Известия вузов. Математика
2013, №8, с. 24–33

http://old.kpfu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Б.Г. ГРЕБЕНЩИКОВ

К ВОПРОСУ ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Аннотация. В работе изучена проблема экспоненциальной устойчивости линейной системы дифференциальных уравнений с постоянным запаздыванием, при этом правая часть одной из подсистем содержит множитель в виде экспоненты. Получены достаточные условия существования асимптотически периодического решения неоднородной системы.

Ключевые слова: асимптотическая устойчивость, экспоненциальная оценка, асимптотически периодическое решение.

УДК: 517.977

1. Устойчивость нестационарных однородных систем. Рассматривается линейная однородная система с постоянным запаздыванием

$$\begin{aligned} dx(t)/dt =& A_1(t)x(t) + A_2(t)x(t-\sigma) + B_1(t)y(t) + B_2(t)y(t-\sigma), \\ dy(t)/dt =& \theta_0 e^t[A_3x(t) + A_4x(t-\sigma) + B_3y(t) + B_4y(t-\sigma)], \\ & t \geq 0, \quad \theta_0 > 0, \quad \sigma = \text{const}, \quad \sigma > 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь $A_i(t)$, $B_i(t)$ $(i = 1, 2)$ — периодические (периода $0 < T \leq \sigma$), непрерывно дифференцируемые матрицы размерности $m \times m$, A_k, B_k $(k = 3, 4)$ — постоянные матрицы размерности $m \times m$, $x(t)$, $y(t)$ — m-мерные вектор-функции времени (аргумента) t.

Норму вектора $w = \{w_j\}^{(\top)}$ (здесь w_j — компоненты вектора w, значок $(\top)$ означает транспонирование вектора) определим равенством $\|w\| = \sum\limits_{j=1}^{m} |w_j|$. Норму матрицы $D = \{d_{ij}\}$ $(i, j = 1, \dots, m)$ определим в соответствии с нормой вектора ([1], с. 12): $\|D\| = \max\limits_j \sum\limits_i |d_{ij}|$.

Свойства системы с постоянными матрицами A_i^0, B_i^0 $(i = 1, 2)$ изучались автором ранее в работах [2]–[4]. Отметим, что к системе (1.1) заменой времени (аргумента) $t = \ln(\frac{\theta}{\theta_0})$ сводится система с линейным запаздыванием

$$\begin{aligned} d\widehat{x}(\theta)/d\theta =& \frac{1}{\theta}[\widehat{A}_1(\theta)\widehat{x}(\theta) + \widehat{A}_2(\theta)\widehat{x}(\mu\theta) + \widehat{B}_1(\theta)\widehat{y}(t) + \widehat{B}_2(\theta)\widehat{y}(\mu\theta)], \\ d\widehat{y}(\theta)/d\theta =& A_3\widehat{x}(\theta) + A_4\widehat{x}(\mu\theta) + B_3\widehat{y}(\theta) + B_4y(\mu\theta), \\ & \theta \geq \theta_0 > 0, \quad \sigma = -ln(\mu), \quad 0 < \mu < 1. \end{aligned}$$

На начальном множестве $[\mu\theta_0, \theta_0]$ задается начальная вектор-функция $\widehat{\phi}(\theta)$. Решение этой системы может быть найдено последовательным интегрированием на участках $h_n(\theta) = \left(\frac{\theta_0}{\mu^n}, \frac{\theta_0}{\mu^{n+1}}\right]$. Данный метод не позволяет выяснить асимптотические свойства этой системы.

