УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 157, кн. 1 Физико-математические науки *2015*

УДК 517.546.1

ОБ УРАВНЕНИИ ГАХОВА В КЛАССАХ ЯНОВСКОГО С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ

А.В. Казанцев

Аннотация

Класс Яновского определяется некоторым кругом из правой полуплоскости, содержащим значения функционала $\zeta f'/f$ для всех функций из этого класса. Множество таких классов-кругов образует вещественно двупараметрическое семейство, «заполняющее» некоторый треугольник Δ. В предыдущих работах автора была установлена максимальная область $\Delta' \subset \Delta$, принадлежность к которой параметров класса обеспечивает каждой его функции свойство единственности (нулевого) корня уравнения Гахова. В настоящей работе такая область вычисляется для семейств классов Яновского над $\Delta \times [0,1]$.

Ключевые слова: уравнение Гахова, множество Гахова, классы Яновского, гиперболическая производная, конформный радиус.

Введение

Как известно [1–3], уравнение Гахова

$$\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} = \frac{2\bar{\zeta}}{1-|\zeta|^2} \tag{1}$$

эквивалентно необходимому условию экстремума

$$\nabla h_f(\zeta) = 0 \tag{2}$$

гиперболической производной

$$h_f(\zeta) = (1-|\zeta|^2)\bigl|f'(\zeta)\bigr| \tag{3}$$

функции f, голоморфной и локально однолистной в круге $\mathbb{D} = \{|\zeta| < 1\}$. Если f однолистна в $\mathbb{D}$, то величина (3) совпадает с конформным радиусом области $f(\mathbb{D})$ в точке $f(\zeta)$ [4]. В статье [3] исследование эквивалентности (1)$\Leftrightarrow$(2) проводилось в контексте внешней обратной краевой задачи [5]; см. также [6–9].

В настоящей статье развивается одно из направлений указанного исследования, связанное с единственностью корня (1) и восходящее к работам [3, 8, 10–12]. Основные результаты представлены в разд. 2. Прежде чем напомнить постановку из [12], на которую они опираются, дадим необходимые определения.

Пусть H – класс всех голоморфных функций в $\mathbb{D}$, H_0 – подкласс функций f, выделяемый из H нормировками $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ и условием локальной однолистности в $\mathbb{D}$: $f'(\zeta) \neq 0$ при $\zeta \in \mathbb{D}$. Для $f \in H_0$ определим множество $M_f = \{a \in \mathbb{D} : \nabla h_f(a) = 0\}$ и число $k_f = \#M_f$ – количество корней уравнения (2). Элементы $a \in M_f$ полностью характеризуются индексами $\gamma_f(a)$ векторного поля $\nabla h_f(\zeta)$ и могут быть только трех типов: локальный максимум ($\gamma_f(a) = +1$), седло ($\gamma_f(a) = -1$) и полуседло ($\gamma_f(a) = 0$) [13]. Известное подразделение на эллиптические, гиперболические и параболические точки используется как вспомогательное [7].

Множество Гахова определяется как $\mathcal{G} = \{f \in H_0 : k_f \le 1\}$ и является объединением подмножеств $\mathcal{G}_1 = \{f \in H_0 : k_f = 1, \gamma_f(M_f) = +1\}$, $\mathcal{G}_0 = \{f \in H_0 : k_f = 0\}$ и $\mathcal{G}_s = \{f \in H_0 : k_f = 1, \gamma_f(M_f) \ne +1\}$ [14–16].

В отмеченных выше работах [6–12] условия единственности корня уравнения (1) строились по подклассам однолистных и локально однолистных функций в форме ограничений на числовые параметры, определяющие подкласс. В [12] предложена следующая формализация построения неулучшаемых признаков единственности, зависящих от параметров.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^k$, $k \ge 1$, и для каждого $\omega \in \Omega$ определен некоторый подкласс $X_\omega \subset H_0$. Подмножество $U \subset \Omega$ называется *областью единственности* для семейства $\mathcal{X} = \{X_\omega\}_{\omega \in \Omega}$, если $X_\omega \subset \mathcal{G}_1$ при каждом $\omega \in U$. Задача состоит в эффективном описании *максимальной* (по включению) области единственности $U_{\max}$ для семейства $\mathcal{X}$.

Решение указанной задачи соответствует построению *неулучшаемого* условия единственности, которое в традиционной форме записывается как импликация

$$f \in X_\omega, \quad \omega \in U_{\max} \Rightarrow g \in \mathcal{G}_1.$$

Подобную структуру имеет, например, ряд условий единственности в [6–8]. Большинство таких условий установлено в предположении $f''(0) = 0$, выделяющем в M_f нулевой элемент. Данное предположение считается выполненным и в настоящей статье; для $X \subset H_0$ обозначим $\widetilde{X} = \{f \in X : f''(0) = 0\}$, тогда, в частности, $\widetilde{\mathcal{G}} = \widetilde{\mathcal{G}}_1 \bigsqcup \widetilde{\mathcal{G}}_s$ [16].

