебраические операции с двойными переменными аналогичны соответствующим операциям с комплексными величинами. Другими словами, двойные переменные образуют коммутативно-ассоциативную алгебру над полем комплексных величин, однако сами поля не образуют, так как не всегда существует обратный элемент. В дальнейшем примем, что переменные и функции с нулевым модулем исключены из рассмотрения и участия в операциях. Отказ от таких величин означает отказ от работы, в частности, на светоподобных линиях и поверхностях.

Как и при обычной алгебраической классификации пространства-времени, с помощью базовой единицы e и на основе тензора Вейля строится 3×3 бесследовая матрица Вейля W двойных переменных над полем вещественных величин и ставится задача на собственные значения. В результате ее решения приходим к теореме о типах матрицы Вейля для четырехмерных локально евклидовых пространств [12].

Теорема 2. *Существует один и только один основной тип матриц Вейля пространств с сигнатурой* $(++++)$*; в зависимости от собственных значений и векторов этот тип расщепляется на четыре подтипа:* I, $\mathrm{I}a$, D, O.

К подтипу I будем относить пространство, соответствующая матрица Вейля которого имеет различные и не равные нулю собственные значения, представимые в виде двойных переменных над полем вещественных величин: $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq 0$; $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$, $W_{\mathrm{I}} = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Ранг матрицы Вейля равен трем.

Если имеется равное нулю собственное значение (например, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = = -\lambda_3 = \lambda$), то соответствующий подтип пространства (вместе с матрицей Вейля) будем называть подтипом $\mathrm{I}a$: $W_{\mathrm{I}a} = \mathrm{diag}\,(0, \lambda, -\lambda)$; ранг $r = 2$.

Пространства, описываемые матрицами Вейля для случая двойного корня соответствующего характеристического уравнения на двойные переменные, будем называть пространствами подтипа D: $W_{\mathrm{I}} = \mathrm{diag}\,(2\lambda, -\lambda, -\lambda)$. Ранг матрицы равен трем.

Следовательно, при наличии тройного корня реализуется единственный вариант: $W_{\mathrm{O}} = 0$, то есть исследуемое пространство является конформно-плоским. Отнесем такое пространство к подтипу O. Необходимо подчеркнуть, что здесь

отсутствуют волновые подтипы, а все подтипы, на которые разбивается двойная матрица Вейля, относятся к одному типу T_1 по Петрову.

Характеристическое уравнение в данном случае есть условие экстремума «потенциальной» функции, формально совпадающей с (2) и задающей катастрофу сборки в пространстве двойных переменных [12]. Однако, в отличие от описания гравитационных полей, кубической параболе Нейля (дискриминант кубического уравнения равен нулю) соответствует только тип D, точке сборки (трижды вырожденная точка) – тип O, а множеству Максвелла – тип Ia. Другими словами, здесь существует лишь один лист, отвечающий классам сопряженности матриц Вейля.

Как и при рассмотрении гравитационных полей, для локально евклидовых пространств в плоскости управляющих параметров (p, q) переходы между подтипами: $\mathrm{D} \to 0$, $\mathrm{I}a \to 0$, аналогичны фазовым переходам 2-го рода и сопровождаются скачками рангов соответствующих матриц Вейля (подтип O представляет собой наиболее симметричную «фазу»), а пересечение множества Максвелла отвечает фазовому переходу 1-го рода [12].

При введении комплексно-мнимой переменной $x^0 \to ix^0$ получаем 4-мерное пространство-время, а построенная классификация переходит в известную алгебраическую классификацию Петрова гравитационных полей.

3. Светоподобные источники, алгебраическая классификация и фазовые переходы

В классической электродинамике существует задача о нахождении предельного поля равномерно движущегося электрического заряда (см., например, [13]) при стремлении скорости заряда к скорости света с точки зрения покоящегося инерциального наблюдателя. В этом случае электромагнитное поле заряда в пределе приобретает свойства плоской монохроматической электромагнитной волны (то есть все собственные значения тензора электромагнитного поля вырождаются в нулевые).

В общей теории относительности подобная задача рассматривалась в [14] для гравитационного поля быстродвижущейся частицы на уровне 6×6 симметричной матрицы Петрова (6×6 матрицы кривизны), соответствующей внешнему полю Шварцшильда в собственной системе отсчета.