Поступила 02.05.2012

Доказано ранее, что для системы

$$\begin{gathered} dx^0(t)/dt = A_1^0 x^0(t) + A_2^0 x^0(t-\sigma) + B_1^0 y^0(t) + B_2^0 y^0(t-\sigma), \\ dy^0(t)/dt = \theta_0 e^t [A_3 x^0(t) + A_4 x^0(t-\tau) + B_3 y^0(t) + B_4 y^0(t-\tau)], \quad t \geq 0, \end{gathered} \tag{1.2}$$

при выполнении совокупности следующих условий:
1) корни λ характеристического уравнения

$$|A_1^0 + A_2^0 e^{-\lambda\sigma} - \lambda E| = 0$$

имеют отрицательную вещественную часть, т. е.

$$\operatorname{Re}\lambda < -\beta_1, \quad \beta_1 = \mathrm{const}, \quad \beta_1 > 0; \tag{1.3}$$

2) собственные числа ν матрицы B_3 имеют отрицательную вещественную часть, т. е.

$$\operatorname{Re}\nu < -\beta_2, \quad \beta_2 = \mathrm{const}, \quad \beta_2 > 0; \tag{1.4}$$

3) корни p характеристического уравнения

$$\left| B_3 + B_4 e^{-p\sigma} - \left(A_3 + A_4 e^{-p\sigma}\right) \left(A_1^0 + A_2^0 e^{-p\sigma} - pE\right)^{-1} \left(B_1^0 + B_2^0 e^{-p\sigma}\right) \right| = 0$$

удовлетворяют неравенству

$$\operatorname{Re}\nu < -\beta_3, \quad \beta_3 = \mathrm{const}, \quad \beta_3 > 0, \tag{1.5}$$

решение $\{x^0(t), y^0(t)\}^\top$ экспоненциально устойчиво, причем данная система устойчива по первому приближению. Для системы (1.2) в работе [2] с использованием преобразования Лапласа [5] показано, что при выполнении неравенств (1.3)–(1.5) решение этой системы $x^0(t, \phi_1(\eta)), y^0(t, \phi_2(\eta))$ (определенное начальной вектор-функцией $\phi^{(\top)}(\eta) = \{\phi_1(\eta), \phi_2(\eta)\}$: $x(\eta) = \phi_1(\eta)$, $y(\eta) = \phi_2(\eta)$, $\eta \in [-\sigma, 0]$) удовлетворяет оценке

$$\|x^0(t)\| + \|y^0(t)\| \leq M_0 e^{-\beta_0 t} [\sup_\eta \|\phi_1(\eta)\| + \sup_\eta \|\phi_2(\eta)\|], \quad t \geq 0, \tag{1.6}$$

$$M_0 = \mathrm{const}, \quad M_0 > 1, \quad \beta_0 = \min\{\beta_1, \beta_3\} - \overline{\varepsilon}$$

($\beta_0 > 0$ при достаточно малом положительном $\overline{\varepsilon}$).

Определим теперь решение исходной системы (1.1) той же самой вектор-функцией $\phi(\eta)$ (полагаем $\sup_\eta \|\phi_1(\eta)\| + \sup_\eta \|\phi_2(\eta)\| < \delta_0$, δ_0 — достаточно малое положительное число). Чтобы лучше понять особенности исходной системы, перейдем от системы (1.1) (конечной системы дифференциальных уравнений с запаздыванием на бесконечном промежутке времени) к счетной системе обыкновенных дифференциальных уравнений, заданной на конечном промежутке времени $[0, \sigma]$, полагая $x_{n+1}(t) = x(n\sigma + t)$, $y_{n+1}(t) = y(n\sigma + t)$ $(n = 1, 2 \ldots)$, $t \in [0, \sigma]$). Получаем совокупность двух подсистем

$$dx_{n+1}(t)/dt = A_1(t) x_{n+1}(t) + A_2(t) x_n(t) + B_1(t) y_{n+1}(t) + B_2(t) y_n(t), \tag{1.7}$$

$$\varepsilon_n dy_{n+1}(t)/dt = e^t [A_3 x_{n+1}(t) + A_4 x_n(t) + B_3 y_{n+1}(t) + B_4 y_n(t)], \tag{1.8}$$

$$t_0 \leq t \leq t_0 + \sigma, \quad \varepsilon_n = e^{-n\sigma}/\theta_0 = \mu^n/\theta_0, \quad x_0(t) = \phi_1(t-\sigma), \quad y_0 = \phi_2(t-\sigma),$$

