Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования

КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

КАФЕДРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Направление: 01.03.01 – Математика

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

(Бакалаврская работа)

Некоторые классы сингулярных интегральных уравнений с тремя ядрами разрешимых в замкнутой форме.

Работа завершена:
«____»______________2015 г. ______________Э.Ф. Садыкова

Работа проверена:
Научный руководитель
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры дифференциальных уравнений
«____»______________2015 г. ______________С.Н. Киясов

Заведующий кафедрой дифференциальных уравнений
доктор физико-математических наук, профессор
«____»______________2015 г. ______________А. М. Елизаров

Казань – 2015 г.

Содержание

Введение

Задача линейного сопряжения для n - мерного вектора

Пусть Γ - простой гладкий замкнутый контур, разбивающий плоскость комплексного переменного на две области D^+ и D^- $(0 \in D^+, \infty \in D^-)$.

$$G(t) = \begin{pmatrix} g_{11}(t) & g_{12}(t) & g_{13}(t) \\ g_{21}(t) & g_{22}(t) & g_{23}(t) \\ g_{n1}(t) & g_{n2}(t) & g_{33}(t) \end{pmatrix} \tag{1}$$

$-$H-непрерывная и неособенная на Γ матрица-функция порядка $3(\Delta(t) = detG(t) \neq 0, t \in \Gamma), \mathbf{g(t)} = (g^1(t), g^2(t), g^3(t))-$ вектор-функция класса $H(\Gamma)$. Задача линейного сопряжения для 3 - мерного вектора состоит в отыскании кусочно-аналитической функции

$$\mathbf{w}(z) = (w^1(z), w^2(z), w^3(z))$$

с H - непрерывными на Γ предельными значениями $\mathbf{w}^{\pm}(z))$, связанными условием

$$\mathbf{w}^+(t) = G(t)\mathbf{w}^-(t) + \mathbf{g}(t). \tag{2}$$

Если вектор-функция $\mathbf{g(t)} \equiv 0$ на Γ, получим однородную задачу линейного сопряжения

$$\mathbf{w}^+(t) = G(t)\mathbf{w}^-(t), t \in \Gamma. \tag{3}$$

Совокупность $n = 3$ решений однородной задачи (3)

$$\mathbf{w}_{\kappa_\mathbf{1}}(z), \mathbf{w}_{\kappa_\mathbf{2}}(z, \mathbf{w}_{\kappa_\mathbf{3}}(z), \tag{4}$$

имеющие на бесконечности порядки $-\kappa_1, -\kappa_2, -\kappa_3$ соответственно (положительный порядок означает порядок полюса), называется *канонической системой решений* этой задачи, если выполняются следующие условия ([1], с. 30-31) :

1. Определитель матрицы

$$X(z) = \begin{pmatrix} w^1_{\kappa_1}(z) & w^1_{\kappa_2}(z) & w^1_{\kappa_3}(z) \\ w^2_{\kappa_1}(z) & w^2_{\kappa_2}(z) & w^2_{\kappa_3}(z) \\ w^3_{\kappa_1}(z) & w^3_{\kappa_2}(z) & w^3_{\kappa_3}(z) \end{pmatrix} \tag{5}$$

не обращается в нуль на конечном расстоянии.

2. Определитель $\Delta^0(z) = det\|z^{\kappa j} w^i_{\kappa j}(z)\|, i, j = \overline{1, m}$ принимает на бесконечности конечное значение, отличное от нуля.

Матрица (5) называется *канонической матрицей* однородной задачи линейного сопряжения (3) . Легко видеть, что для канонической матрицы на Γ выполняется тождество

$$X^{+}(t) = G(t)X^{-}(t),$$

в силу которого приходим к представлению

$$G(t) = X^{+}(t)[X^{-}(t)]^{-1}, \Delta(t) = detG(t) = \frac{\Delta^{+}(t)}{\Delta^{-}(t)}, t \in \Gamma \tag{6}$$

В представлении (6) через $\Delta^{+}(z)$ и $\Delta^{-}(z)$ обозначены определители матриц $X^{+}(z)$ и $X^{-}(z)$ соответственно.

Целые числа $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ по канонической системе решений (4) определяются однозначно и называются *частными индексами*, а их сумма $\kappa = \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 = ind\ detG(t)-$ *суммарным индексом* матрицы-функции (1) (индекс Коши $detG(t)$).

В дальнейшем, не ограничивая общности, будем предполагать, что частные индексы упорядочены по убыванию, то есть выполняются неравенства

$$\kappa_1 \geqslant \kappa_2 \geqslant \kappa_3. \tag{7}$$

Тогда любая другая каноническая матрица $\tilde{X}(z)$ получается из канонической матрицы (5) по формуле

$$\tilde{X}(z) = X(z)P(z), \tag{8}$$

в которой $P(z)$ - полиномиальная матрица с постоянным определителем общий вид которой определен в ([1] ,с.35]) . Если в (7) выполняются строгие неравенства, матрица $P(z)$ имеет вид

$$P(z) = \begin{pmatrix} p_0^1 & p^1_{\kappa_1-\kappa_2}(z) & p^1_{\kappa_1-\kappa_3}(z) \\ 0 & p_0^2 & p^2_{\kappa_2-\kappa_3}(z) \\ 0 & 0 & p_0^3 \end{pmatrix} \tag{9}$$

в котором $p^i_m(z), i = \overline{1,3}$ -произвольные полиномы степени $m \geqslant 0$.

Если для совокупности $n = 3$ решений задачи (3) $\mathbf{w_{k_1}}(z), \mathbf{w_{k_2}}(z), \mathbf{w_{k_3}}(z)$, имеющиих на бесконечности порядки $-k_1, -k_2, -k_3$ соответственно, выполняется лишь первое свойство канонической системы решений, то эти решения образуют *нормальную систему решений*, а составленная из их компонент матрица $X(z)$ называется *нормальной матрицей* однородной задачи линейного сопряжения (3) . Имеет место следующее предложение (см. , например,[4]) .

Предложение 1. *Если построена нормальная система решений однородной задачи линейного сопряжения, то каноническую систему решений можно построить эффективно.*

При этом, оответствующая каноническая матрица $\tilde{X}(z)$ будет иметь вид (8) , в котором $P(z)$ - некоторая полиномиальная матрица с постоянным определителем, "понижающая"порядки столбцов нормальной матрицы $X(z)$ суммарно на $-k_1 - k_2 - k_3 + \kappa$ единиц.

Каноническая система решений (4) позволяет записать любое кусочно - аналитическое решение задачи (3) , имеющее на бесконечности заданный порядок k (при $k > 0$ допускающее полюс на бесконечности) по формуле

$$\mathbf{w}(z) = p_{\kappa_1+k}(z)\mathbf{w}_{\kappa_1}(z) + p_{\kappa_2+k}(z)\mathbf{w}_{\kappa_2}(z) + p_{\kappa_3+k}(z)\mathbf{w}_{\kappa_3}(z), \tag{10}$$

где $p_{\kappa_i+k}(z), i = \overline{1,3}$ - произвольные полиномы степени не выше $\kappa_i + k$, которые следует положить равными тождественному нулю, если $\kappa_i + k < 0$. При $k = -1$. формула (10) определит все решения однородной задачи линейного сопряжения, исчезающие на бесконечности.

По канонмческой матрице однородной задачи (3) решение неоднородной задачи (2) может быть записано в виде

$$\mathbf{w}(z) = \frac{X(z)}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{[X^+(\tau)]^{-1}\mathbf{g}(\tau)}{\tau - z}\, d\tau + X(z)\mathbf{p}(z) \tag{11}$$

([1] ,c. 49]) . В этой формуле компонентами вектора $\mathbf{p}(z)$ являются некоторые полиномы, степени которых определяются порядком решения на бесконечности как в (10) , поэтому второе слагаемое в (1.11) является решением однородной задачи (3) , а на вектор-функцию $\mathbf{g}(t)$ накладываются, если это необходимо, условия принадлежности первого слагаемого (11) искомому классу решений - *условия разрешимости* задачи, которые получаются как условия равенства нулю соответствующих коэффициентов разложения на бесконечности вектор-функции

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{[X^+(\tau)]^{-1}\mathbf{g}(\tau)}{\tau - z}\, d\tau = -\sum_{j=0}^{\infty}\int_\Gamma [X^+(\tau)]^{-1}\mathbf{g}(\tau)\tau^j\, d\tau \frac{1}{z^{j+1}}.$$

Однородная задача линейного сопряжения

$$\mathbf{v}^+(t) = F(t)\mathbf{v}^-(t), t \in \Gamma. \tag{12}$$

с матрицей-функцией

$$F(t) = G^{'-1}(t), t \in \Gamma \tag{13}$$

(обратная к транспонированной) называется *союзной* с задачей (3) . Согласно представлению (6) , если $X(z)$- каноническая матрица задачи линейного сопряжения (3) , то матрица $X^{'-1}(t)$ будет канонической матрицей союзной задачи (13) с частными индексами $-\kappa_1, -\kappa_2 - \kappa_3$ и суммарным индексом $-\kappa$.

В современной литературе задача построения канонической матрицы Н-непрерывнолй и обратимой на Γ матрица-функция $G(t)$ формулируется в виде следующей эквивалентной факторизационной задачи: требуется получить на Γ представление

$$G(t) = G^{+}(t)\Lambda(t)G^{-}(t), t \in \Gamma, \tag{14}$$

в котором $G^{\pm}(t)-$ Н-непрерывные и обратимые матрицы-функции, аналитически продолжимые вместе с $[G^{\pm}(t)]^{-1}$ в области $D^{\pm}$ соответственно,а $\Lambda(t) = diag\{t^{\lambda_1}, t^{\lambda_2}, t^{\lambda_3}\}$. Целые числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ называются *левыми факторизационными индексами* матрицы-функции $G(t)$, множители $G^{\pm}(t)$ и $\Lambda(t)$ соответственно *крайними и средним факторизационными множителями*,а само представление (14) -*левой факторизацией Винера-Хопфа.* Левые факторизационные индексы называют также *левыми частными индексами* матрицы-функции $G(t)$.