В обоих случаях собственные значения как тензора электромагнитного поля, так и матрицы Петрова стремятся к бесконечности в направлении, перпендикулярном к направлению движения, когда скорость частицы V приближается к скорости света, принятой здесь, наряду с гравитационной ньютоновской постоянной G_N, за единицу: $V \to c = 1$.

Однако корректное математическое решение двух упомянутых выше проблем связано с использованием обобщенных функций (δ-функций Дирака) [4, 15] в предельном переходе, суть которого состоит в том, что величина скорости V частицы устремляется к скорости света c, а масса покоя частицы устремляется к нулю ($m_0 \to 0$) так, чтобы полная релятивистская энергия частицы оставалась постоянной: $E = \mathrm{const}$. Такую процедуру предельного перехода будем называть светоподобным пределом.

Распространяя описанную предельную процедуру на ряд частицеподобных источников в общей теории относительности, можно получить решения уравнений тяготения, описывающие классические светоподобные сингулярные безмасссовые источники как скалярного, так и векторного типов: лайтоны (*lightons*) и геликсоны

(*helixons*). При этом в результате применения вышеупомянутой процедуры к частицеподобным источникам не все физические параметры, присущие этим частицам, сохраняются в предельном случае. В дальнейшем будем использовать понятие матрицы Вейля как симметричной бесследовой 3×3 комплексной матрицы Петрова в евклидовом 3D-пространстве.

Аналогичную предельную процедуру на уровне собственных значений матрицы Вейля будем называть далее *светоподобным пределом на уровне матрицы Вейля*. Такой светоподобный предел может быть описан как катастрофа сборки.

Прежде всего рассмотрим внешнее гравитационное поле Шварцшильда покоящейся массивной частицы, которое принадлежит к алгебраическому типу D по классификации Петрова–Пенроуза с матрицей Вейля

$$W_{\mathrm{D}} = \frac{m_0}{r_0^3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Здесь W_{D} – каноническая бесследовая матрица Вейля типа D по алгебраической классификации Петрова, m_0 – масса покоя частицы, r – радиальная переменная: $r_0^2 = x^2+y^2+z^2$, переменные x, y, z суть декартовы координаты в 3-пространстве. Пусть теперь эта частица будет двигаться с некоторой скоростью V вдоль оси z. Применим к матрице Вейля (7) преобразования Лоренца, которые в данном случае описываются ортогональной 3×3 матрицей

$$T = \begin{pmatrix} \cosh\psi & -i\sinh\psi & 0 \\ i\sinh\psi & \cosh\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

удовлетворяющей условиям: $T^{-1}T = \widetilde{T}T = TT^{-1} = T\widetilde{T} = 1$, $\det T = +1$, транспонированная матрица $\widetilde{T} = T^{-1}$; $i^2 = -1$, $\cosh\psi = (1-V^2)^{-1/2}$, $\sinh\psi = V(1-V^2)^{-1/2}$ (тильдой обозначена операция транспонирования матрицы). Переход $V \to 1$ соответствует пределу $\psi \to \infty$. Тогда в покоящейся системе отсчета для гравитационного поля массивной частицы на уровне матрицы Вейля можно записать

$$W = TW_{\mathrm{D}}T^{-1} = \frac{E\varepsilon^2}{R^3} W(\varepsilon), \tag{9}$$

где $\varepsilon = (1-V^2)^{1/2}$, $E = m_0/\varepsilon$ – полная энергия частицы, $E = \mathrm{const}$, $R^2 = \rho^2\varepsilon^2 + (z+Vt)^2$, $\rho^2 = x^2+y^2$. Матрица Вейля $W(\varepsilon)$ имеет следующий вид:

$$W(\varepsilon) = \varepsilon^2 C_{\mathrm{D}} + 3(W_{\mathrm{N}}^{(E)} + iV \cdot W_{\mathrm{N}}^{(B)}), \tag{10}$$

где C_{D} – матрица Вейля алгебраического типа D,

$$C_{\mathrm{D}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Матрица «электрического» типа W_{N}^E и матрица «магнитного» типа W_{N}^B суть две части матрицы Вейля алгебраического типа N,

$$W_N = W_N^{(E)} + iW_N^{(B)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{12}$$

отвечающей поперечно-поперечной плоской гравитационной волне, распространяющейся вдоль оси z.