для которой справедливы граничные условия ([5], с. 103)

$$x_{n+1}(0) = x_n(\sigma), \quad y_{n+1}(0) = y_n(\sigma).$$

Таким образом, нахождение решения системы (1.1) сведено к последовательному интегрированию "дифференциально-разностной" системы в пространстве непрерывных вектор-функций, заданных на отрезке $[0, \sigma]$. Отметим некоторые свойства подсистемы (1.8). Ввиду того, что $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$, подсистема (1.8) является сингулярно возмущенной [2], [3], следовательно, совокупность решений системы (1.7), (1.8) содержит медленные $(x_n(t))$ и быстрые $(y_n(t))$ переменные. Кроме того, при достаточно больших n именно наличие малого параметра ε_n позволяет рассматривать асимптотическое поведение подсистемы (1.7) при периодических матрицах $A_i(t)$, $B_i(t)$ $(i = 1, 2)$.

Известно ([6], с. 484), что периодические матрицы $A_k(t)$, $B_k(t)$, имеющие непрерывные производные, могут быть представлены в виде абсолютно сходящихся рядов Фурье:

$$A_k(t) = \frac{\alpha_0^k}{2} + \sum_{j=1}^{\infty}[\alpha_j^k \cos(jrt) + \beta_j^k \sin(jrt)],$$

$$B_k(t) = \frac{\widehat{\alpha}_0^k}{2} + \sum_{j=1}^{\infty}[\widehat{\alpha}_j^k \cos(jrt) + \widehat{\beta}_j^k \sin(jrt)], \quad k = 1, 2; \quad r = 2\pi/\sigma.$$

В силу абсолютной сходимости данных рядов найдется натуральное число $\widehat{k}$ такое, что справедливы приближенные равенства

$$\begin{aligned} A_k(t) &\approx \frac{\alpha_0^k}{2} + \sum_{j=1}^{\widehat{k}}[\alpha_j^k \cos(jrt) + \beta_j^k \sin(jrt)] = \widehat{A}_k(t), \\ B_k(t) &\approx \frac{\widehat{\alpha}_0^k}{2} + \sum_{j=1}^{\widehat{k}}[\widehat{\alpha}_j^k \cos(jrt) + \widehat{\beta}_j^k \sin(jrt)] = \widehat{B}_k(t), \quad k = 1, 2. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Сделав в системе (1.7), (1.8) замену времени $t = \varepsilon_n \tau_n$, учтя аппроксимации (1.9), получим

$$\begin{aligned} dx_{n+1}(\tau_n)/d\tau_n = \varepsilon_n[\widehat{A}_1(\varepsilon_n\tau_n)x_{n+1}(\tau_n) + \widehat{A}_2(\varepsilon_n\tau_n)x_n(\tau_n) + \\ + \widehat{B}_1(\varepsilon_n\tau_n)y_{n+1}(\tau_n) + \widehat{B}_2(\varepsilon_n\tau_n)y_n(\tau_n)], \end{aligned} \tag{1.10}$$

$$dy_{n+1}(\tau_n)/d\tau_n = e^{\varepsilon_n\tau_n}\left[A_3x_{n+1}(\tau_n) + A_4x_n(\tau_n) + B_3y_{n+1}(\tau_n) + B_4y_n(\tau_n)\right], \tag{1.11}$$

$$0 \le \tau_n \le \frac{\sigma}{\varepsilon_n}, \quad \varepsilon_n = \frac{e^{-n\sigma}}{\theta_0}, \quad \lim_{n\to\infty}\varepsilon_n = 0, \quad \sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon_j < \infty.$$

Рассмотрим подсистему (1.10) при достаточно больших n. Известно ([7], с. 177), что совокупность нестационарных членов в правой части данной подсистемы можно рассматривать как линейные "осциллирующие" возмущения с достаточно малой частотой, нормы которых удовлетворяют соответственно оценкам ([8], с. 259)

$$\int_s^\tau \delta_j(s)ds \le \widehat{\varepsilon}_n(\tau - s), \lim_{n\to\infty}\widehat{\varepsilon}_n = 0, \quad j = 1, 2, \tag{1.12}$$