1. Классы Яновского

Пусть $\Delta = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \alpha + \beta > 0,\ \alpha \le 1,\ \beta \le 1\}$. Класс Яновского, отвечающий параметру $(\alpha, \beta) \in \Delta$, обозначается через $S^*[\alpha, \beta]$ и состоит из всех функций $f \in H$ с условиями нормировки $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ и подчиненности

$$\zeta \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} \prec \frac{1 + \beta\zeta}{1 - \alpha\zeta}, \quad \zeta \in \mathbb{D}, \tag{4}$$

означающими существование функции ϕ из леммы Шварца [17, с. 356] такой, что

$$\zeta \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} = \frac{1 + \beta\phi(\zeta)}{1 - \alpha\phi(\zeta)}, \quad \zeta \in \mathbb{D}. \tag{5}$$

Из условия (4) следуют звездообразность и однолистность элементов $S^*[\alpha, \beta]$. На отрезке $L = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \alpha + \beta = 0,\ \alpha \le 1,\ \beta \le 1\}$ будет выполнено равенство $S^*[\alpha, \beta] = \{f(\zeta) = \zeta\}$, а исследование подчиненности (4) при замене ζ на $-\zeta$ показывает, что каждый класс Яновского над Δ имеет своего «двойника» и над множеством $-\Delta = \{-\omega : \omega = (\alpha, \beta) \in \Delta\}$. Таким образом, классы $S^*[\alpha, \beta]$ определены для всех $(\alpha, \beta) \in Q = [0, 1] \times [0, 1]$, однако будет удобнее работать с Δ (ср. с [8, с. 47]).

В соответствии с соглашением, принятым во введении, $\widetilde{S}^*[\alpha, \beta]$ есть подкласс $S^*[\alpha, \beta]$, выделяемый дополнительной нормировкой $f''(0) = 0$, или, эквивалентно, оценкой $|\phi(\zeta)| \le |\zeta|^2$, $\zeta \in \mathbb{D}$, в (5). Введем множества

$$\begin{aligned} &\Delta^0 = \{(\alpha, \beta) \in \Delta : 3(\alpha + \beta) \le 2\}, \\ &\Delta^1 = \{(\alpha, \beta) \in \Delta^0 : 2\beta - 3\alpha \ge -3\}, \\ &\Delta^2 = \{(\alpha, \beta) \in \Delta^0 \setminus \Delta^1 : \alpha < \alpha(\beta),\ \beta \in (-1, -1/5)\}, \end{aligned} \tag{6}$$

где

$$\alpha(\beta) = 1 - \frac{(1+\beta)^3}{(1+\beta)^2 - 16\beta}. \tag{7}$$

Напомним основной результат статьи [12]. Справедливо

Предложение 1. *Множество $\Delta' = \Delta^1 \bigcup \Delta^2$ является максимальной областью единственности для семейства классов $\widetilde{S}^*[\alpha,\beta]$, $(\alpha,\beta) \in \Delta$.*

Неулучшаемость области Δ' устанавливается с помощью семейства функций $f_{\alpha,\beta} \in \widetilde{S}^*[\alpha,\beta]$, $(\alpha,\beta) \in \Delta$, где

$$f_{\alpha,\beta}(\zeta) = \zeta(1-\alpha\zeta^2)^{-(1+\beta/\alpha)/2} \quad \text{при} \quad \alpha \neq 0, \quad f_{0,\beta}(\zeta) = \zeta e^{\beta\zeta^2/2}. \tag{8}$$

Обозначая

$$\Lambda_{\alpha,\beta} = \{\bar{\varepsilon} f_{\alpha,\beta}(\varepsilon\zeta) : |\varepsilon| = 1\}, \quad (\alpha,\beta) \in \Delta, \quad \text{и} \quad A = \{(\alpha(\beta),\beta) : \beta \in (-1,-1/5)\},$$

из результатов [12] получаем следующее дополнение к предложению 1.

Предложение 2. *При $(\alpha,\beta) \in A$ имеет место включение $\widetilde{S}^*[\alpha,\beta] \setminus \Lambda_{\alpha,\beta} \subset \widetilde{\mathcal{G}}_1$.*

Для описания $M_{f_{\alpha,\beta}}$ нам понадобится уравнение

$$\beta(\alpha-\beta)\sigma^2 + [\beta^2 - 5\beta - \alpha(1-\beta)]\sigma + 3(\alpha+\beta) - 2 = 0 \tag{9}$$

с дискриминантом $D = (\alpha+\beta)[(1+\beta)^2 - 16\beta](\alpha - \alpha(\beta))$ и корнями $\sigma = \sigma_\pm$, $\sigma_+ \le \sigma_-$, при $D \ge 0$. Пусть $\rho_\pm = \sqrt{\sigma_\pm}$. В следующем утверждении значения $\rho_\pm$ рассматриваются только при условии неравенства их нулю, а уравнение (1) и функция (3) – только, когда $f = f_{\alpha,\beta}$, $(\alpha,\beta) \in \Delta$.