Перейдем к нахождению предельного вида матрицы Вейля (9), введя обозначения $\xi = z + Vt$ для «текущей» переменной и $\eta = z + t$ для опережающего времени, хотя это чисто условно, так как выбор знака связан с выбором направления движения частицы относительно покоящегося наблюдателя, то есть со сменой направления движения.

Физическая суть рассматриваемого предельного перехода заключается в том, что скорость V в каждый момент времени остается постоянной, хотя и изменяется как параметр. Другими словами, имеется бесконечная последовательность инерциальных систем отсчета, движущихся друг относительно друга с постоянными скоростями так, что каждая последующая система отсчета движется относительно предыдущей с большей по величине скоростью. Изменяя параметр V, мы просто меняем систему отсчета, в которой находится частица. Наша задача заключается в том, чтобы выяснить, что произойдет, когда скорость частицы совпадет со скоростью света. При этом следует иметь в виду, что увеличение скорости может приводить к изменению (в том числе и в сторону возрастания) физических характеристик частицы. Это означает, что, наряду с пределом $V \to 1$, требуется ввести дополнительные предельные ограничения на эти физические характеристики. В частности, при рассмотрении предельного перехода в (9) вместе с предельным переходом $\varepsilon \to 0\,(V \to 1)$ потребуем, чтобы масса покоя частицы стремилась к нулю $(m_0 \to 0)$ так, чтобы полная энергия $E = m_0/\varepsilon$ при таком светоподобном предельном переходе оставалась постоянной.

Другой особенностью этого предельного перехода является необходимость исследования не только вопроса о наличии обычного предела при $V \to 1$, но и предела в смысле обобщенных функций, то есть нужно выяснить, существует ли отличный от нуля предел интеграла от исследуемой функции на всем бесконечном интервале изменения переменной V. Тогда можно говорить, что подынтегральная функция имеет своим пределом обобщенную функцию, частным случаем которой является известная δ-функция Дирака.

Рассмотрим предел следующего интеграла при $\varepsilon \to 0$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^2(\xi^2 + \varepsilon^2\rho^2)^{-3/2}\, d\xi, \tag{13}$$

который оказывается равным $2/\rho^2$. Обычный предел подынтегральной функции равен нулю.

Следовательно, полный предел подынтегральной функции может быть записан как

$$\lim_{\varepsilon\to 0} [\varepsilon^2(\xi^2 + \varepsilon^2\rho^2)^{-3/2}] = \frac{2}{\rho^2}\,\delta(\eta) = \frac{2}{x^2 + y^2}\,\delta(z + t). \tag{14}$$

Учитывая этот результат и факт постоянства полной энергии при светоподобном пределе, получаем в (9):

$$\frac{E\varepsilon^2}{R^3} \to \frac{2E}{\rho^2}\,\delta(z + t). \tag{15}$$

Тогда светоподобный предел матрицы Вейля (10) $W(\varepsilon)$ будет равен $3W_{\mathrm{N}}$, то есть в пределе получаем матрицу Вейля плоской гравитационной волны.

В конечном итоге светоподобный предел матрицы Вейля (9) движущейся массивной частицы может быть представлен как [15]

$$W = \frac{6}{\rho^2}\,\delta(z + t)W_N, \tag{16}$$

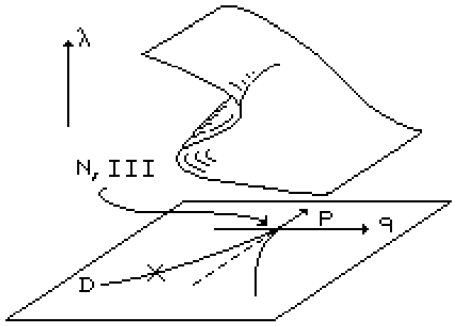

Рис. 3. Поверхность катастрофы сборки и ее проекция на плоскость управляющих параметров p и q

а скалярную светоподобную безмассовую частицу, гравитационное поле которой описывается такой сингулярной матрицей Вейля, будем называть лайтоном [16, 17].