Аналогично определяется *правая факторизация Винера-Хопфа* $G(t)$:

$$G(t) = G_1^{-}(t)\Lambda_1(t)G_1^{+}(t), t \in \Gamma,$$

$\Lambda_1(t) = diag\{t^{\mu_1}, t^{\mu_2}, t^{\mu_3}\}, \mu_1, \mu_2, \mu_3$ -*правые факторизационные индексы (правые частные индексы* матрицы-функции $G(t)$) .

Очевидно, что левая факторизация Винера-Хопфа матрицы-функции $G(t)$ переходит для матриц-функций $G^{'}(t)$ и $G^{-1}(t)$ в соответствующую правую факторизацию и обратно. При этом $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = \kappa$

Всюду в дальнейшем под факторизацией матрицы-функции $G(t)$ будем понимать левую факторизацию Винера-Хопфа, а ее левые частные индексы называть частными индексами $G(t)$.

Кроме того, иногда нам будет удобно под факторизацией $G(t)$ понимать ее представление в виде

$$G(t) = G^{+}(t)G^{-}(t), t \in \Gamma, \tag{15}$$

где $G^{\pm}(t)$ - предельные значения из соответствующих областей некоторой матрицы- функции $G(z)$, элементы которой кусочно-аналитические и могут иметь на бесконечности полярную особенность, $detG(z) \neq 0$ в конечной части плоскости, а на бесконечности порядок $detG^{-}(z)$ равен сумме порядков $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ строк матрицы-функции $G^-(z)$ - частных индексов $G(t)$. Это определение факторизации по форме отличается от определения факторизации Винера-Хопфа тем, что здесь не выделяется средний диагональный множитель $diag\{t^{\kappa_1}, t^{\kappa_2}, t^{\kappa_3}\}$ и по содержанию ближе к понятию канонической матрицы (5):

$$X(z) = G^+(z), z \in D^+; [G^-(z)]^{-1}, z \in D^-.$$

Если на бесконечности сумма порядков строк $detG^-(z)$ больше порядка на бесконечности самого определителя, то будем называть такое представление матрицы-функции $G(t)$ нормальным представлением, в силу того, что соответствующая матрица $X(z)$ будет нормальной матрицей однородной задачи линейного сопряжения (3) . Переход от нормального представления (15) к факторизации сводится к умножению матрицы-функции $G^-(z)$ слева на матрицу $P(z)$, а $G^+(z)$ - справа на $P^{-1}(z)$, где $P(z)$ - полиномиальная матрица с постоянным определителем такая, что суммарный порядок строк на бесконечности матрицы-функции $P(z)G^-(z)$ равен κ.

Сингулярные интегральные уравнения с n ядрами.

В работе [1] был рассмотренно на Γ класс сингулярных интегральных уравнений вида:

$$K\psi(t) \equiv a_0(t)\psi(t) + a_1(t)S[k_1\psi](t) + ... + a_n(t)S[k_n\psi](t) = f(t), \qquad (16)$$

в котором $a_0(t), a_i(t), k_i(t),\ i = 1, n-$ Н-непрерывные функции точек контура,а через $S[\omega](t)$ обозначен сингулярный оператор. Если при $i \neq j, i, j = \overline{1, n}, a_i(t) \not\equiv a_j(t),\ k_i(t \not\equiv k_j(t), t \in \Gamma$, то будем называть это уравнение сингулярным интегральным уравнением с n ядрами. Было замеченно, что именно из таких уравнений состоит система сингулярных интегральных уравнений. Остановимся также лишь на случае нормальной разрешимости уравнения (16) предполагая, что выражение

$$\Delta_n(t) = \frac{\Delta_{2n}(t)}{\Delta_{1n}(t)}, \Delta_{1n}(t) = a_0(t) + \Delta_0(t),$$

$$\Delta_{2n}(t) = a_0(t) - \Delta_0(t), \Delta_0(t) = a_1(t)k_1(t) + ... + a_n(t)k_n(t) \qquad (17)$$

не обращается в нуль и бесконечность на контуре. Согласно замечанию, сделанному выше, достаточно ограничиться случаем

$$f(t) = 2M_1(t)a_1(t) + ... + 2M_n(t)a_n(t), \qquad (18)$$

где $M_k(t), k = \overline{1, n}$ - полиномы.

Пусть $\psi(t)$ - решение этого уравнения (в случае его разрешимости) . Тогда, полагая на Γ

$$w^{j+}(t) = P[k_j\psi](t) - M_j(t), w^{j-}(t) = Q[k_j\psi](t) + M_j(t), \qquad (19)$$

$j = \overline{1,n}$ получим, что кусочно-аналитическая вектор-функция

$$\mathbf{w}(z) = (w^1(z), w^2(z), ..., w^n(z) \qquad (20)$$

с предельными значениями (19) на Γ, будет решением однородной задачи линейного сопряжения (3) , с матрицей-функцией

$$G(t) = G_0(t) - E, G_0(t) = \|g_{ij}(t)\|,$$

$$(g_{ij}(t) = \frac{2k_i(t)a_j(t)}{\Delta_{1n}(t)}, detG_0(t) = 0), i, j = \overline{1,n} \qquad (21)$$

и главной частью $(M_1(z), M_2(z), ..., M_n(z))$ на бесконечности. Обратно, если $\mathbf{w}(z)$ -решение задачи (3), (21), то Н-непрерывная на Γ функция

$$\psi(t) = (w^{1+}(t) + \frac{w_{1-}(t))}{k_1(t)} = ... = (w_{n+}(t) + \frac{w_{n-}(t))}{k_n(t)} \qquad (22)$$

будет решением уравнения (16) , правая часть которого определяется главной частью решения $w(z)$ на бесконечности по формуле (18). Исчезающему на бесконечности решению задачи (3), (21) соответствует решение однородного уравнения (16).

Рассмотрим союзное с уравнением $K\psi(t) = 0$ уравнение

$$K^{'}\psi(t) \equiv a_0(t)\psi(t) + k_1(t)S[a_1\psi](t) + ... + k_n(t)S[a_n\psi](t) = 0, \qquad (23)$$

Для соответствующего неоднородного уравнения

$$K^{'}\psi(t) = f_1(t)$$

Н-непрерывную на Γ функцию $f_1(t)$ будем как в (18) брать в виде:

$$f_1(t) = 2N_1(t)k_1(t) + ... + 2N_n(t)k_n(t), \qquad (24)$$

где $N_1(t), ..., N_n(t)$ - полиномы. Тогда формулы

$$v^{j+}(t) = P[k_j\psi](t) - N_j(t), v^{j-}(t) = Q[k_j\psi](t) + N_j(t), \qquad (25)$$

$j = \overline{1,n}$ определят предельные значения на Γ компонент кусочно-аналитического решения

$$\mathbf{v}(z) = (v^1(z), v^2(z), ..., v^n(z)) \qquad (26)$$

однородной задачи линейного сопряжения

$$\mathbf{v}^{+}(t) = F(t)\mathbf{v}^{-}(t), t \in \Gamma. \qquad (27)$$

с матрицей-функцией

$$F(t) = F_0(t) - E, F_0(t) = \|f_{ij}(t)\|$$

$$(f_{ij}(t) = \frac{-2a_i(t)k_j(t)}{\Delta_2 n(t)}, det F_0(t) = 0) i, j = \overline{1, n}. \qquad (28)$$

Определитель матрицы-функции (28) вычисляется также, как это сделано для матрицы-функции (21) и равен

$$det F = (-1)^n \Big(\frac{2a_1k_1}{\Delta_2 n} + \frac{2a_2k_2}{\Delta_2 n} + ... + \frac{2a_nk_n}{\Delta_2 n} + 1 \Big) = \frac{1}{det G(t)}. \qquad (29)$$

Так же в работе показанно,что матрица-функция $F(t) = G'^{-1}(t)$,то есть получается из матрицы-функции $G(t)$ при помощи операций транспонирования и взятия обратной матрицы. В самом деле, алгебраическое дополнение $G_{ii}(t)$ элемента $g_{ii}(t), i = \overline{1, n}$ матрицы-функции $G(t)$ при $i \neq 1, i \neq n$ вычисляется также, как $det G(t)$ и представляет собой сумму n определителей порядка $n - 1$.

Наряду с уравнением (16), было рассмотрено следующее уравнение с n ядрами:

$$K_\alpha \psi \equiv a_0\psi + a_1\alpha_1^{-1}S[k_1\alpha_1\psi] + ... + a_n\alpha_n^{-1}S[k_n\alpha_n\psi] = f_\alpha, \qquad (30)$$

где $\alpha_i(t), i = \overline{1, n}$ - Н-непрерывные функции точек контура, не имеюшие нулей на Г, а правая часть имеет вид:

$$f_\alpha(t) = 2M_1(t)a_1(t)\alpha_1^{-1}(t) + ... + 2M_n(t)a_n(t)\alpha_n^{-1}(t). \qquad (31)$$

Уравнение $(30), (31)$ эквивалентно в указанном выше смысле однородной задаче линейного сопряжения (3) с матрицей-функцией

$$G\alpha(t) = diag\{\alpha_1(t), ..., \alpha_n(t)\} G(t) diag\{\alpha_1^{-1}(t), ..., \alpha_n^{-1}(t)\}, \qquad (32)$$

где $G(t)$- матрица-функция (21).

Действительно, полагая на Г

$$w^{j+}(t) = P[k_j\alpha_j\psi](t) - M_j(t), w^{j-}(t) = Q[k_j\alpha_j\psi](t) + M_j(t), \qquad (33)$$

$j = \overline{1, n}$ получим, что кусочно-аналитическая вектор-функция (20) с предельными значениями (23) на Г, будет решением однородной задачи линейного сопряжения (3) , с матрицей-функцией вида (21) , для которой $g_{ij}(t) = 2k_i(t)\alpha_i(t)a_j(t)/\alpha_j(t)\Delta_{1n}(t), i,j = \overline{1,n}$, а сама матрица-функция допускает представление (32) .