где

$$\delta_1(\tau_n) = \|x_{n+1}(\tau_n)\|, \quad \delta_1(\tau_n) = \|y_{n+1}(\tau_n)\|, \quad \delta_2(\tau_{n-1}) = \|x_n(\tau_n)\|, \quad \delta_2(\tau_{n-1}) = \|y_n(\tau_n)\|.$$

Следовательно, подсистемой первого приближения для (1.10) при достаточно больших n является подсистема вида

$$dx_{n+1}^0(\tau_n)/d\tau_n = \varepsilon_n\left\{\frac{\alpha_0^1}{2}x_{n+1}^0(\tau_n) + \frac{\alpha_0^2}{2}x_n^0(\tau_n) + \frac{\alpha_0^3}{2}y_{n+1}^0(\tau_n) + \frac{\alpha_0^4}{2}y_n^0(\tau_n)\right\},$$

а системой первого приближения, соответствующей (1.10), (1.11), будет дифференциально-разностная система

$$dx^0_{n+1}(\tau_n)/d\tau_n = \varepsilon_n\Big\{\frac{\alpha^1_0}{2}x^0_{n+1}(\tau_n) + \frac{\alpha^2_0}{2}x^0_n(\tau_n) + \frac{\alpha^3_0}{2}y^0_{n+1}(\tau_n) + \frac{\alpha^4_0}{2}y^0_n(\tau_n)\Big\},$$
$$dy^0_{n+1}(\tau_n)/dt = e^{\varepsilon_n\tau_n}\big\{A_3x^0_{n+1}(\tau_n) + A_4x^0_n(\tau_n) + B_3y^0_{n+1}(\tau_n) + B_4y^0_n(\tau_n)\big\}. \tag{1.13}$$

Пусть теперь для системы (1.13) справедливы условия экспоненциальной устойчивости, т. е. справедливы неравенства (1.3), (1.4) и (1.5).

Теорема 1. *В случае выполнения условий* (1.3), (1.4) *и* (1.5) *для постоянных* (*"усредненных"*) *матриц* α^k_0, $k = 1,\dots,4$, *система* (1.7), (1.8) *экспоненциально устойчива.*

Доказательство. Запишем решение системы (1.10), (1.11) в операторном виде

$$\begin{pmatrix} x^0_{n+1}(\tau_n)\\ y^0_{n+1}(\tau_n)\end{pmatrix} = T_{\tau_n,n}\begin{pmatrix} x^0_n(\tau_n), y^0_{n+1}(\tau_n), y^0_n(\tau_n)\\ y^0_n(\tau_n), x^0_{n+1}(\tau_n), x^0_n(\tau_n)\end{pmatrix},$$

где линейный оператор сдвига

$$T_{\tau_n,n} = \begin{Bmatrix} T^1_{\tau_n,n}\\ T^2_{\tau_n,n}\end{Bmatrix} = \begin{cases} U_n(\tau_n)u_n(\frac{\sigma}{\varepsilon_n}) + \int\limits_0^{\tau_n} U_n(\tau_n - s)0.5\varepsilon_n\alpha^2_0u_n(s)ds +\\ \quad + \int\limits_0^{\tau_n} U_n(\tau_n - s)0.5\varepsilon_n(\alpha^3_0v_{n+1}(s) + \alpha^4_0v_n(s))ds,\\ V_n(\tau_n)v_n(\frac{\sigma}{\varepsilon_n}) + \int\limits_0^{\tau_n} V_n(\tau_n, s)e^{\varepsilon_n s}(B_4v_n(s) +\\ \quad + A_3u_{n+1}(s) + A_4u_n(s))ds.\end{cases} \tag{1.14}$$

Здесь $U_n(\tau - s)$ — фундаментальная матрица решений однородной системы

$$d\overline{u}/d\tau = 0.5\varepsilon_n[\alpha^1_0\overline{u}(\tau) + \alpha^2_0\overline{u}(\tau - \sigma)], \quad 0 \le \tau \le \sigma/\varepsilon_n,$$