С точки зрения теории катастроф введенный выше светоподобный предел на уровне матрицы Вейля представляет собой одну из семи элементарных катастроф – катастрофу сборки.

Для исследуемого случая на рис. 3 изображена поверхность катастрофы сборки и ее проекция на плоскость управляющих параметров (p, q). Точка сборки $(p = q = 0)$ в нашем случае это точка фазового перехода второго рода гравитационного поля из алгебраического типа D в алгебраический тип N (переход из одной «фазы» в другую). Алгебраические типы по Петрову суть различные «фазы» гравитационного поля (см., например, [18]).

Равенство нулю дискриминанта характеристического кубического уравнения задает полукубическую параболу, отвечающую матрице Вейля типа D. Рассматриваемый здесь случай отмечен на рис. 3 крестиком $(q < 0)$.

Характеристическое уравнение имеет три корня: $\lambda_1 = \lambda_3 = -\lambda_2/2 = -\varepsilon^2$, при этом значения потенциальной функции U суть $U(\lambda_1) = U(\lambda_3) = p^2/12$ и $U(\lambda_2) = -2p^2/3$. В точке сборки можно наблюдать скачки вторых производных $\Delta(\partial^2 U/\partial p^2) = 1/6$ и $\Delta(\partial^2 U/\partial p^2) = -4/3$, которые соответствуют скачку ранга матрицы Вейля с $r = 3$ (D-тип) до $r = 1$ (N-тип), где через Δ обозначен скачок значения второй производной потенциальной функции U.

При применении процедуры светоподобного предела $(\varepsilon \to 0, V \to 1)$ собственные значения стремятся к нулю: $\lambda_i \to 0, i = 1, 2, 3$. Матрица Вейля (9) имеет два собственных вектора X_1 и X_2. Первый собственный вектор X_1 отвечает собственному значению λ_2 и стремится к светоподобному собственному вектору $\widetilde{X}_1 = (-i(1-\varepsilon^2)^{-1/2}, 1, 0) \to \widetilde{L}$ матрицы типа N, так что выполняется предельное уравнение на собственные значения $W_{\mathrm{N}} L = 0$. Второй собственный вектор $\widetilde{X}_2 = (0, 0, 1)$ также является собственным вектором матрицы Вейля N типа $W_{\mathrm{N}} X_2$ [18].

С другой стороны, шварцшильдоподобная предельная метрика в данном случае может быть представлена в форме Керра–Шилда [15, 18, 19]

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} - 8 H l_\mu l_\nu, \tag{17}$$

где $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$; $\delta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$ – метрический тензор пространства-времени Минковского; $H = -2E\delta(z + t)\ln(x^2 + y^2)$; $l_\mu = \delta^0_\mu + \delta^3_\mu$; $l_\mu l^\mu = 0$.

Метрика (17) описывает точечный сингулярный светоподобный источник и является точным решением точных волновых уравнений Эйнштейна [15, 18, 19]

$$\Box g_{\mu\nu} = -8\pi T_{\mu\nu}, \tag{18}$$

где $\Box$ – оператор Д'Аламбера, $T_{\mu\nu} = 2E\delta(z+t)\delta(x)\delta(y)l_\mu l_\nu$ – тензор энергии-импульса сингулярного светоподобного источника.

Полученная предельная метрика (17) имеет два вектора Киллинга: светоподобный вектор $\xi_L = (\partial/\partial t + \partial/\partial z)$ и пространственноподобный вектор $\xi_Z = (x\partial/\partial y - -y\partial/\partial x)$, который задает аксиальную симметрию и в полярных координатах равен $\partial/\partial\varphi$.

Шварцшильдоподобное решение обладает четырьмя векторами Киллинга: времениподобный вектор $\xi_T = \partial/\partial t$ и три пространственноподобных вектора: $\xi_X = = (y\partial/\partial z - z\partial/\partial y)$, $\xi_Y = (z\partial/\partial x - x\partial/\partial z)$, $\xi_Z = (x\partial/\partial y - y\partial/\partial x)$. Применяя далее преобразования Лоренца к этим векторам и затем процедуру светоподобного предела, получаем, что вектор ξ_Z оказывается инвариантным, а векторы $L\xi_T$, $L\xi_X$, $L\xi_Y$ вырождаются в светоподобный вектор [18, 19].