Подберем $\alpha_i(t), i = \overline{1,n}$ так, чтобы соответствуюшая матрица-функция (32) факторизовалась эффективно. Обозначим через κ индекс уравнения (16) (индекс Коши отношения (17)) . Пусть в уравнении (16) отношения $\frac{a_1(t)}{a_i(t)}, i = \overline{2,n}$ не обращаются в нуль и бесконечность на контуре. Тогда, полагая в (30), (31)

$$\alpha_1(t) \equiv 1, \alpha_2(t) \equiv \frac{a_2(t)}{a_1(t)}, ..., \alpha_n(t) \equiv \frac{a_n(t)}{a_1(t)}, \tag{34}$$

придем к уравнению

$$L_1\psi(t) \equiv a_0(t)\psi(t) + a_1(t)S[\Delta_0 a_1^{-1}\psi](t) = f_1(t),$$

$$f_1(t) = 2a_1(t)(M_1(t) + ... + M_n(t)), \tag{35}$$

в котором функция $\Delta_0(t)$ определена в (17).

Если отношения $k_1(t)/k_i(t), i = \overline{2,n}$ не обращаются в нуль и бесконечность на Γ, то, взяв

$$\alpha_1(t) \equiv 1, \alpha_2(t) \equiv \frac{k_1(t)}{k_2(t)}, ..., \alpha_n(t) \equiv \frac{k_1(t)}{k_n(t)}, \tag{36}$$

придем к уравнению

$$L_2\psi(t) \equiv a_0(t)\psi(t) + \Delta_0(t)k_1^{-1}(t)S[k_1\psi](t) = f_2(t),$$

$$f_2(t) = 2k_1^{-1}(t)(M_1(t)a_1(t)k_1(t) + ... + M_n(t)a_n(t)k_n(t)). \tag{37}$$

Таким образом, при указанных значениях $\alpha_i(t), i = \overline{1,n}$ решение уравнения $K_\alpha\psi(t) = 0$, а также неоднородного уравнения с правой частью (31) строится в в замкнутой форме. Поэтому, формулы (33) определят систему решений соответствующей однородной задачи линейного сопряжения с матрицей-функцией (32). Это, в свою очередь, позволяет получить на Γ представление

$$G_\alpha(t) = G_\alpha^+(t)G\alpha^-(t), \tag{38}$$

а,значит,эффективно построить ее факторизацию.

В статье [3] научного руководителя рассмотрены некоторые случаи, когда матрица-функция (21) допускают эффективную факторизацию.

Случай 1 . Предположим, что в уравнении (16) отношения $a_i(t)/a_1(t) = r_i(t), i = \overline{2,n}$ - рациональные функции без нулей и полюсов на контуре. Тогда полагая в уравнении (30) $\alpha_i(t) \equiv r_i(t)(r_1(t) \equiv 1)$, придем к уравнению

$$a_0(t)\psi(t) + a_1(t)S[(k_1 + k_2r_2 + ... + k_nr_n)\psi](t) = 2a_1(t)(M_1(t) + ... + M_n(t)),$$

Случай 2. Пусть указанным свойством обладают отношения $k_i(t)/k_1(t) = r_i(t), i = \overline{2,n}$. Тогда от уравнения (1.15) с $\alpha_i(t) \equiv r_i(t)(r_1(t) \equiv 1)$, придем к уравнению

$$\begin{aligned} a_0(t)\psi(t) + (a_1(t) + a_2(t)r_2(t) + ... + a_n(t)r_n(t))S[k_1\psi](t) = \\ = 2(M_1(t)a_1(t) + M_2(t)a_2(t)r_2(t)(t) + ... + M_n(t)a_n(t)r_n(t)). \end{aligned}$$

Определенным образом подбирая решение этих уравнений с одним ядром(характеристическое) строится факторизация матриц-функции (32): $G_\alpha(t) = G_\alpha^+(t)G_\alpha^-(t)$ так как в представлении

$$G_\alpha(t) = diag\{\alpha_1^{-1}(t), ..., \alpha_n^{-1}(t)\}G_\alpha^+(t)G_\alpha^-(t)diag\{\alpha_1(t), ..., \alpha_n(t)\}$$

$\alpha_1(t), ..., \alpha_n(t)$- рациональные, строится факторизация соответственно матриц-функции $G(t)$.

В настоящее время известно сравнительно немного типов сингулярных интегральных уравнений, решение которых имеют замкнутую форму. Это связанно прежде всего с тем ,что метод решения таких уравнений основан на сведении их к эквивалентной задачи линейного сопряжения ,которая,в свою очередь, должна допускать эффективное решение.

Выше мы привели основные понятия, связанные с задачей линейного сопряжения для трехмерного вектора и дана сводка основных результатов и методов ее решения.

Рассмотрели, теория сингулярных интегральных уравнений с n ядрами, которая в дальнейшем применяется для выделения при $n = 3$ классов таких уравнений разрешимых в замкнутой форме.

Основная часть работы заключается к сведению особого сингулярного интегрального уравнения с тремя ядрами, где регулярное ядро выраждено, к решению системы линейных алгебраических уравнений.Также здесь проводится исследование указанного уравнения,основываясь на теоремах о разрешимости СЛАУ. Приводим пример.

1.Некоторые классы сингулярных интегральных уравнений с тремя ядрами разрешимых в замкнутой форме.

Рассмотрим сингулярное интегральное уравнение при $n = 3$:

$$K\psi(t) \equiv a_0(t)\psi(t) + a_1(t)S[k_1\psi](t) + a_2(t)S[k_2\psi](t) + a_3(t)S[k_3\psi](t) = f(t), \quad (1.1)$$

Предположим, что отношение

$$\frac{k_i(t)}{k_1(t)} = r_i(t), i = \overline{2,3}, \text{где } r_i(t) = \frac{p_i(t)}{q_i(t)}, t \in \Gamma, \quad (1.2)$$

где $p_i(t), q_i(t)$- известные полиномы. Полагая на Γ, $k_1(t)\psi(t) = \phi(t)$, а затем $\phi = q(t)\omega(t)$, где $q(t)$- наименьшее общее кратное полиномов $q_1(t)$ и $q_2(t)$ придем к уравнению

$$a_0(t)k_1^{-1}(t)q(t)\omega(t) + a_1(t)S[q\omega](t) + a_2(t)S[l_1\omega](t) + a_3(t)S[l_2\omega](t) = f(t), \quad (1.3)$$

здесь

$$l_1(t) = \frac{p_1(t)q(t)}{q_1(t)}, l_2(t) = \frac{p_2(t)q(t)}{q_2(t)}$$

некоторые полиномы.

Покажем, что уравнение (1.3) будет уравнением с вырожденной регулярной частью.Действительно, выделяя в этом уравнении характеристическую часть, получим

$$\frac{a_0(t)}{k_1(t)}q(t)\omega(t)+a_1(t)q(t)+a_2(t)l_1+a_3(t)l_2(t)\int_\Gamma \frac{\omega(\tau)d\tau}{\tau-t}+\frac{a_1(t)}{\pi i}\int_\Gamma \frac{(q(\tau)-q(t))\omega(t)d\tau}{\tau-t}+$$

$$+\frac{a_2(t)}{\pi i}\int_\Gamma \frac{(l_1(\tau)-l_1(t))\omega(t)d\tau}{\tau-t}+\frac{a_3(t)}{\pi i}\int_\Gamma \frac{(l_2(\tau)-l_2(t))\omega(t)d\tau}{\tau-t} = f(t) \quad (1.4)$$

Пусть $l < m < n$ и полиномы имеют вид:

$$q(z) = a_l z^l + a_{l-1}z^{l-1} + ... + a_1 z + a_0, \; l_1(z) = b_m z^m + b_{m-1}z^{m-1} + ... + b_1 z + b_0,$$

$$l_2(z) = d_n z^n + d_{n-1}z^{n-1} + ... + d_1 z + d_0$$

Подставим полиномы в интегралы и введем обозначения

$$A_k = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \tau^{k-1}\omega(\tau)d(\tau), B_k = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \tau^{k-1}\omega(\tau)d(\tau),$$

$$D_k=\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \tau^{k-1}\omega(\tau)d(\tau) \tag{1.5}$$

перепишем уравнение(1.4) в следующем виде:

$$\frac{a_0(t)}{k_1(t)}q(t)\omega(t)+a_1(t)q(t)+a_2(t)l_1+a_3(t)l_2(t)\int_\Gamma\frac{\omega(\tau)d\tau}{\tau-t}+a_1(t)\sum_{k=1}^{l}A_k\sum_{s=0}^{l-k}a_{s+k}t^s$$

$$+a_2(t)\sum_{k=1}^{m}B_k\sum_{s=0}^{m-k}b_{s+k}t^s+a_3(t)\sum_{k=1}^{n}D_k\sum_{s=0}^{n-k}d_{s+k}t^s=f(t) \tag{1.6}$$

Обозначим $C_1=A_1,...,A_l=C_l, C_1=B_1,...,B_l=C_l, C_{l+1}=B_{l+1},...,B_m=C_m, C_1=D_1,...,D_l=C_l, C_{l+1}=D_{l+1},...,D_m=C_m, C_{m+1}=D_{m+1},...,D_n=C_n$

Разобъем суммы:

$$\frac{a_0(t)}{k_1(t)}q(t)\omega(t)+a_1(t)q(t)+a_2(t)l_1+a_3(t)l_2(t)\int_\Gamma\frac{\omega(\tau)d\tau}{\tau-t}+a_1(t)\sum_{k=1}^{l}C_k\sum_{s=0}^{l-k}a_{s+k}t^s+$$

$$+a_2(t)\Big(\sum_{k=1}^{l}C_k+\sum_{k=l+1}^{m}C_k\Big)\sum_{s=0}^{m-k}b_{s+k}t^s+a_3(t)\Big(\sum_{k=1}^{l}C_k+\sum_{k=l+1}^{m}C_k+\sum_{k=m+1}^{n}C_k\Big)\sum_{s=0}^{n-k}d_{s+k}t^s=f(t)$$