Предложение 3. *Точки $\zeta = 0$ и $\zeta = \pm\rho_\pm$ исчерпывают множества $M_{f_{\alpha,\beta}}$ в комбинациях, зависящих от разбиения треугольника Δ линиями $3(\alpha+\beta) = 2$ и $\alpha = \alpha(\beta)$.*

Более подробно, при $(\alpha,\beta) \in \Delta'$ единственный элемент $\zeta = 0$ множества $M_{f_{\alpha,\beta}}$ есть максимум функции (3), эллиптический при $3(\alpha+\beta) < 2$ и параболический при $3(\alpha+\beta) = 2$, $\alpha \le 13/15$. Если $(\alpha,\beta) \in \Delta \setminus \Delta'$, то $\zeta = 0$ – гиперболическое седло при $3(\alpha+\beta) > 2$, параболическое седло при $3(\alpha+\beta) = 2$, $\alpha > 13/15$, и эллиптический максимум при $3(\alpha+\beta) < 2$.

Кроме того, для $(\alpha,\beta) \in A$ совпадение $\rho_+ = \rho_-$ порождает два полуседла $\zeta = \pm\rho_+$. Если же $(\alpha,\beta) \in \Delta \setminus (\Delta' \bigcup A)$, то $\rho_+ < \rho_-$. В этом случае максимумы $\pm\rho_-$, эллиптические при $\alpha < 1$, становятся бесконечными при $\alpha = 1$, выходя из $M_{f_{\alpha,\beta}}$ на $\partial\mathbb{D}$, а точки $\zeta = \pm\rho_+$ являются элементами $M_{f_{\alpha,\beta}}$ только при $3(\alpha+\beta) < 2$, будучи гиперболическими седлами.

Доказательство. Поскольку оно представляет собой несколько этапов вычислений, опишем их, выделяя наиболее важные моменты.

Сначала устанавливается вещественность элементов $a = \rho e^{i\theta} \in M_{f_{\alpha,\beta}}$, затем производится переход от (1) к (9) при $\sigma = \rho^2$ и наконец выясняются условия попадания величин $\rho_\pm$ в промежуток $(0,1]$. Для ρ_- таким условием будет принадлежность $(\alpha,\beta) \in \Delta \setminus \Delta'$, в случае ρ_+ добавляется ограничение $3(\alpha+\beta) < 2$. При этом $\rho_+ < 1$, а равенство $\rho_- = 1$ приводит к $\alpha = 1$. Положительность D при $\beta \ge 0$ получается из представления $D = (\alpha+\beta)[(\alpha+\beta)(1+\beta)^2 + 16\beta(1-\alpha)]$. Характер $\zeta = \pm\rho_\pm$ при $D > 0$, $\rho_\pm > 0$ и $\rho_- < 1$ выясняется на основе равенства

$$\{f_{\alpha,\beta}, \rho_\pm e^{i\theta}\} = \frac{2}{(1-\rho_\pm^2)^2} \pm \frac{2\rho_\pm^2\sqrt{D}}{(1+\beta\rho_\pm^2)(1-\alpha\rho_\pm^2)(1-\rho_\pm^2)}, \tag{10}$$

где $e^{i2\theta} = 1$ и, как обычно, $\{f, \zeta\}$ – шварциан функции f. Отсюда немедленно следует, что $\{f_{\alpha,\beta}, \pm\rho_+\} > 2/(1-\rho_+{}^2)^2$; согласно классификации Хиги [7, 18] это означает, что $\zeta = \pm\rho_+$ – гиперболические седла поверхности $h = h_{f_{\alpha,\beta}}(\zeta)$. Определение характера точек $\zeta = \pm\rho_-$ основано на дополнительных вычислениях, которые не приводим ввиду их громоздкости. Отметим только два момента. Во-первых, проверяется, что случай $\beta(\alpha-\beta) = 0$ в уравнении (9), которому отвечает корень $\sigma = \sigma_-$, обеспечивается соответствующим равенством (10). Во-вторых, для заключения об эллиптичности точек $\zeta = \pm\rho_-$ требуется неравенство $|\{f_{\alpha,\beta}, \pm\rho_-\}| < 2/(1-\rho_-{}^2)^2$, в то время как (10) позволяет получить его только без модуля. Недостающая оценка $\{f_{\alpha,\beta}, \pm\rho_-\} > -2/(1-\rho_-{}^2)^2$ устанавливается отдельно.

Исключенные выше ситуации $\mathbb{D} = 0$, $\rho_\pm = 0$ и $\rho_- = 1$ соответствуют условиям $(\alpha,\beta) \in A$, $3(\alpha+\beta) = 2$ и $\alpha = 1$. Для их исследования наряду с прямыми вычислениями будем использовать формулу М.И. Киндера [13, 19]

$$m^+{}_f - m^-{}_f = 1, \tag{11}$$

связывающую величины $m_f^\pm = \#\{a \in M_f : \gamma_f(a) = \pm 1\}$ в предположениях $k_f < \infty$ и $f \in H_0 \bigcap \mathcal{B}_0$, где $\mathcal{B}_0 = \{f \in H : \lim\limits_{\zeta\to\partial\mathbb{D}} h_f(\zeta) = 0\}$ – малый класс Блоха.