Следовательно, светоподобный предел массивной частицы может быть описан как катастрофа сборки на уровне матрицы Вейля (рис. 3), что соответствует фазовому переходу второго рода (смена алгебраического типа пространства-времени) и изменению пространственной симметрии гравитационного поля такого источника: от сферической к аксиальной.

С другой стороны, наличие δ-образной сингулярности матрицы Вейля $\boldsymbol{N}$ типа и анализ предельной метрики указывают на то, что гравитационное поле точечной шварцшильдоподобной частицы трансформируется в поле точечного безмассового источника, движущегося со скоростью света, а уравнения тяготения для такого поля преобразуются в волновое уравнение с сингулярным источником (тензором энергии-импульса) светоподобного излучения. Все это позволяет утверждать, что мы имеем дело со скалярной светоподобной безмассовой частицей, которую назовем лайтоном.

Другим известным решением является решение Ньюмена, Унти и Тамбурино (НУТ) [20, 21], описывающее внешнее статическое сферически симметричное гравитационное поле типа D островного источника, обладающего, наряду с обычной массой движения m, еще и дуальной массой b, представляющей собой гравитационный аналог магнитного монополя. При $b = 0$ решение НУТ переходит в известное решение Шварцшильда. Здесь к описанной светоподобной процедуре добавляется то, что новый параметр $B = b/\varepsilon$ также остается постоянным. В итоге предельная метрика будет описывать гравитационное поле волнового алгебраического типа N, но без параметра НУТ [22].

Как и в случае со шварцшильдовской частицей, здесь мы имеем светоподобный предел матрицы Вейля как катастрофу с точки зрения задачи на собственные значения. Точка сборки ($p = q = 0$) есть точка фазового перехода гравитационного поля решения НУТ от алгебраического типа D к вырожденному типу N (рис. 3). Во время процедуры светового предела также наблюдается изменение симметрии гравитационного поля, а векторы Киллинга решения НУТ вырождаются в светоподобные векторы Киллинга [23]. Таким образом, светоподобный предел массивной НУТ-частицы может быть описан как катастрофа сборки на уровне матрицы Вейля с изменением симметрии гравитационного поля такого источника и потерей НУТ-параметра. Следовательно, и в этом случае мы получаем скалярную светоподобную безмассовую частицу – лайтон.

Внешнее гравитационное поле массивной частицы со спином (то есть частицы, имеющей собственный момент импульса) описывается известным решением Керра [24], принадлежащего к алгебраическому типу D. В этом случае процедура

светоподобного предела дополняется требованием, чтобы z-компонента керровского момента импульса L_Z в результате такого предельного перехода преобразовывалась по правилу $L_Z = a \cdot m_0 \to J \cdot E$, где $a = L_Z/m_0$ – керровский приведенный момент импульса (собственный момент импульса на единицу массы покоя), J – предел приведенного момента импульса в результате применения светоподобного предела, $J = \mathrm{const}$.

Процедура светоподобного предельного перехода, примененная к матрице Вейля решения Керра, приводит к предельному выражению

$$W \to \frac{3}{\rho^2}\delta(z+t)\left(2E\begin{pmatrix}1 & -i & 0\\ -i & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} + \frac{\pi J}{2\rho}\sin\theta\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & i\\ -1 & i & 0\end{pmatrix}\right). \qquad (19)$$

Получившаяся матрица относится к алгебраическому типу III (волновому типу с продольной составляющей). Как и для случаев со шварцшильдовской и НУТ-частицами, светоподобный предел матрицы Вейля решения Керра есть катастрофа с точки зрения проблемы на собственные значения. В рассматриваемом случае точка сборки представляет собой точку фазового перехода гравитационного поля из типа D в тип III (рис. 3).