при этом (ввиду неравенства (1.5)) справедлива оценка

$$\|U_n(\tau - s)\| \le M_1e^{-\varepsilon_n\beta_1(\tau - s)}, \quad M_1 > 0. \tag{1.15}$$

Аналогично, матрица

$$V_n(\tau, s) = \exp\left\{B_3\frac{e^{\varepsilon_n\tau} - e^{\varepsilon_n s}}{\varepsilon_n}\right\}$$

является фундаментальной матрицей решений однородной системы

$$d\overline{v}/d\tau = e^{\varepsilon_n\tau}B_3\overline{v}(\tau),$$

и для нее также справедлива оценка

$$\|V_n(\tau, s)\| \le M_2\exp\left\{\frac{-\beta_2}{\varepsilon_n}(e^{\varepsilon_n\tau} - e^{\varepsilon_n s})\right\}, \quad M_2 \ge 1. \tag{1.16}$$

Отметим, что ввиду оценок (1.15), (1.16) данный оператор $T_{\tau_n,n}$ равномерно ограничен [3], [4]: $\|T_{\tau_n,n}\| \le \overline{M}$, $\overline{M} > 1$. Из неравенства (1.6) для произведения операторов $T_{n_j,j}$ следует оценка [4]

$$\left\|T_{\tau_n,n}\prod_{j=0}^{n-1}T_{s_j,j}w_0(s)\right\| \le \widehat{M}_0q^n(\sup_\eta\|x_0(\eta)\| + \sup_\eta\|y_0(\eta)\|),$$

$$w^{(\top)}_0(\eta) = \{x_0(\eta), y_0(\eta)\}, \quad \eta\in[-\sigma, 0], \quad q = e^{-\beta_0\sigma}, \quad 0 < q < 1, \quad \widehat{M}_0 > 1.$$

Полагаем, что ε_n достаточно мало при $n \ge N$, N — натуральное число.

Будем исследовать решение “возмущенной” системы (1.10), (1.11) по шагам. Обозначая “возмущения” соответственно

$$f^1_{n+1}(\tau_n, x_{n+1}(\tau_n), x_n(\tau_n)) = \big(\widehat{A}_1(\tau_n) - \alpha^1_0/2\big)x_{n+1}(\tau_n) + \big(\widehat{A}_2(\tau_n) - \alpha^2_0/2\big)x_n(\tau_n),$$
$$f^2_{n+1}(\tau_n, y_{n+1}(\tau_n), y_n(\tau_n)) = \big(\widehat{B}_1(\tau_n) - \widehat{\alpha}^1_0/2\big)y_{n+1}(\tau_n) + \big(\widehat{B}_2(\tau_n) - \widehat{\alpha}^2_0/2\big)y_n(\tau_n),$$

записывая решение данной системы в интегральной форме (в форме Коши), считая неоднородностями возмущающие (осциллирующие) члены ([1], с. 162), представим ее решение также в операторном виде

$$\begin{pmatrix} x_{n+1}(\tau_n) \\ y_{n+1}(\tau_n)\end{pmatrix} = T_{\tau_n,n}\begin{pmatrix} x^0_n(\tau_n), y^0_{n+1}(\tau_n), y^0_n(\tau_n) \\ y^0_n(\tau_n), x^0_{n+1}(\tau_n), x^0_n(\tau_n)\end{pmatrix} + \\ + I_n\left(f^1_{n+1}(\tau_n, x_{n+1}(\tau_n), x_n(\tau_n)), f^2_{n+1}(\tau_n, y_{n+1}(\tau_n), y_n(\tau_n))\right).$$

Здесь I_n — линейный интегральный оператор, определенный следующим образом:

$$I^1_n(f^1_{n+1}(\tau_n, x_{n+1}(\tau_n), x_n(\tau_n)), f^2_{n+1}(\tau_n, y_{n+1}(\tau_n), y_n(\tau_n))) = \\ = \int_0^{\tau_n} U_n(\tau_n - s_n)\varepsilon_n f^1_{n+1}(s_n, x_{n+1}(s_n), x_n(s_n))ds_n + \\ + \int_0^{\tau_n} U_n(\tau_n - s_n)\varepsilon_n f^2_{n+1}(s_n, y_{n+1}(s_n), y_n(s_n))ds_n.$$