Пусть $(\alpha,\beta) \in A$.

Имеем $M_{f_{\alpha,\beta}} = \{0, \pm\rho\}$, где $\rho = \rho_+ = \rho_- > 0$. Удаленность A от прямой $\alpha = 1$ обеспечивает выполнение условия $f_{\alpha,\beta} \in \mathcal{B}_0$, что вместе с $k_{f_{\alpha,\beta}} = 3$ позволяет применить формулу (11). Кроме того, из свойств функций (8) следует, что поверхность $h = h_{f_{\alpha,\beta}}(\zeta)$ имеет одинаковое строение над критическими точками $\zeta = \pm\rho$.

Итак, множество $M_{f_{\alpha,\beta}}$ при $(\alpha,\beta) \in A$ исчерпывается локальным максимумом в $\zeta = 0$ ($\{f_{\alpha,\beta}, 0\} = 3(\alpha+\beta) < 2$) и двумя точками $\zeta = \pm\rho$ одинакового индекса. Если этот индекс равен $+1$, то $m^+{}_{f_{\alpha,\beta}} - m^-{}_{f_{\alpha,\beta}} = 3 - 0 = 3$, а если он равен -1, то $m^+{}_{f_{\alpha,\beta}} - m^-{}_{f_{\alpha,\beta}} = 1 - 2 = -1$. В обоих случаях – противоречие с (11), значит, $\gamma_{f_{\alpha,\beta}} = 0$, то есть $\zeta = \pm\rho$ – полуседла.

Пусть $3(\alpha+\beta) = 2$.

Сначала используем для $\zeta = 0$ упоминавшуюся выше классификацию Хиги. Как уже отмечалось, $\{f_{\alpha,\beta}, 0\} = 3(\alpha+\beta) > 0$. Поэтому для всех значений $(\alpha,\beta) \in \Delta$, лежащих ниже прямой $3(\alpha+\beta) = 2$, максимум при $\zeta = 0$ будет эллиптическим, а для всех $(\alpha,\beta) \in \Delta$ выше указанной прямой точка $\zeta = 0$ будет гиперболическим седлом. При $3(\alpha+\beta) = 2$ и $-1 < \alpha \le 13/15$ имеем $f_{\alpha,\beta} \in \widetilde{\mathcal{G}}_1$, значит, $\zeta = 0$ – параболический максимум функции (3). Остается выяснить характер корня $\zeta = 0$, когда параметр (α,β) пробегает полуотрезок $3(\alpha+\beta) = 2$, $13/15 < \alpha \le 1$.

Если исключить концевую точку $(\alpha,\beta) = (1, -1/3)$ данного полуотрезка, то, кроме $\zeta = 0$, корнями уравнения (1) будут точки $\zeta = \pm\rho_-$ индекса $+1$. Так как $\alpha < 1$, то $f_{\alpha,\beta} \in \mathcal{B}_0$, значит, применима формула (11): $2 - m^-{}_{f_{\alpha,\beta}} = 1$. Ясно, что $m^-{}_{f_{\alpha,\beta}} = 1$, следовательно, $\zeta = 0$ – параболическое седло поверхности $h = h_{f_{\alpha,\beta}}(\zeta)$.

В случае $(\alpha,\beta) = (1, -1/3)$ имеет место тот же результат. Действительно, так как $f_{1,-1/3} \notin \mathcal{B}_0$, то формула (11) здесь не применима, однако можно использовать ее локализацию из [20]: индекс критической точки $\zeta = 0$ при $\alpha = 1$, $\beta = -1/3$ равен алгебраической сумме индексов критических точек в некоторой окрестности нуля при $\alpha = 1$ и $\beta < -1/3$, близких к $-1/3$. Данная сумма определяется вкладом двух седел $\zeta = \pm\rho_+$, а также одного эллиптического максимума $\zeta = 0$ ($\{f_{1,\beta}, 0\} = 3(1+\beta) < 2$ при $\beta < -1/3$), и, таким образом, равна $1 - 2 = -1$.

Пусть $\alpha = 1$ (ср. с [16]).

Имеем $\rho_- = 1$ при $\beta \in (-1, 1]$ и ${\rho_+}^2 = (1+3\beta)/(\beta(1-\beta))$. С ростом β седла $\zeta = \pm\rho_+$ сближаются, а при $\beta = -1/3$ сливаются с нулем, который из локального максимума становится седлом и сохраняет это свойство вплоть до $\beta = 1$. Таким образом, $f_{1,\beta} \notin \mathcal{G}$ при $\beta \in (-1, -1/3)$ и $f_{1,\beta} \in \widetilde{\mathcal{G}}_s$ при $\beta \in [-1/3, 1]$. □