Светоподобный предел соответствующей метрики Керра имеет только два вектора Киллинга: светоподобный вектор $\xi_L = (\partial/\partial t + \partial/\partial z)$ и пространственноподобный аксиальный вектор $\xi_Z = \partial/\partial\varphi$ в полярных координатах. Решение же Керра имеет следующие два вектора Киллинга: времениподобный $\xi_T = \partial/\partial t$ и пространственноподобный аксиальный $\xi_Z = \partial/\partial\varphi$.

Применение лоренцевского буста к векторам Киллинга решения Керра вместе с процедурой светоподобного предела дает $\xi_Z \to \xi_Z$, $\xi_T \to \xi_L$. В итоге светоподобный предельный переход для керровской частицы может быть описан как катастрофа сборки с изменением симметрии гравитационного поля такого источника. Что касается собственного момента импульса керровской частицы, движущейся вдоль оси z, то при упомянутом предельном переходе остается только z-компонента спина частицы (положительная или отрицательная компоненты относительно направления движения) или спиральность $L_Z = \pm JE$ [19, 25]. Соответствующую векторную светоподобную безмассовую частицу со спиральностью назовем геликсоном. Если же керровский приведенный момент импульса $a = L_Z/m_0$ строго перпендикулярен направлению движения частицы (оси z), то при светоподобном предельном переходе предельный приведенный момент импульса J исчезает и получаем результат, совпадающий с предельным переходом для шварцшидоподобной частицы [6, 19, 19, 25], то есть в пределе имеем скалярную светоподобную безмассовую частицу – лайтон.

Заключение

В работе показана связь алгебраической классификации Петрова гравитационных полей с теорией катастроф как обобщенной теорией фазовых переходов на уровне тензора кривизны (тензора Вейля). Фазами субстанции выступают алгебраические типы пространств, а параметром порядка – инварианты тензора кривизны. Одна из основных катастроф – катастрофа сборки – является с физической точки зрения фазовым переходом 2-го рода. Показано, что при классификации четырехмерных локально евклидовых пространств методом Петрова такая классификация возможна путем привлечения двойных переменных как разновидности гиперкомплексных переменных. При этом также наблюдается связь с теорий катастроф. Конкретная демонстрация теории гравитационных фазовых переходов

2-го рода проведена на примерах рассмотрения светоподобных пределов частицоподобных решений уравнений гравитационного поля: Шварцшильда, Керра и НУТ. Обнаружено, что при таких переходах меняется не только алгебраический тип гравитационных полей (с типа D на волновые типы N и III), но и их симметрия. Полученные при таком предельном переходе светоподобные частицы названы лайтонами и геликсонами в зависимости от наличия или отсутствия у них спиральности.

Summary

A.M. Baranov. The Petrov Algebraic Classification and Phase Transitions in Gravitational Fields.

This article shows the connection of the Petrov algebraic classification of gravitational fields with the theory of catastrophes as a generalized theory of phase transitions. We demonstrate the analogy between the transitions of the algebraic types of space-times and the phase transitions at the curvature tensor level (Weyl's matrices level) by the examples of the Petrov classification, the algebraic classification of four-dimensional local Euclidean spaces, and the derivation of the gravitational fields of lightlike sources.

Key words: Petrov algebraic classification, gravitational fields, catastrophe theory, phase transitions, lightlike sources, lighton, helixon.