Объединяя суммы, уравнение примет вид:

$$\frac{a_0(t)}{k_1(t)}q(t)\omega(t)+a_1(t)q(t)+a_2(t)l_1+a_3(t)l_2(t)\int_\Gamma\frac{\omega(\tau)d\tau}{\tau-t}+a_1(t)\sum_{k=1}^{l}C_k\Big(\sum_{s=0}^{l-k}a_{s+k}t^s+\sum_{s=0}^{m-k}b_{s+k}t^s$$

$$+\sum_{s=0}^{n-k}d_{s+k}t^s\Big)+a_2(t)\sum_{k=l+1}^{m}C_k\Big(\sum_{s=0}^{m-k}b_{s+k}t^s+\sum_{s=0}^{n-k}d_{s+k}t^s\Big)+a_3(t)\sum_{k=m+1}^{n}C_k\sum_{s=0}^{n-k}d_{s+k}t^s=f(t)$$

$$\frac{a_0(t)}{k_1(t)}q(t)\omega(t)+a_1(t)q(t)+a_2(t)l_1+a_3(t)l_2(t)\int_\Gamma\frac{\omega(\tau)d\tau}{\tau-t}=f(t)-F(t) \tag{1.7}$$

где

$$F(t)=a_1(t)\sum_{k=1}^{l}C_k\Big(\sum_{s=0}^{l-k}a_{s+k}t^s+\sum_{s=0}^{m-k}b_{s+k}t^s+\sum_{s=0}^{n-k}d_{s+k}t^s\Big)+a_2(t)\sum_{k=l+1}^{m}C_k\Big(\sum_{s=0}^{m-k}b_{s+k}t^s+$$

$$+\sum_{s=0}^{n-k} d_{s+k}t^s\big) + a_3(t)\sum_{k=m+1}^{n} C_k \sum_{s=0}^{n-k} d_{s+k}t^s$$

В нашем случае решение уравнения можно свести к решению краевой задачи Римана [[4],(гл 2)]

Введем кусочно аналитическую функцию, заданную интегралом типа Коши, плотностью которого служит искомое решение характеристического уравнения

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\omega(\tau)}{\tau - z}\,d\tau, \Phi^-(\infty) = 0$$

Согласно формулам Сохоцкого

$$\omega(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t),$$

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\omega(\tau)}{\tau - z}\,d\tau = \Phi^+(t) + \Phi^-(t) \tag{1.8}$$

Внесем значения $\omega(t), \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\omega(\tau)}{\tau - z}\,d\tau$ в уравнение (1.7), мы получим

$$\frac{a_0(t)}{k_1(t)}q(t)\big(\Phi^+(t)-\Phi^-(t)\big)+a_1(t)q(t)+a_2(t)l_1+a_3(t)l_2(t)\big(\Phi^+(t)-\Phi^-(t)\big) = f(t)-F(t) \tag{1.9}$$

Решаем его относительно $\Phi^+(t)$

$$\Phi^+(t) = \frac{a_0qk_1^{-1} - (a_1q + a_2l_1 + a_3l_2)}{a_0qk_1^{-1} + (a_1q + a_2l_1 + a_3l_2)}\Phi^-(t) + \frac{f(t) - F(t)}{a_0qk_1^{-1} + (a_1q + a_2l_1 + a_3l_2)},$$

Обозначим

$$G(t) = \frac{a_0qk_1^{-1} - (a_1q + a_2l_1 + a_3l_2)}{a_0qk_1^{-1} + (a_1q + a_2l_1 + a_3l_2)},$$

$$g(t) = \frac{f(t) - F(t)}{a_0qk_1^{-1} + (a_1q + a_2l_1 + a_3l_2)} \tag{1.10}$$

Перепишем полученное уравнение

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t)$$

Мы видем, что кусочно аналитическая функция $\Phi(z)$ являться решением краевой задачи Римана.

Заменяя коэффициент $G(t)$ краевого условия $\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t)$ отношением краевых значений канонической функции однородной задачи

$$G(t) = \frac{X^+(t)}{X^-(t)} \Rightarrow \frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} + \frac{g(t)}{X^+(t)} \tag{1.11}$$

Функция $\frac{g(t)}{X^+(t)}$ удовлетворяет условию Гёльдера. Заменим ее разностью краевых значений аналитических функции:

$$\frac{g(t)}{X^+(t)} = \Psi^+(t) - \Psi^-(t), \text{ где } \Psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)(\tau - z)}\,d\tau. \tag{1.12}$$

Тогда краевое условие можно будет записать в виде:

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} - \Psi(t) = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} + \frac{g(t)}{X^+(t)} - \Psi^-(t) \tag{1.13}$$

Заметим, что при $\kappa \geqslant 0$ функция $\frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)}$ будет иметь на бесконечности полюс, а при $\kappa < 0$ нуль порядка κ.

Теорема 1. *В классе кусочно-голоморфных функций,ограниченных на бесконечности в случае $\chi \geq 0$ неоднородная задача Римана разрешима при любом свободном члене и ее общее решение дается формулой*

$$\Psi(z) = X(z)\big(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\frac{d\tau}{(\tau - z)} + P_\chi(z)\big), \tag{$*$}$$

где $P_\chi(z)$ - полином степени χ с произвольными комплексными коэффициентами. Если $\chi = -1$, то неоднородная задача также разрешима и имеет единственное решение. В случае $\chi < -1$ неоднородная задача, вообще говоря, неразрешима. Для того чтобы она была разрешима, необходимо и достаточно, чтобы свободный член задачи удовлетворял $-\chi - 1$ условиям:

$$\int\limits_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\tau^{k-1}d\tau = 0, k = \overline{1, -\chi - 1}.$$

При выполнении последних, единственное решение задачи дается формулой $(*)$, где нужно положить $P_\kappa(z) = 0$.

В силу $\Phi^-(\infty)=0$ и считая $\chi \geq 0$, то

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} - \Psi^+(t) = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} - \Psi^-(t) = P_{\chi-1}(t). \qquad (1.14)$$

Отсюда имеем решение

$$\Phi^+(z) = X^+(z)(\Psi^+(z) + P_{\chi-1}(z)),$$

$$\Phi^-(z) = X^-(z)(\Psi^-(z) + P_{\chi-1}(z)). \qquad (1.15)$$

При этом необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие при $k = \overline{1, -\chi-1}$.:

$$\int\limits_L \frac{F(t)}{a_0qk_1^{-1} + (a_1q + a_2l_1 + a_3l_2)X^+(\tau)}\tau^{k-1}d\tau = \frac{f(t)}{a_0qk_1^{-1} + (a_1q + a_2l_1 + a_3l_2)}\tau^{k-1}d\tau,$$

Подставляя значения в формулу:

$$\omega(t) = \frac{1}{2}\big[1 + \frac{1}{G(t)}\big]g(t) + X^+(t)\big[1 - \frac{1}{G(t)}\big]\big[\frac{1}{1\pi i}\int_\Gamma \frac{g(t)d(\tau)}{X^+(\tau)(\tau - t)} - \frac{1}{2}P_{\kappa-1}(t)\big],$$

где

$$P_{\kappa-1}(t) = \tilde{c}_{\kappa-1}z^{\kappa-1} + ... + \tilde{c}_0,$$

Получаем

$$\omega(t) = \frac{1}{2}\big[1 + \frac{a_0qk_1^{-1} + (a_1q + a_2l_1 + a_3l_2)}{a_0qk_1^{-1} - (a_1q + a_2l_1 + a_3l_2)}\big]\frac{f(t) - F(t)}{a_0qk_1^{-1} + (a_1q + a_2l_1 + a_3l_2)} +$$

$$+ a_0qk_1^{-1} - (a_1q + a_2l_1 + a_3l_2)\big[1 - \frac{a_0qk_1^{-1} + (a_1q + a_2l_1 + a_3l_2)}{a_0qk_1^{-1} - (a_1q + a_2l_1 + a_3l_2)}\big]$$

$$\big[\frac{1}{1\pi i}\int_\Gamma \frac{f(t) - F(t)}{(a_0qk_1^{-1} + (a_1q + a_2l_1 + a_3l_2))(a_0qk_1^{-1} - (a_1q + a_2l_1 + a_3l_2))}\frac{d(\tau)}{(\tau - t)} -$$

$$-\frac{1}{2}\tilde{c}_{\kappa-1}z^{\kappa-1} + ... + \tilde{c}_0\big], \qquad (1.16)$$

Обозначим $C_{n+1} = \tilde{c}_{\kappa-1}, ..., C_{n+\kappa} = \tilde{c}_0$,$\omega(t)$ перепишется:

$$\omega(t) = \sum_{s=1}^{n+\kappa} C_s h_s(t), \qquad (1.17)$$

где при $\mathbf{s}=\overline{\mathbf{1},\mathbf{l}}$

$$h_s = 1+\frac{a_0qk_1^{-1}+(a_1q+a_2l_1+a_3l_2)}{a_0qk_1^{-1}-(a_1q+a_2l_1+a_3l_2)}]\frac{f(t)-a_1(\sum_{s=0}^{l-k}a_{s+k}t^s+\sum_{s=0}^{m-k}b_{s+k}t^s+\sum_{s=0}^{n-k}d_{s+k}t^s}{a_0qk_1^{-1}+(a_1q+a_2l_1+a_3l_2)}$$

$$+a_0qk_1^{-1}-(a_1q+a_2l_1+a_3l_2)[1-\frac{a_0qk_1^{-1}+(a_1q+a_2l_1+a_3l_2)}{a_0qk_1^{-1}-(a_1q+a_2l_1+a_3l_2)}]$$

$$[\frac{1}{1\pi i}\int_\Gamma\frac{f(t)-a_1(\sum_{s=0}^{l-k}a_{s+k}t^s+\sum_{s=0}^{m-k}b_{s+k}t^s+\sum_{s=0}^{n-k}d_{s+k}t^s)}{(a_0qk_1^{-1}+(a_1q+a_2l_1+a_3l_2))(a_0qk_1^{-1}-(a_1q+a_2l_1+a_3l_2))}\frac{d(\tau)}{(\tau-t)}$$