Учитывая оценки (1.12), покажем, что члены, содержащие величины $f^1_{n+1}(\tau_n, x_{n+1}(\tau_n), x_n(\tau_n))$, $f^2_{n+1}(\tau_n, y_{n+1}(\tau_n), y_n(\tau_n))$, имеют более высокий порядок малости, нежели невозмущенные члены. Пусть $\tau_n > 1$, $0 \le s_n \le k + \vartheta$, k — натуральное число, $\vartheta = \mathrm{const}$, $0 < \vartheta < 1$. Тогда имеем цепь неравенств

$$\|I^1_n(f^1_{n+1}(\tau_n, x_{n+1}(\tau_n), x_n(\tau_n)))\| \le \\ \le \int_0^{\tau_n} M_1 e^{-\varepsilon_n\beta_1(\tau_n - s_n)}\varepsilon_n\delta_1(s_n)\|x_{n+1}(s_n)\|ds_n + \int_0^{\tau_n} M_1 e^{-\varepsilon_n\beta_1(\tau_n - s_n)}\varepsilon_n\delta_2(s_n)\|x_n(s_n)\|ds_n \le \\ \le M_1 e^{-\varepsilon_n\beta_i\tau_n}\sup_{0\le s_n\le\tau_n}\|x_{n+1}(s_n)\|\sum_{j=1}^{k+1} e^{\varepsilon_n\beta_1 j}\int_j^{j+1}\varepsilon_n\delta_1(r)dr + \\ + M_1 e^{-\varepsilon_n\beta_1\tau_n}\sup_{0\le s_n\le\tau_n}\|x_n(s_n)\|\sum_{j=1}^{k+1} e^{\varepsilon_n\beta_1 j}\int_j^{j+1}\varepsilon_n\delta_2(r)dr \le \\ \le \varepsilon_n\widehat{\varepsilon}_n M_1\frac{e^{\varepsilon_n\beta_1}}{e^{\varepsilon_n\beta_1} - 1}\sup_{0\le s_n\le\tau_n}(\|x_{n+1}(s_n)\| + \|x_n(s_n)\|).$$

Отметим, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\varepsilon_n}{e^{\varepsilon_n\beta_1}-1} = \frac{1}{\beta_1}$.

Если $\tau \le 1$, то

$$M_1\int_0^s e^{-\varepsilon_n\beta_1(\tau_n - s_n)}\varepsilon_n\delta_1(s_n)\|x_{n+1}(s_n)\|ds_n + M_1\int_0^s e^{-\varepsilon_n\beta_1(\tau_n - s_n)}\varepsilon_n\delta_2(s_n)\|x_n(s_n)\|ds_n \le \\ \le M_1\varepsilon_n\widehat{\varepsilon}_n\big(\sup_{0\le s_n\le\tau_n}\|x_{n+1}(s_n)\| + \sup_{0\le s_n\le\tau_n}\|x_{n+1}(s_n)\|\big).$$

В обоих случаях сумма данных интегралов не превосходит величины

$$\mathbf{O}(\widehat{\varepsilon}_n)\big(\sup_{0\le s_n\le\tau_n}\|x_{n+1}(s_n)\| + \sup_{0\le s_n\le\tau_n}\|x_n(s_n)\|\big). \tag{1.17}$$

Если теперь оценить величину $\|I_n^1(f_{n+1}^2(\tau_n, y_{n+1}(\tau_n), y_n(\tau_n)))\|$, то получим аналогичную оценку

$$\|I_n^1(f_{n+1}^2(\tau_n, y_{n+1}(\tau_n), y_n(\tau_n)))\| = \mathbf{O}(\widehat{\varepsilon}_n)\big(\sup_{0\le s_n\le\tau_n}\|y_{n+1}(s_n)\| + \sup_{0\le s_n\le\tau_n}\|y_n(s_n)\|\big). \tag{1.18}$$