2. «Классы уровня» и «линии уровня» на треугольнике Яновского

Пусть $t \in \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ и $\Delta_t = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \alpha + \beta > 0, \alpha \le 1/t, \beta \le 1/t\}$. Для $t \in \mathbb{R}_+$ и $(\alpha, \beta) \in \Delta_t$ рассмотрим класс $\widetilde{S}^*[\alpha t, \beta t]$, который будет классом Яновского, так как отображение $\Delta_t \to \Delta : (\alpha, \beta) \mapsto (\alpha t, \beta t)$ является взаимно-однозначным. Введем t-аналоги множеств (6):

$$\Delta_t^0 = \{(\alpha, \beta) \in \Delta : 3(\alpha+\beta) \le 2/t\},\ \Delta_t^1 = \{(\alpha, \beta) \in \Delta_t^0 : 2\beta - 3\alpha \ge -3/t\},$$
$$\Delta_t^2 = \{(\alpha, \beta) \in \Delta_t^0 \setminus \Delta_t^1 : \alpha < \alpha_t(\beta)\},$$

где $\alpha_t(\beta) = \alpha(\beta t)/t$, а $\alpha = \alpha(\beta)$ – функция (7). Простыми рассуждениями из предложения 1 получается следующее

Предложение 4. *Пусть* $t \in \mathbb{R}_+$. *Множество* $\Delta_t' = \Delta_t^1 \bigcup \Delta_t^2$ *является максимальной областью единственности для семейства классов* $\widetilde{S}^*[\alpha t, \beta t]$, $(\alpha, \beta) \in \Delta_t$.

Если, наоборот, фиксировать (α, β) и «двигать» t, то можно предложить более содержательную постановку, связанную с «классами уровня» $\widetilde{S}^*[\alpha t, \beta t]$, $0 \le t \le 1$, класса Яновского $\widetilde{S}^*[\alpha, \beta]$ при $(\alpha, \beta) \in \Delta$. А именно, вычислим величину

$$R(\widetilde{S}^*[\alpha, \beta]) = \sup\{\xi \in [0,1] : f \in \widetilde{S}^*[\alpha t, \beta t], t \in [0, \xi] \Rightarrow k_f = 1\} =$$
$$= \sup\{\xi \in [0,1] : t \in [0, \xi] \Rightarrow \widetilde{S}^*[\alpha t, \beta t] \subset \widetilde{\mathcal{G}}_1\}. \quad (12)$$

Величины такого рода, возникающие в проблеме единственности корня уравнения Гахова, изучались в работах [15, 19, 21, 22], и они имеют однолистные прототипы в [23, 24]. Очевидно, если $(\alpha, \beta) \in \Delta'$, то $R(\widetilde{S}^*[\alpha, \beta]) = 1$. Основным результатом настоящей статьи является следующая

Теорема 1. *Пусть* $(\alpha, \beta) \in \Delta \setminus \Delta'$. *Тогда*

$$R(\widetilde{S}^*[\alpha, \beta]) = \begin{cases} \dfrac{2}{3(\alpha+\beta)}, & \textit{если} \quad 3\alpha + 13\beta \ge 0, \\ \dfrac{\alpha + 17\beta}{\beta[7\alpha - \beta + 4\sqrt{(\alpha-\beta)(3\alpha+\beta)}]}, & \textit{если} \quad 3\alpha + 13\beta < 0. \end{cases} \quad (13)$$

Доказательство. Согласно предложению 1 соотношение (12) можно переписать в форме

$$R(\widetilde{S}^*[\alpha, \beta]) = \sup\{\xi \in [0,1] : t \in [0, \xi] \Rightarrow (\alpha t, \beta t) \in \Delta'\},$$

а так как множество Δ' выпукло, то последнее равенство приобретает вид

$$R(\widetilde{S}^*[\alpha, \beta]) = \sup\{t \in [0,1] : t\omega \in \Delta'\} = 1/\inf\{s \ge 1 : \omega \in s\Delta'\} \quad (14)$$

(ср. с [25, с. 147]), где $\omega = (\alpha, \beta)$. Очевидно, выражение, стоящее в знаменателе (14), можно интерпретировать как функционал Минковского $p_{\Delta'}(\omega)$ множества Δ' в силу того, что ограничение $s \ge 1$, вытекающее из определения $R(\widetilde{S}^*[\alpha, \beta])$, заведомо выполняется для $\omega \in \Delta \setminus \Delta'$.

Для работы с функционалами Минковского воспользуемся материалом § 1 главы V из [26]. Чтобы формально удовлетворить определению 7 и условиям леммы 8 из [26] (с. 445), необходимо, чтобы нуль пространства $\mathbb{R}^2$ был C-внутренней точкой множества, опорной функцией которого будет функционал Минковского, совпадающий с $p_{\Delta'}(\omega)$ на $\Delta \setminus \Delta'$. Таким множеством может служить симметризация области Δ' в соответствии с конструкцией в начале предыдущего раздела: $Q' = \Delta' \bigcup L \bigcup (-\Delta')$. Тогда из (14) получается равенство

$$R(\widetilde{S}^*[\alpha, \beta]) = 1/p_{Q'}(\omega), \tag{15}$$

где $p_{Q'}(\omega)$ – функционал Минковского множества Q'.