при $\mathbf{s}=\overline{\mathbf{l}+\mathbf{1},\mathbf{m}}$

$$h_s = 1+\frac{a_0qk_1^{-1}+(a_1q+a_2l_1+a_3l_2)}{a_0qk_1^{-1}-(a_1q+a_2l_1+a_3l_2)}]\frac{f(t)-a_2(\sum_{s=0}^{m-k}b_{s+k}t^s+\sum_{s=0}^{n-k}d_{s+k}t^s)}{a_0qk_1^{-1}+(a_1q+a_2l_1+a_3l_2)}+$$

$$+a_0qk_1^{-1}-(a_1q+a_2l_1+a_3l_2)[1-\frac{a_0qk_1^{-1}+(a_1q+a_2l_1+a_3l_2)}{a_0qk_1^{-1}-(a_1q+a_2l_1+a_3l_2)}]$$

$$[\frac{1}{1\pi i}\int_\Gamma\frac{f(t)-a_2(\sum_{s=0}^{m-k}b_{s+k}t^s+\sum_{s=0}^{n-k}d_{s+k}t^s)}{(a_0qk_1^{-1}+(a_1q+a_2l_1+a_3l_2))(a_0qk_1^{-1}-(a_1q+a_2l_1+a_3l_2))}\frac{d(\tau)}{(\tau-t)}$$

при $\mathbf{s}=\overline{\mathbf{m}+\mathbf{1},\mathbf{n}}$

$$h_s = 1+\frac{a_0qk_1^{-1}+(a_1q+a_2l_1+a_3l_2)}{a_0qk_1^{-1}-(a_1q+a_2l_1+a_3l_2)}]\frac{f(t)-a_3\sum_{s=0}^{n-k}d_{s+k}t^s}{a_0qk_1^{-1}+(a_1q+a_2l_1+a_3l_2)}+$$

$$+a_0qk_1^{-1}-(a_1q+a_2l_1+a_3l_2)[1-\frac{a_0qk_1^{-1}+(a_1q+a_2l_1+a_3l_2)}{a_0qk_1^{-1}-(a_1q+a_2l_1+a_3l_2)}]$$

$$[\frac{1}{1\pi i}\int_\Gamma\frac{f(t)-a_3\sum_{s=0}^{n-k}d_{s+k}t^s}{(a_0qk_1^{-1}+(a_1q+a_2l_1+a_3l_2))(a_0qk_1^{-1}-(a_1q+a_2l_1+a_3l_2))}\frac{d(\tau)}{(\tau-t)}$$

при $\mathbf{s}=\overline{\mathbf{n}+\mathbf{1},\mathbf{n}+\kappa}$

$$h_s = 1+\frac{a_0qk_1^{-1}+(a_1q+a_2l_1+a_3l_2)}{a_0qk_1^{-1}-(a_1q+a_2l_1+a_3l_2)}]\frac{f(t)}{a_0qk_1^{-1}+(a_1q+a_2l_1+a_3l_2)}+$$

$$+a_0qk_1^{-1}-(a_1q+a_2l_1+a_3l_2)[1-\frac{a_0qk_1^{-1}+(a_1q+a_2l_1+a_3l_2)}{a_0qk_1^{-1}-(a_1q+a_2l_1+a_3l_2)}]$$

$$[\frac{1}{1\pi i}\int_\Gamma\frac{f(t)}{(a_0qk_1^{-1}+(a_1q+a_2l_1+a_3l_2))(a_0qk_1^{-1}-(a_1q+a_2l_1+a_3l_2))}\frac{d(\tau)}{(\tau-t)}-\frac{1}{2}\sum_{s=0}^{\kappa-k}t^{n+\kappa-s}]$$

Пусть

$$C_k = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \tau^{k-1}\omega(\tau)d(\tau), k=\overline{1,n} \tag{1.18}$$

Подставим полученное (1.17) в (1.18)

$$C_k = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \tau^{k-1}\sum_{s=1}^{n+\kappa} C_s h_s(t)d(\tau)$$

или

$$C_k - \sum_{s=1}^{n+\kappa} C_s \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \tau^{k-1} h_s(t)d(\tau) = 0, k=\overline{1,n} \tag{1.19}$$

Мы пришли к линейной однородной алгебраической системе $k = \overline{1,n}$-уравнений с $(n+\kappa)$- неизвестными.

При $k \geqslant \kappa$ ранг матрицы этой системы равен k и уравнени имеет κ линейно независимых решений, а в случае $k > \kappa$ имеет $(k+\kappa-r)$,где $r(\kappa \geqslant r \geqslant k)$-ранг матрицы полученной системы.

Чтобы решить систему линейных алгебраических уравнений общего вида, сначала выясняем ее совместность, используя теорему Кронекера – Капелли. Если ранг основной матрицы не равен рангу расширенной матрицы, то делаем вывод о несовместности системы.

Если ранг основной матрицы равен рангу расширенной матрицы, то выбираем базисный минор и отбрасываем уравнения системы, которые не участвуют в образовании выбранного базисного минора.

Если порядок базисного минора равен числу неизвестных переменных, то СЛАУ имеет единственное решение, которое находим любым известным нам методом.

Если порядок базисного минора меньше числа неизвестных переменных, то в левой части уравнений системы оставляем слагаемые с основными неизвестными переменными, остальные слагаемые переносим в правые части и придаем свободным неизвестным переменным произвольные значения. Из полученной системы линейных уравнений находим основные неизвестные переменные методом Крамера, матричным методом или методом Гаусса.

2.Пример.

Рассмотрим пример сингулярного интегрального уравнения с тремя ядрами:

$$\varphi(t)+\frac{2}{t\pi i}\int_\Gamma\frac{\tau\sin\tau}{\tau-t}\varphi(t)d\tau+\frac{1}{t^2\pi i}\int_\Gamma\frac{(\tau^2+1)\sin\tau}{\tau-t}\varphi(t)d\tau-$$

$$-\frac{1}{t^3\pi i}\int_\Gamma\frac{(\tau^3+\tau)\sin\tau}{\tau-t}\varphi(t)d\tau=0 \tag{2.1}$$

Полагая,что $sint\varphi(t)=\psi(t)$ перепишем уравнение (3.1))

$$\frac{\psi(t)}{\sin t}+\frac{2}{t\pi i}\int_\Gamma\frac{\tau\psi(\tau)}{\tau-t}d\tau+\frac{1}{t^2\pi i}\int_\Gamma\frac{(\tau^2+1)\psi(\tau)}{\tau-t}d\tau-\frac{1}{t^3\pi i}\int_\Gamma\frac{(\tau^3+\tau)\psi(\tau)}{\tau-t}d\tau=0 \tag{2.2}$$

Покажем, что уравнение (3.2) будет уравнением с вырожденной регулярной частью. Выделяя в этом уравнении характеристическую часть, получим :

$$\frac{\psi(t)}{\sin t}+\left[\frac{2}{t}t+\frac{1}{t^2}(t^2+1)-\frac{1}{t^3}(t^3+t)\right]\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\frac{\psi(\tau)}{\tau-t}d\tau+\frac{2}{t\pi i}\int_\Gamma\frac{(\tau-t)\psi(\tau)}{\tau-t}d\tau-$$

$$-\frac{1}{t^2\pi i}\int_\Gamma\frac{(\tau^2-t^2)\psi(\tau)}{\tau-t}d\tau-\frac{1}{t^3\pi i}\int_\Gamma\frac{[(\tau^3+\tau)-(t^3+t)]\psi(\tau)}{\tau-t}d\tau=0$$

$$\frac{\psi(t)}{\sin t}+\frac{2}{\pi i}\int_\Gamma\frac{\psi(\tau)}{\tau-t}d\tau=-\left(\frac{2}{t\pi i}\int_\Gamma\psi(\tau)d\tau+\frac{1}{t^2\pi i}\int_\Gamma(\tau+t)\psi(\tau)d\tau-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{t^3\pi i}\int_\Gamma[(\tau^2+t\tau+t^2)+1]\psi(\tau)d\tau\right)=0 \tag{2.3}$$

Обозначим интегралы

$$A_1=\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\psi(\tau)d\tau, A_2=\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\tau\psi(\tau)d\tau,$$

$$A_3=\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\tau^2\psi(\tau)d\tau \tag{2.4}$$

и перепишем уравнение (2.3):

$$\frac{\psi(t)}{\sin t}+\frac{2}{\pi i}\int_\Gamma\frac{\psi(\tau)}{\tau-t}d\tau=-\frac{2}{t}A_1-\frac{1}{t^2}(A_2+tA_1)-\frac{1}{t^3}[A_3+tA_2+t^2A_1] \quad (2.5)$$

Мы получили характеристическое уравнение.

$$\frac{\psi(t)}{\sin t}+\frac{2}{\pi i}\int_\Gamma\frac{\psi(\tau)}{\tau-t}d\tau=f(t),$$

где $f(t)=-\frac{2}{t}A_1-\frac{1}{t^2}(A_2+tA_1)-\frac{1}{t^3}[A_3+tA_2+t^2A_1]$ Сводим его к решению краевой задачи Римана. По Формулам (1.8) получаем:

$$\frac{1}{sint}(\Phi^+(t)-\Phi^-(t))+2(\Phi^+(t)+\Phi^-(t))=f(t)$$

$$\Phi^+\left[\frac{1}{sint}+2\right]-\Phi^-\left[\frac{1}{sint}-2\right]=f(t)$$

$$\Phi^+=\frac{(1-2sint)}{(1+2sint)}\Phi^-+\frac{f(t)sint}{1+2sint},\ \Phi^-(\infty)=0 \quad (2.6)$$

где $|t|=1$, точка $\pm\frac{\pi}{6}\in D^+$ и $g(t),G(t)$ мероморфны в области D^+. Тогда функцию $G(t)$ представим в виде $G(t)=G_0^+\frac{p_+(t)}{q_+(t)}$, где G_0^+ не имеет в области D^+ нулей и полюсов.