Литература

1. *Петров А.З.* О пространствах, определяющих поля тяготения // Докл. АН СССР. – 1951. – Т. 81, № 2. – С. 149–152.
2. *Петров А.З.* Классификация пространств, определяющих поля тяготения // Учен. зап. Казан. ун-та. – 1954. – Т. 114, кн. 8. – С. 55–69.
3. *Петров А.З.* Новые методы в общей теории относительности. – М.: Наука, 1966. – 495 с.
4. *Мицкевич Н.В., Баранов А.М., Луговцов В.В.* Композиция типов пространств по классификации Петрова // Материалы докл. IV Всесоюз. конф. «Современные теоретические и экспериментальные проблемы теории относительности и гравитации». – Минск, 1976. – С. 195–200.
5. *Баранов А.М., Луговцов В.В., Мицкевич Н.В.* Композиция пространств второго вырожденного типа по Петрову // Тез. докл. Всесоз. науч. конф. по неевклид. геометрии «150 лет геометрии Лобачевского» (Казань). – М.: Изд-во ВИНИТИ, 1976. – С. 21.
6. *Szekeres P.* The Gravitational Compass // J. Math. Phys. – 1965. – V. 6, No 9. – P. 1387–1391.
7. *Baranov A.M.* Catastrophe theory and algebraic classification of gravitational and electromagnetic fields // Abstr. of Contributed Papers of 10th Int. Conf. on GRG. – Padova, Italy, 1983. – V. 1. – P. 174–175.
8. *Баранов А.М.* Теория катастроф и алгебраическая классификация Петрова // Сб. тез. юбил. науч. конф. физ. фак-та КГУ (200 лет Казан. ун-ту, Казань, ноябрь 2004 г.). – Казань, 2004. – С. 107.
9. *Баранов А.М., Мицкевич Н.В.* О композиции пространств в общей теории относительности. – М.: Ун-т дружбы народов им. П. Лумумбы, 1976. – 15 с. – Деп. в ВИНИТИ 13.07.76, № 2628-76.
10. *Баранов А.М.* Возмущения пространств и классификация Петрова. – М.: Ун-т дружбы народов им. П. Лумумбы, 1976. – 8 с. – Деп. в ВИНИТИ 13.07.76, № 2632-76.

11. *Розенфельд Б.А.* Многомерные пространства. – М.: Наука, 1966. – 647 с.

12. *Баранов А.М.* Алгебраическая классификация четырехмерных локально евклидовых пространств // Изв. вузов. Физика. – 1994. – № 11. – С. 90–95.

13. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика: в 10 т. Т. 2: Теория поля. – М.: Наука, 1988. – 509 с.

14. *Pirani F.A.E.* Gravitational Waves in General Relativity. 1V. The Gravitational Field of a Fast-movinig Particle // Proc. R. Soc. L. A. – 1959. – V. 252. – P. 96–101.

15. *Баранов А.М.* Гравитационные поля «светоподобных» источников. – М.: Ун-т дружбы народов им. П. Лумумбы, 1976. – 12 с. – Деп. ВИНИТИ 13.07.76, № 2631-76.

16. *Баранов А.М.* Светоподобные источники в общей теории относительности // Вестн. Краснояр. гос. ун-та. Физ.-матем. науки. – 2005. – № 7. – С. 44–54.

17. *Baranov A.M.* Gravitational fields of lightons and helixons in General Relativity // Grav. Cosmol. – 2006. – V. 12, No 2–3. – P. 100–102.

18. *Баранов А.М.* Светоподобный предел шварцшильдоподобного источника как катастрофа // Гравитация и электромагнетизм. – Минск: Университетское, 1992. – Вып. 5. – С. 27–31.

19. *Баранов А.М.* Светоподобный предел решения Керра и конструирование поля светоподобной нити // Изв. вузов. Физика. – 1994. – № 10. – С. 64–69.

20. *Newman E., Tamburino L., Unti T.* Empty-Space Generalization of the Schwarzschild Metric // J. Math. Phys. – 1963. – V. 4, No 7. – P. 915–923.

21. *Misner S.W.* The Flatter Regions of Newman, Unti and Tamburino's Generalized Schwarzschild Space // J. Math. Phys. – 1963. – V. 4, No 7. – P. 924–937.

22. *Баранов А.М.* Светоподобный предел источника НУТ // Гравитация и теория относительности. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1987. – Вып. 24. – С. 11–19.

23. *Baranov A.M.* Lightlike Limits of NUT and Kerr Solutions as catastrophes // Тез. докл. Междунар. конф. «Геометризация физики III». – Казань: Хэтер, 1997. – С. 4–5.

24. *Kerr R.P.* Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metric // Phys. Rev. Lett. – 1963. – V. 11, No 5. – P. 237–238.

25. *Baranov A.M.* Lightlike spinning source // Abstr. of Contributed Papers of 9th Int. Conf. on GRG. – Jena, GDR, 1980. – V. 1. – P. 6.

Поступила в редакцию
19.06.11

Баранов Александр Михайлович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической физики Сибирского федерального университета, г. Красноярск.

E-mail: *alex_m_bar@mail.ru*