Для $\omega \in \Delta \setminus \Delta'$ через $\bar{\omega}$ обозначим ближайшую к ω точку границы $\partial Q'$, лежащую на прямой $t\omega$. Из определения Δ' и Q' следует, что $\bar{\omega} \in \partial\Delta' \setminus (L \bigcup l)$, где $l = \{(\alpha, \beta) \in \partial\Delta' : -1 < \alpha < -1/3\}$. Очевидно, найдется единственное значение $\bar{t} \in [0, 1]$ такое, что $\bar{t}\omega = \bar{\omega}$. Далее, так как $\bar{\omega} \in \partial Q'$, то $\bar{\omega}$ – C-граничная точка множества Q' [26] (с. 447). В результате из пп. c), f) леммы 8 [26, с. 445] выводится цепочка равенств

$$\bar{t}p_{Q'}(\omega) = p_{Q'}(\bar{t}\omega) = p_{Q'}(\bar{\omega}) = 1. \tag{16}$$

Обозначая теперь $\bar{t} = R_{\alpha,\beta}$ и преобразуя (15) с помощью (16), окончательно имеем

$$R(\widetilde{S}^*[\alpha, \beta]) = R_{\alpha,\beta}. \tag{17}$$

Из вышеизложенного получаем и способ вычисления $\bar{t} = R_{\alpha,\beta}$: если для $\omega \in \Delta \setminus \Delta'$ точка $\bar{t}\omega$ попадает на участок границы $\partial\Delta' \setminus (L \bigcup l)$, задаваемый уравнением $F(\bar{\omega}) = 0$, то $t = \bar{t}$ находится среди корней уравнения $F(t\omega) = 0$.

Часть $\partial\Delta' \setminus (L \bigcup l)$ границы $\partial\Delta'$ состоит из двух вещественно аналитических дуг, сцепленных в точке $(\alpha, \beta) = (13/15, -1/5)$ и определяемых уравнениями $3(\alpha + \beta) = 2$ и $\alpha = \alpha(\beta)$ (функция (7)) при $3\alpha + 13\beta \geq 0$ и $3\alpha + 13\beta < 0$ соответственно. Таким образом, $\bar{t} = R_{\alpha,\beta}$ определяется из условий $3(\alpha+\beta)\bar{t} = 2$ при $3\alpha + 13\beta \geq 0$ и $\alpha\bar{t} = \alpha(\beta\bar{t})$ при $3\alpha + 13\beta < 0$. С учетом (17) вычисления дают формулу (13), и теорема 1 доказана. $\square$

Из теоремы 1 вытекает условие единственности нулевого корня уравнения Гахова. Представим его в двух видах. Классическая формулировка такова.

Следствие 1. *Пусть $(\alpha, \beta) \in \Delta \setminus \Delta'$. Равенство $k_f = 1$ выполняется для всех функций $f \in \widetilde{S}^*[\alpha t, \beta t]$ с любым t из неулучшаемого промежутка $0 \leq t \leq \bar{t} = R_{\alpha,\beta}$, исключая семейство $\Lambda_{\alpha\bar{t},\beta\bar{t}}$ при $3\alpha + 13\beta < 0$.*

Чтобы сформулировать версию данного условия в терминах максимальной области единственности, введем множества $\Omega = \Delta \times [0, 1]$, $\Omega' = \Delta' \times [0, 1]$, а также

$$\Omega^+ = \{(\alpha, \beta, t) \in \Omega \setminus \Omega' : 3\alpha + 13\beta \geq 0,\ 0 \leq t \leq R_{\alpha,\beta}\},$$
$$\Omega^- = \{(\alpha, \beta, t) \in \Omega \setminus \Omega' : 3\alpha + 13\beta < 0,\ 0 \leq t < R_{\alpha,\beta}\}.$$

Следствие 2. *Максимальной областью единственности для семейства $\widetilde{S}^*[\alpha t, \beta t]$, $(\alpha, \beta, t) \in \Omega$, является множество $\Omega_{\max} = \Omega' \bigcup \Omega^+ \bigcup \Omega^-$.*

Отметим, что следствие 2 не охватывает включения $\widetilde{S}^*[\alpha\bar{t}, \beta\bar{t}] \setminus \Lambda_{\alpha\bar{t},\beta\bar{t}} \subset \widetilde{\mathcal{G}}_1$ с $\bar{t} = R_{\alpha,\beta}$ при $(\alpha, \beta) \in \Delta \setminus \Delta'$ и $3\alpha + 13\beta < 0$, которое содержится в следствии 1 (ср. предложения 1 и 2).