Канонические функции мы представим:

$$X^+=\frac{(1-2sint)(t+\frac{\pi}{6})}{(t-\frac{\pi}{6})(1+2sint)}$$

$$X^-=\frac{(t+\frac{\pi}{6})}{(t-\frac{\pi}{6})} \quad (2.7)$$

Коэффицент задачи Римана имеет индекс $\chi=0$. Подставим (2.7) в формулу (1.11)

$$\frac{(t-\frac{\pi}{6})(1+2sint)}{(t+\frac{\pi}{6})(1-2sint)}\Phi^+=\frac{(t-\frac{\pi}{6})}{(t+\frac{\pi}{6})}\Phi^-+\frac{(-4t^2A_1-2tA_2-A_3)(t-\frac{\pi}{6})sint}{t^3(t+\frac{\pi}{6})(1-2sint)} \quad (2.8)$$

Функция

$$\frac{g(t)}{X^+(t)}=\frac{(-4t^2A_1-2tA_2-A_3)(t-\frac{\pi}{6})sint}{t^3(t+\frac{\pi}{6})(1-2sint)}$$

мероморфно продолжима в области D^+. Заменим ее разностью краевых значений аналитических функций

$$\phi = \frac{g(t)}{X^+(t)} = \phi^+(t) - \phi^-(t), \tag{2.9}$$

$$\frac{(-4t^2A_1 - 2tA_2 - A_3)(t - \frac{\pi}{6})sint}{t^3(t + \frac{\pi}{6})(1 - 2sint)} = \phi^+(t) - \phi^-(t), \tag{2.10}$$

где

$$\frac{g(t)}{X^+(t)} = \phi(t) - \frac{c_{-1}}{(t + \frac{\pi}{6})} - \frac{d_{-2}}{t^2} - \frac{d_{-1}}{t} + \frac{c_{-1}}{(t + \frac{\pi}{6})} + \frac{d_{-2}}{t^2} + \frac{d_{-1}}{t} \tag{2.11}$$

$t = \frac{-\pi}{6}$− полис первого порядка.

$$c_{-1} = \frac{(-4(-\frac{\pi}{6})^2A_1 + \frac{\pi}{3}A_2 - A_3)(-4(-\frac{\pi}{6}) - \frac{\pi}{6})sin(-\frac{\pi}{6})}{(\frac{\pi}{6})^3(1 - 2sin(-\frac{\pi}{6}))}$$

$$c_{-1} = -2A_1 - \frac{6A_2}{\pi} - \frac{18A_3}{\pi^2}$$

$$\phi(t) - \frac{c_{-1}}{(t + \frac{\pi}{6})} + \frac{c_{-1}}{(t + \frac{\pi}{6})} = \frac{(-4t^2A_1 - 2tA_2 - A_3)(t - \frac{\pi}{6})sint}{t^3(t + \frac{\pi}{6})(1 - 2sint)} - \frac{-2A_1 - \frac{6A_2}{\pi} - \frac{18A_3}{\pi^2}}{(t + \frac{\pi}{6})} +$$

$$+ \frac{-2A_1 - \frac{6A_2}{\pi} - \frac{18A_3}{\pi^2}}{(t + \frac{\pi}{6})} \tag{2.12}$$

$t = 0$−полис вторго порядка.Тогда$\frac{g(t)}{X^+(t)}$ рассkладываем в ряд Лорана:

$$\frac{(-4t^2A_1 - 2tA_2 - A_3)(t - \frac{\pi}{6})sint}{t(t + \frac{\pi}{6})(1 - 2sint)} = A_3 + 2t\left(A_2 + A_3 - \frac{6A_3}{\pi}\right) + t^2\left(4A_1 + \right.$$

$$\left. + \frac{4A_2(\pi - 6)}{\pi} + \frac{23A_3}{6} - \frac{24A_3}{\pi} + \frac{72A_3}{\pi^2} + ...\right) \tag{2.13}$$

Получаем

$$\frac{g(t)}{X^+(t)} = \frac{d_{-2}}{t^2} + \frac{d_{-1}}{t} + d_0 + d_1 + ... = \frac{A_3}{t^2} + \frac{2\left(A_2 + A_3 - \frac{6A_3}{\pi}\right)}{t} + \left(4A_1 + \right.$$

$$+\frac{4A_2(\pi-6)}{\pi}+\frac{23A_3}{6}-\frac{24A_3}{\pi}+\frac{72A_3}{\pi^2}+...\Bigg) \tag{2.14}$$

Подставляем полученное в (2.11)

$$\phi=\frac{(-4t^2A_1-2tA_2-A_3)(t-\frac{\pi}{6})sint}{t^3(t+\frac{\pi}{6})(1-2sint)}-\frac{-2A_1-\frac{6A_2}{\pi}-\frac{18A_3}{\pi^2}}{(t+\frac{\pi}{6})}-\frac{A_3}{t^2}-$$

$$\frac{2\left(A_2+A_3-\frac{6A_3}{\pi}\right)}{t}-\left(4A_1+\frac{4A_2(\pi-6)}{\pi}-\frac{23A_3}{6}-\frac{24A_3}{\pi}+\frac{72A_3}{\pi^2}\right)+$$

$$\frac{-2A_1-\frac{6A_2}{\pi}-\frac{18A_3}{\pi^2}}{(t+\frac{\pi}{6})}+\frac{A_3}{t^2}+\frac{2\left(A_2+A_3-\frac{6A_3}{\pi}\right)}{t} \tag{2.15}$$

Отсюда получаем :

$$\phi^+(t)=\frac{(-4t^2A_1-2tA_2-A_3)(t-\frac{\pi}{6})sint}{t^3(t+\frac{\pi}{6})(1-2sint)}-\frac{-2A_1-\frac{6A_2}{\pi}-\frac{18A_3}{\pi^2}}{(t+\frac{\pi}{6})}-\frac{A_3}{t^2}-$$

$$\frac{2\left(A_2+A_3-\frac{6A_3}{\pi}\right)}{t}-\left(4A_1+\frac{4A_2(\pi-6)}{\pi}-\frac{23A_3}{6}-\frac{24A_3}{\pi}+\frac{72A_3}{\pi^2}\right) \tag{2.16}$$

$$\phi^-(t)=\frac{-2A_1-\frac{6A_2}{\pi}-\frac{18A_3}{\pi^2}}{(t+\frac{\pi}{6})}+\frac{A_3}{t^2}+\frac{2\left(A_2+A_3-\frac{6A_3}{\pi}\right)}{t}+$$

$$+\left(4A_1+\frac{4A_2(\pi-6)}{\pi}+\frac{23A_3}{6}-\frac{24A_3}{\pi}+\frac{72A_3}{\pi^2}\right) \tag{2.17}$$

Подставим полученное $\frac{g(t)}{X^+(t)}$ в краевое условие (2.8) получаем:

$$\frac{(t-\frac{\pi}{6})(1+2sint)}{(t+\frac{\pi}{6})(1-2sint)}\Phi^+-\phi^+=\frac{(t-\frac{\pi}{6})}{(t+\frac{\pi}{6})}\Phi^--\phi^-=0$$

Отсюда имеем решение:

$$\Phi^+(t)=\frac{(t+\frac{\pi}{6})(1-2sint)}{(t-\frac{\pi}{6})(1+2sint)}\left(\frac{(-4t^2A_1-2tA_2-A_3)(t-\frac{\pi}{6})sint}{t^3(t+\frac{\pi}{6})(1-2sint)}-\frac{-2A_1-\frac{6A_2}{\pi}-\frac{18A_3}{\pi^2}}{(t+\frac{\pi}{6})}-\frac{A_3}{t^2}\right.$$

$$\left.-\frac{2\left(A_2+A_3-\frac{6A_3}{\pi}\right)}{t}-\left(4A_1+\frac{4A_2(\pi-6)}{\pi}-\frac{23A_3}{6}-\frac{24A_3}{\pi}+\frac{72A_3}{\pi^2}\right)\right)$$

$$\Phi^-(t)=\frac{(t+\frac{\pi}{6})}{(t-\frac{\pi}{6})}\left(\frac{-2A_1-\frac{6A_2}{\pi}-\frac{18A_3}{\pi^2}}{(t+\frac{\pi}{6})}+\frac{A_3}{t^2}+\frac{2\left(A_2+A_3-\frac{6A_3}{\pi}\right)}{t}+\right.$$

$$\left.+\left(4A_1+\frac{4A_2(\pi-6)}{\pi}+\frac{23A_3}{6}-\frac{24A_3}{\pi}+\frac{72A_3}{\pi^2}\right)\right) \qquad (2.18)$$

Полученное подставляем в $\Psi(t)=\Phi^+-\Phi^-,\ \Phi^-(\infty)=0$ получаем:

$$\Psi(t)=\frac{(t+\frac{\pi}{6})(1-2sint)}{(t-\frac{\pi}{6})(1+2sint)}\left[\frac{(-4t^2A_1-2tA_2-A_3)(t-\frac{\pi}{6})sint}{t^3(t+\frac{\pi}{6})(1-2sint)}-\frac{-2A_1-\frac{6A_2}{\pi}-\frac{18A_3}{\pi^2}}{(t+\frac{\pi}{6})}-\frac{A_3}{t^2}\right.$$

$$\left.-\frac{2\left(A_2+A_3-\frac{6A_3}{\pi}\right)}{t}-\left(4A_1+\frac{4A_2(\pi-6)}{\pi}-\frac{23A_3}{6}-\frac{24A_3}{\pi}+\frac{72A_3}{\pi^2}\right)\right]-$$

$$-\frac{(t+\frac{\pi}{6})}{(t-\frac{\pi}{6})}\left[\frac{-2A_1-\frac{6A_2}{\pi}-\frac{18A_3}{\pi^2}}{(t+\frac{\pi}{6})}+\frac{A_3}{t^2}+\frac{2\left(A_2+A_3-\frac{6A_3}{\pi}\right)}{t}+\right.$$

$$\left.+\left(4A_1+\frac{4A_2(\pi-6)}{\pi}+\frac{23A_3}{6}-\frac{24A_3}{\pi}+\frac{72A_3}{\pi^2}\right)\right] \qquad (2.19)$$