Проекциями на Δ сечений области $\Omega_{\max}$ плоскостями $t = \mathrm{const}$ являются множества $T_t = \Delta'_t \bigcap \Delta$, $0 \leq t \leq 1$, образующие убывающее семейство с $T_0 = \Delta$, $T_1 = \Delta'$. Исследование динамики T_t дает такую детализацию предложения 4:

Следствие 3. *Если* $0 \le t \le 1/3$, *то* $T_t = \Delta$. *Если* $1/3 < t \le 13/15$, *то множество* T_t *замкнуто в* Δ *и представляет собой трапецию с верхним основанием вдоль прямой* $3(\alpha+\beta)t = 2$. *При* $13/15 < t \le 1$ *трапеция* T_t *криволинейна; ее верхнее основание состоит из двух участков, разделяемых прямой* $3\alpha + 13\beta = 0$: *принадлежащего* T_t *отрезка прямой* $3(\alpha+\beta)t = 2$ *и лежащей вне* T_t *дуги кривой* $\alpha = \alpha_t(\beta)$.

Приведем еще одну конструкцию семейства подклассов, связанную с классами Яновского и основанную на «линиях уровня» $f_r(\zeta) = f(r\zeta)/r$, $0 \le r \le 1$, функций $f \in H$. Для $r \in [0,1]$ и $(\alpha,\beta) \in \Delta$ рассмотрим класс $\widetilde{S}_r^*[\alpha,\beta] = \{f_r : f \in \widetilde{S}^*[\alpha,\beta]\}$. При фиксированном $(\alpha,\beta) \in \Delta$ семейство $\widetilde{S}_r^*[\alpha,\beta]$, $0 \le r \le 1$, является возрастающим с $\widetilde{S}_0^*[\alpha,\beta] = \{f(\zeta) = \zeta\}$ и $\widetilde{S}_1^*[\alpha,\beta] = \widetilde{S}^*[\alpha,\beta]$. Связь между классами $\widetilde{S}_r^*[\alpha,\beta]$ и $\widetilde{S}^*[\alpha t,\beta t]$ устанавливает следующее

Предложение 5. *Включение* $\widetilde{S}_r^*[\alpha,\beta] \subset \widetilde{S}^*[\alpha r^2,\beta r^2]$ *справедливо при любом* $r \in [0,1]$; *противоположное включение неверно.*

Следует добавить только, что построение функции $h \in \widetilde{S}^*[\alpha r^2,\beta r^2] \setminus \widetilde{S}_r^*[\alpha,\beta]$ осуществляется с помощью известной конструкции из [27], с. 145.

Аналогично (12) определим величину

$$\rho(\widetilde{S}^*[\alpha,\beta]) = \sup\{\xi \in [0,1] : r \in [0,\xi] \Rightarrow \widetilde{S}_r^*[\alpha,\beta] \subset \widetilde{\mathcal{G}}_1\}. \tag{18}$$

В отличие от (12), величина (18) допускает «потраекторное» описание. А именно, пусть $\bar{r}_f = \sup\{\xi \in [0,1] : r \in [0,\xi] \Rightarrow k_{f_r} = 1\}$ – функционал первого выхода из множества $\widetilde{\mathcal{G}}_1$ вдоль «линий уровня» функции $f \in H_0$ [15, 16, 19, 21, 22]. Тогда

$$\rho(\widetilde{S}^*[\alpha,\beta]) = \inf\{\bar{r}_f : f \in \widetilde{S}^*[\alpha,\beta]\}. \tag{19}$$

Напомним, что, кроме вычисления величины (19), соответствующая постановка из [16] предполагает эффективное описание множества

$$E(\widetilde{S}^*[\alpha,\beta]) = \{f \in \widetilde{S}^*[\alpha,\beta] : \bar{r}_f = \rho(\widetilde{S}^*[\alpha,\beta])\}.$$

Теорема 2. *Пусть* $(\alpha,\beta) \in \Delta \setminus \Delta'$. *Тогда*

$$\rho(\widetilde{S}^*[\alpha,\beta]) = \sqrt{R(\widetilde{S}^*[\alpha,\beta])} \quad \text{и} \quad E(\widetilde{S}^*[\alpha,\beta]) = \Lambda_{\alpha,\beta}.$$

Доказательство. Справедливость утверждения вытекает из теоремы 1, предложения 5 и соотношения $(f_{\alpha,\beta})_r = f_{\alpha r^2,\beta r^2}$ для экстремального семейства (8).

В частном случае (при $\alpha = 1$) теорема 2 доказана в [16]. □

В заключение отметим, что для семейств $\widetilde{S}_r^*[\alpha,\beta]$, $0 \le r \le 1$, $(\alpha,\beta) \in \Delta$, справедливы аналоги следствий 1–3.

Summary

A.V. Kazantsev. On the Gakhov Equation in the Janowski Classes with Additional Parameter.

The Janowski class is characterized by a suitable disk in the right half-plane containing values of the functional $\zeta f'/f$ for all functions of this class. The set of such classes-disks forms a two-dimensional family "filling" Δ triangle. In our previous works, the maximum domain $\Delta' \subset \Delta$ of the parameters ensuring the uniqueness property of the (zero) root of the Gakhov equation for each function of the corresponding class was determined. In the present paper, such a domain is found for the families of the Janowski classes over $\Delta \times [0,1]$.

Keywords: Gakhov equation, Gakhov set, Janowski classes, hyperbolic derivative, conformal (inner mapping) radius.