Подставим (2.19) в (2.4).Рассмотрим первый интеграл:

$$A_1=\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\frac{(t+\frac{\pi}{6})(1-2sint)}{(t-\frac{\pi}{6})(1+2sint)}\left[\frac{(-4t^2A_1-2tA_2-A_3)(t-\frac{\pi}{6})sint}{t^3(t+\frac{\pi}{6})(1-2sint)}-\frac{-2A_1-\frac{6A_2}{\pi}-\frac{18A_3}{\pi^2}}{(t+\frac{\pi}{6})}-\frac{A}{t}\right.$$

$$-\frac{2\left(A_2+A_3-\frac{6A_3}{\pi}\right)}{t}-\left(4A_1+\frac{4A_2(\pi-6)}{\pi}-\frac{23A_3}{6}-\frac{24A_3}{\pi}+\frac{72A_3}{\pi^2}\right)\Bigg]-$$

$$-\frac{(t+\frac{\pi}{6})}{(t-\frac{\pi}{6})}\left[\frac{-2A_1-\frac{6A_2}{\pi}-\frac{18A_3}{\pi^2}}{(t+\frac{\pi}{6})}+\frac{A_3}{t^2}+\frac{2\left(A_2+A_3-\frac{6A_3}{\pi}\right)}{t}+\right.$$

$$\left.+\left(4A_1+\frac{4A_2(\pi-6)}{\pi}+\frac{23A_3}{6}-\frac{24A_3}{\pi}+\frac{72A_3}{\pi^2}\right)\right]d\tau,$$

По теореме Коши

$$\frac{(t+\frac{\pi}{6})(1-2sint)}{(t-\frac{\pi}{6})(1+2sint)}\left[\frac{(-4t^2A_1-2tA_2-A_3)(t-\frac{\pi}{6})sint}{t^3(t+\frac{\pi}{6})(1-2sint)}-\frac{-2A_1-\frac{6A_2}{\pi}-\frac{18A_3}{\pi^2}}{(t+\frac{\pi}{6})}-\frac{A_3}{t^2}\right.$$

$$\left.-\frac{2\left(A_2+A_3-\frac{6A_3}{\pi}\right)}{t}-\left(4A_1+\frac{4A_2(\pi-6)}{\pi}-\frac{23A_3}{6}-\frac{24A_3}{\pi}+\frac{72A_3}{\pi^2}\right)\right]=0$$

Тогда

$$A_1=\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\frac{(t+\frac{\pi}{6})}{(t-\frac{\pi}{6})}\left[\frac{-2A_1-\frac{6A_2}{\pi}-\frac{18A_3}{\pi^2}}{(t+\frac{\pi}{6})}+\frac{A_3}{t^2}+\frac{2\left(A_2+A_3-\frac{6A_3}{\pi}\right)}{t}+\right.$$

$$\left.+\left(4A_1+\frac{4A_2(\pi-6)}{\pi}+\frac{23A_3}{6}-\frac{24A_3}{\pi}+\frac{72A_3}{\pi^2}\right)\right]d\tau \qquad (2.20)$$

Обозначим за

$$f_1=\frac{(t+\frac{\pi}{6})}{(t-\frac{\pi}{6})}\left[\frac{-2A_1-\frac{6A_2}{\pi}-\frac{18A_3}{\pi^2}}{(t+\frac{\pi}{6})}+\frac{A_3}{t^2}+\frac{2\left(A_2+A_3-\frac{6A_3}{\pi}\right)}{t}+\right.$$

$$\left.+\left(4A_1+\frac{4A_2(\pi-6)}{\pi}+\frac{23A_3}{6}-\frac{24A_3}{\pi}+\frac{72A_3}{\pi^2}\right)\right] \qquad (2.21)$$

$$\int_\Gamma f_1 d\tau = 2\pi i(res_0 f_1 + res_{-\frac{\pi}{6}} f_1)$$

Так как $(res_0 f_1 + res_{-\frac{\pi}{6}} f_1 + res_\infty f_1) = 0$, то :

$$A_1 = 2(-res_\infty f_1) \tag{2.22}$$

Найдем $-res_\infty f_1$

Разложим в ряд (2.21)

$$\frac{(t+\frac{\pi}{6})}{(t-\frac{\pi}{6})} = 1 + \frac{\pi}{3t} + \frac{\pi^2}{18t^2} + \frac{\pi^3}{108t^3} + \frac{\pi^4}{648t^4} - ...$$

$$\frac{-2A_1 - \frac{6A_2}{\pi} - \frac{18A_3}{\pi^2}}{(t+\frac{\pi}{6})} = \frac{-2(A_1 + 3\pi(A_2 + 3\pi A_3)))}{t} + \frac{\pi(A_1 + 3\pi(A_2 + 3\pi A_3))}{3t^2} -$$

$$-\frac{\pi^2(A_1 + 3\pi(A_2 + 3\pi A_3))}{18t^3} + \frac{\pi^3(A_1 + 3\pi(A_2 + 3\pi A_3))}{108t^4} - ...$$

Получаем:

$$\left(1+\frac{\pi}{3t}+\frac{\pi^2}{18t^2}+\frac{\pi^3}{108t^3}+\frac{\pi^4}{648t^4}-...\right)\left[\left(\frac{-2(A_1 + 3\pi(A_2 + 3\pi A_3)))}{t}+\frac{\pi(A_1 + 3\pi(A_2 + 3\pi A_3))}{3t^2}\right.\right.$$

$$\left.-\frac{\pi^2(A_1 + 3\pi(A_2 + 3\pi A_3))}{18t^3}+\frac{\pi^3(A_1 + 3\pi(A_2 + 3\pi A_3))}{108t^4}-...\right)+\frac{A_3}{t^2}+\frac{2\left(A_2 + A_3 - \frac{6A_3}{\pi}\right)}{t}+$$

$$\left.+\left(4A_1 + \frac{4A_2(\pi-6)}{\pi} + \frac{23A_3}{6} - \frac{24A_3}{\pi} + \frac{72A_3}{\pi^2}\right)\right] \tag{2.23}$$

Раскрывая скобки,получаем, что

$$res_\infty f_1 = -2\left(A_1 + 3\pi(A_2 + 3\pi A_3)\right) + 2\left(A_2 + A_3 - \frac{6A_3}{\pi}\right) \tag{2.24}$$

Подставим (2.24) в (2.22):

$$A_1 = -4\left(A_1 + 3\pi(A_2 + 3\pi A_3)\right) + 4\left(A_2 + A_3 - \frac{6A_3}{\pi}\right)$$

Анологично проделываем с A_2 и A_3

$$A_2=\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \tau\left[\frac{(t+\frac{\pi}{6})(1-2sint)}{(t-\frac{\pi}{6})(1+2sint)}\left[\frac{(-4t^2A_1-2tA_2-A_3)(t-\frac{\pi}{6})sint}{t^3(t+\frac{\pi}{6})(1-2sint)}-\frac{-2A_1-\frac{6A_2}{\pi}-\frac{18A_3}{\pi^2}}{(t+\frac{\pi}{6})}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{2\left(A_2+A_3-\frac{6A_3}{\pi}\right)}{t}-\left(4A_1+\frac{4A_2(\pi-6)}{\pi}-\frac{23A_3}{6}-\frac{24A_3}{\pi}+\frac{72A_3}{\pi^2}\right)\right]-\right.$$

$$-\frac{(t+\frac{\pi}{6})}{(t-\frac{\pi}{6})}\left[\frac{-2A_1-\frac{6A_2}{\pi}-\frac{18A_3}{\pi^2}}{(t+\frac{\pi}{6})}+\frac{A_3}{t^2}+\frac{2\left(A_2+A_3-\frac{6A_3}{\pi}\right)}{t}+\right.$$

$$\left.\left.+\left(4A_1+\frac{4A_2(\pi-6)}{\pi}+\frac{23A_3}{6}-\frac{24A_3}{\pi}+\frac{72A_3}{\pi^2}\right)\right]\right]d\tau, \qquad (2.25)$$

Пользуясь теоремой Коши получаем:

$$A_2=\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \tau\left[\frac{(t+\frac{\pi}{6})}{(t-\frac{\pi}{6})}\left[\frac{-2A_1-\frac{6A_2}{\pi}-\frac{18A_3}{\pi^2}}{(t+\frac{\pi}{6})}+\frac{A_3}{t^2}+\frac{2\left(A_2+A_3-\frac{6A_3}{\pi}\right)}{t}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(4A_1+\frac{4A_2(\pi-6)}{\pi}+\frac{23A_3}{6}-\frac{24A_3}{\pi}+\frac{72A_3}{\pi^2}\right)\right]\right]d\tau, \qquad (2.23)$$

$$\int_\Gamma \tau f_1 d\tau = 2\pi i(res_0\tau f_1 + res_{-\frac{\pi}{6}}\tau f_1)$$

Найдем $-res_\infty \tau f_1$

Разложим в ряд tf_1

$$\frac{(t+\frac{\pi}{6})t}{(t-\frac{\pi}{6})}=t+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi^2}{18t}+\frac{\pi^3}{108t^2}+\frac{\pi^4}{648t^3}$$

$$\frac{(-2A_1-\frac{6A_2}{\pi}-\frac{18A_3}{\pi^2})t}{(t+\frac{\pi}{6})}=-2(A_1+3\pi(A_2+3\pi A_3))+\frac{\pi(A_1+3\pi(A_2+3\pi A_3))}{3t}-$$

$$-\frac{\pi^2(A_1+3\pi(A_2+3\pi A_3))}{18t^2}+\frac{\pi^3(A_1+3\pi(A_2+3\pi A_3))}{108t^3}-\ldots$$

Подставляем анологично с A_1:

$$\left(t+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi^2}{18t}+\frac{\pi^3}{108t^2}+\frac{\pi^4}{648t^3}-...\right)\left[\left(-2(A_1+3\pi(A_2+3\pi A_3))+\frac{\pi(A_1+3\pi(A_2+3\pi A_3))}{3t}\right.\right.$$

$$\left.-\frac{\pi^2(A_1+3\pi(A_2+3\pi A_3))}{18t^2}+\frac{\pi^3(A_1+3\pi(A_2+3\pi A_3))}{108t^3}-...\right)+\frac{A_3}{t^2}+\frac{2\left(A_2+A_3-\frac{6A_3}{\pi}\right)}{t}+$$

$$\left.+\left(4A_1+\frac{4A_2(\pi-6)}{\pi}+\frac{23A_3}{6}-\frac{24A_3}{\pi}+\frac{72A_3}{\pi^2}\right)\right]$$

$$res_{\infty}\tau f_1=\frac{-\pi^2(A_1+3\pi(A_2+3\pi A_3))}{18}+A_3+\frac{\pi^2(A_1+3\pi(A_2+3\pi A_3))}{9}+$$

$$+\frac{2\pi\left(A_2+A_3-\frac{6A_3}{\pi}\right)}{3} \tag{2.24}$$

Подставляю (2.24) в A_2 получаем:

$$A_2=2\left(\frac{-\pi^2(A_1+3\pi(A_2+3\pi A_3))}{18}+A_3+\frac{\pi^2(A_1+3\pi(A_2+3\pi A_3))}{9}+\right.$$

$$\left.+\frac{2\pi\left(A_2+A_3-\frac{6A_3}{\pi}\right)}{3}\right)$$

Проделываем то же с A_3

$$A_3=\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\tau^2\left[\frac{(t+\frac{\pi}{6})(1-2sint)}{(t-\frac{\pi}{6})(1+2sint)}\left[\frac{(-4t^2A_1-2tA_2-A_3)(t-\frac{\pi}{6})sint}{t^3(t+\frac{\pi}{6})(1-2sint)}-\frac{-2A_1-\frac{6A_2}{\pi}-\frac{18A_3}{\pi^2}}{(t+\frac{\pi}{6})}\right.\right.$$

$$\left.-\frac{2\left(A_2+A_3-\frac{6A_3}{\pi}\right)}{t}-\left(4A_1+\frac{4A_2(\pi-6)}{\pi}-\frac{23A_3}{6}-\frac{24A_3}{\pi}+\frac{72A_3}{\pi^2}\right)\right]-$$

$$-\frac{(t+\frac{\pi}{6})}{(t-\frac{\pi}{6})}\left[\frac{-2A_1-\frac{6A_2}{\pi}-\frac{18A_3}{\pi^2}}{(t+\frac{\pi}{6})}+\frac{A_3}{t^2}+\frac{2\left(A_2+A_3-\frac{6A_3}{\pi}\right)}{t}+\right.$$

$$\left.+\left(4A_1+\frac{4A_2(\pi-6)}{\pi}+\frac{23A_3}{6}-\frac{24A_3}{\pi}+\frac{72A_3}{\pi^2}\right)\right]\Bigg]d\tau, \qquad (2.25)$$

$$A_2=\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \tau^2\left[\frac{(t+\frac{\pi}{6})}{(t-\frac{\pi}{6})}\left[\frac{-2A_1-\frac{6A_2}{\pi}-\frac{18A_3}{\pi^2}}{(t+\frac{\pi}{6})}+\frac{A_3}{t^2}+\frac{2\left(A_2+A_3-\frac{6A_3}{\pi}\right)}{t}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(4A_1+\frac{4A_2(\pi-6)}{\pi}+\frac{23A_3}{6}-\frac{24A_3}{\pi}+\frac{72A_3}{\pi^2}\right)\right]\right]d\tau \qquad (2.26)$$

$$\int_\Gamma \tau^2 f_1 d\tau = 2\pi i(res_0\tau f_1+res_{-\frac{\pi}{6}}\tau f_1) \qquad (2.27)$$

Найдем $-res_\infty\tau^{2}`f_1$

Разложим в ряд

$$\frac{(t+\frac{\pi}{6})t^2}{(t-\frac{\pi}{6})}=t^2+\frac{\pi t}{3}+\frac{\pi^2}{18}+\frac{\pi^3}{108t}+\frac{\pi^4}{648t^2}$$

$$\frac{(-2A_1-\frac{6A_2}{\pi}-\frac{18A_3}{\pi^2})t^2}{(t+\frac{\pi}{6})}=-2(A_1+3\pi(A_2+3\pi A_3))+\frac{1}{3}\pi(A_1+3\pi(A_2+3\pi A_3))-$$

$$-\frac{\pi^2(A_1+3\pi(A_2+3\pi A_3))}{18t}+\frac{\pi^3(A_1+3\pi(A_2+3\pi A_3))}{108t^2}-\frac{\pi^4(A_1+3\pi(A_2+3\pi A_3))}{648t^3}...$$

Подставляем анологично с A_1:

$$\left(t^2+\frac{\pi t}{3}+\frac{\pi^2}{18}+\frac{\pi^3}{108t}+\frac{\pi^4}{648t^2}...\right)\left[\left(-2(A_1+3\pi(A_2+3\pi A_3))+\frac{1}{3}\pi(A_1+3\pi(A_2+3\pi A_3))-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{\pi^2(A_1+3\pi(A_2+3\pi A_3))}{18t}+\frac{\pi^3(A_1+3\pi(A_2+3\pi A_3))}{108t^2}-\frac{\pi^4(A_1+3\pi(A_2+3\pi A_3))}{648t^3}...\right)+$$

$$\left.+\frac{A_3}{t^2}+\frac{2\left(A_2+A_3-\frac{6A_3}{\pi}\right)}{t}+\left(4A_1+\frac{4A_2(\pi-6)}{\pi}+\frac{23A_3}{6}-\frac{24A_3}{\pi}+\frac{72A_3}{\pi^2}\right)\right]$$

Получаем:

$$res_{\infty}\tau^2 f_1 = -\frac{\pi^4(A_1+3\pi(A_2+3\pi A_3))}{648} + \frac{\pi^4(A_1+3\pi(A_2+3\pi A_3))}{324} + \frac{\pi A_3}{3} -$$

$$-\frac{\pi^4(A_1+3\pi(A_2+3\pi A_3))}{324} + \frac{2\pi^2(A_2+A_3-\frac{6A_3}{\pi})}{18} + \frac{-2\pi^3(A_1+3\pi(A_2+3\pi A_3))}{108} +$$

$$+\frac{\pi^4(A_1+3\pi(A_2+3\pi A_3))}{324} \tag{2.28}$$

Подставляю в A_3 получаем:

$$A_3 = \frac{\pi^4(A_1+3\pi(A_2+3\pi A_3))}{108} + \frac{\pi A_3}{2} + \frac{2\pi^2(A_2+A_3-\frac{6A_3}{\pi})}{3} +$$

$$+\frac{-2\pi^3(A_1+3\pi(A_2+3\pi A_3))}{9}\Bigg]$$

Мы свели сингулярное интегральное уравнение с тремя ядрами к решению системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} A_1 = -4\Bigg(A_1+3\pi(A_2+3\pi A_3)\Bigg) + 4\Bigg(A_2+A_3-\frac{6A_3}{\pi}\Bigg) \\ A_2 = 2\Bigg(\frac{\pi^2(A_1+3\pi(A_2+3\pi A_3))}{18} + A_3 + \frac{2\pi\Bigg(A_2+A_3-\frac{6A_3}{\pi}\Bigg)}{3}\Bigg) \\ A_3 = 2\Bigg(\frac{-\pi^2(A_1+3\pi(A_2+3\pi A_3))}{18} + A_3 + \frac{\pi^2(A_1+3\pi(A_2+3\pi A_3))}{9} + \frac{2\pi\Bigg(A_2+A_3-\frac{6A_3}{\pi}\Bigg)}{3}\Bigg) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -5A_1-(12\pi-4)A_2-(36\pi^2-4+\frac{24}{\pi})A_3=0 \\ -\frac{\pi^2}{9}A_1+(\frac{5\pi}{3}-1)A_2+(\pi^2+\frac{4\pi}{3}-22)A_3=0 \\ (-\frac{\pi^2}{9}+\frac{2\pi^2}{9})A_1+(-\frac{\pi^2}{3}+\frac{2\pi^3}{3}+\frac{4\pi}{3})A_2+(-\frac{\pi^3}{3}+\frac{4\pi}{3}-6)A_3=0 \end{cases}$$

Список литературы

[1] Н.П. Векуа. *Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи.* – МОСКВА: Наука,

– 1970. – 379 с.

[2] С.Н. Киясов. *Исследование разрешимости и оценки числа решений одного класса сингулярных интегральных уравнений.* – Сиб.матем.журн.

–2000. –№6.-С.1357-1362.

[3] С.Н. Киясов. *Некоторые классы сингулярных интегральных уравнений,разрешаемые в замкнутой форме..* – Известие высших учебных заведений.Математика.

– 2002. – 31 с.

[4] Ф.Д. Гахов. *Краевые задачи.* – МОСКВА: ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

– 1958. – 640 с.

[5] С.Н. Киясов. *Некоторые классы задач линейного сопряжения для трехмерного вектора,разрешимых в замкнутой форме.* – СМЖ, том 56,№ 2

– 2015. – 389-408 с.