Литература

1. *Peschl E.* Über die Werwendung von Differentialinvarianten bei gewissen Funktionenfamilien und die Übertragung einer darauf gegründeten Methode auf partielle Differentialgleichungen vom elliptischen Tipus // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. – 1963. – V. 336/6. – P. 1-22.
2. *Ruscheweyh St., Wirths K.-J.* On extreme Bloch functions with prescribed critical points // Math. Z. – 1982. – Bd. 180. – S. 91–106.
3. *Аксентьев Л.А.* Связь внешней обратной краевой задачи с внутренним радиусом области // Изв. вузов. Матем. – 1984. – № 2. – С. 3–11.
4. *Полиа Г., Сегё Г.* Задачи и теоремы из анализа. Ч. 2. – М.: Наука, 1978. – 432 с.
5. *Гахов Ф.Д.* Об обратных краевых задачах // Докл. АН СССР. – 1952. – Т. 86, № 4. – С. 649–652.
6. *Аксентьев Л.А., Казанцев А.В., Киселев А.В.* О единственности решения внешней обратной краевой задачи // Изв. вузов. Матем. – 1984. – № 10. – С. 8–18.
7. *Аксентьев Л.А., Казанцев А.В.* Новое свойство класса Нехари и его применение // Труды семинара по краевым задачам. – Казань: Казан. гос. ун-т, 1990. – Вып. 25. – С. 33–51.
8. *Аксентьев Л.А., Казанцев А.В., Киндер М.И., Киселев А.В.* О классах единственности внешней обратной краевой задачи // Труды семинара по краевым задачам. – Казань: Казан. гос. ун-т, 1990. – Вып. 24. – С. 39–62.
9. *Kazantsev A. V.* On a problem of Polya and Szegö // Lobachevskii J. Math. – 2001. – V. 9. – P. 37–46.
10. *Аксентьев Л.А., Хохлов Ю.Е., Широкова Е.А.* О единственности решения внешней обратной краевой задачи // Матем. заметки. – 1978. – Т. 24. – С. 319–333.
11. *Аксентьев Л.А., Казанцев А.В., Попов Н.И.* О теоремах единственности для внешней обратной краевой задачи в подклассах однолистных функций// Изв. вузов. Матем. – 1998. – № 8. – С. 3–13.
12. *Жаркова Т.В., Казанцев А.В.* О методе подчиненности в проблеме единственности корня уравнения Гахова // Труды Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. – Казань: Казан. матем. о-во, 2013. – Т. 46. – С. 189–190.
13. *Киндер М.И.* Исследование уравнения Ф.Д. Гахова в случае многосвязных областей // Труды семинара по краевым задачам. – Казань: Казан. гос. ун-т, 1985. – Вып. 22. – С. 104–116.
14. *Казанцев А.В.* Четыре этюда на тему Ф.Д. Гахова: учеб. пособие. – Йошкар-Ола: Мар. гос. ун-т, 2012. – 64 с.
15. *Казанцев А.В.* Множество Гахова в пространстве Хорнича при блоховских ограничениях на предшварцианы // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2013. – Т. 155, кн. 2. – С. 65–82.
16. *Казанцев А.В.* О выходе из множества Гахова, контролируемом условиями подчиненности // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2014. – Т. 156, кн. 1. – С. 31–43.
17. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1966. – 628 с.
18. *Haegi H.R.* Extremalprobleme und Ungleichungen konformer Gebietsgrössen // Compositio Math. – 1950. – V. 8, F. 2. – P. 81-111.

19. *Казанцев А.В.* Бифуркации и новые условия единственности критических точек гиперболических производных // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2011. – Т. 153, кн. 1. – С. 180–194.

20. *Казанцев А.В.* Бифуркации корней уравнения Гахова с левнеровской левой частью // Изв. вузов. Матем. – 1993. – № 6. – С. 69–73.

21. *Kazantsev A. V.* Parametric families of inner mapping radii // 2nd European Congr. Math., Budapest, July 22-26, 1996, Abstracts. – Budapest: János Bolyai Math. Soc., 1996. – P. 30.

22. *Казанцев А.В., Попов Н.И.* О некоторых задачах, связанных с функционалами изопериметрического типа // Труды Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. – Казань: Казан. матем. о-во, 2002. – Т. 14. – С. 144–157.

23. *Lehto O.* Univalent functions, Schwarzian derivatives and quasiconformal mappings // Monogr. Ensegn. Math. – 1979. – No 2. – P. 73–84.

24. *Авхадиев Ф.Г.* Конформные отображения и краевые задачи. – Казань: Казан. фонд «Математика», 1996. – 216 с.

25. *Рид М., Саймон Р.* Методы современной математической физики. Т. 1. – М.: Мир, 1977. – 359 с.

26. *Данфорд Н., Шварц Дж.Т.* Линейные операторы. Общая теория. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 896 с.

27. *Стоилов С.* Теория функций комплексного переменного. – Т. 1. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 364 с.

Поступила в редакцию
18.04.14

Казанцев Андрей Витальевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической статистики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: *kazandrey0363@rambler.ru*