Ввиду того, что при $n < N$ система (1.10), (1.11) имеет ограниченные правые части, удовлетворяющие условиям Липшица, ее решение можно оценить с помощью леммы Беллмана–Гроноулла ([8], с. 517). Данное решение $\{x_{n-1}, y_{n-1}\}^\top$, по крайней мере, ограничено, т. е. найдется $L > 0$ для оценки

$$\max_{\tau_{n-2}}(\|x_{n-1}(\tau_{n-2})\| + \|y_{n-1}(\tau_{n-2})\|) \le L\sup_\eta(\|\phi_1(\eta)\| + \|\phi_2(\eta)\|). \tag{1.19}$$

Если рассмотреть решение возмущенной системы (1.10), (1.11) при $n \ge N$, определенное начальной вектор-функцией $\{x_{n-1}(\tau_{n-2}), y_{n-1}(\tau_{n-2})\}^\top$, то учитывая оценки (1.17) и (1.18) (т. е. принимая во внимание малость возмущений), получаем ввиду результатов автора [4], оценку

$$\max_{\tau_{n+j}}(\|x_{n+j+1}(\tau_{n+j})\| + \|y_{n+j+1}(\tau_{n+j})\|) \le L_1(q_1)^j\max_{\tau_{n-2}}(\|x(\tau_{n-2})\| + \|y(\tau_{n-2})\|), \tag{1.20}$$
$$q < q_1 < 1, \quad L_1 > 1.$$

Из (1.19) и (1.20) следует схожая экспоненциальная оценка и для любых $x_n(\tau_{n-1})$, $y_n(\tau_{n-1})$, $n = 1, 2, \dots$. Далее, ввиду

$$\|A_k(t) - \widehat{A}_k(t)\| < \varepsilon, \quad \|B_k(t) - \widehat{B}_k(t)\| < \varepsilon, \quad k = 1, 2$$

(ε — достаточно малое положительное число), и экспоненциальной устойчивости системы первого приближения (1.13) получим экспоненциальную устойчивость системы (1.10), (1.11) (в силу результатов автора [4]). □

2. Существование асимптотически периодического решения. Рассмотрим неоднородную систему

$$\begin{aligned} d\widehat{x}(t)/dt =& A_1(t)\widehat{x}(t) + A_2(t)\widehat{x}(t-\sigma) + B_1(t)\widehat{y}(t) + B_2(t)\widehat{y}(t-\sigma) + f_1(t),\\ d\widehat{y}(t)/dt =& \theta_0 e^t[A_3\widehat{x}(t) + A_4\widehat{x}(t-\sigma) + B_3\widehat{y}(t) + B_4\widehat{y}(t-\sigma) + f_2(t)],\\ & t \ge 0, \quad \theta_0 > 0, \quad \sigma > 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь $f(t)$ $(j = 1, 2)$ — периодические функции периода $T = \sigma$, имеющие непрерывные первые производные. Полагаем, что для соответствующей однородной системы справедливы условия теоремы 1. Как следует из теоремы 1, для решения возмущенной однородной системы (соответствующей системе первого приближения (1.13)) справедлива оценка

$$\|x(\tau_n)\| + \|y(\tau_n)\| \le \widehat{L}\prod_{j=0}^n(q + \|\mathbf{O}(\varepsilon_j)\| + \|\mathbf{O}(\varepsilon)\|)(\sup_\eta\|\phi_1(\eta)\| + \sup_\eta\|\phi_2(\eta)\|), \tag{2.2}$$

$$\lim_{j\to\infty}(q + \|\mathbf{O}(\varepsilon_j)\| + \|\mathbf{O}(\varepsilon)\|) = q_1, \quad q < q_1 < 1, \quad \sum_{j=1}^\infty\|\mathbf{O}(\varepsilon_j)\| < \infty.$$

Если исследовать асимптотическое поведение решения неоднородной возмущенной системы, записанное в интегральной форме по шагам, то ввиду оценки (2.2) получаем

$$\|\widehat{x}(\tau_n)\| + \|\widehat{y}(\tau_n)\| \le \widehat{L}\prod_{j=0}^{n}(q + \|\mathbf{O}(\varepsilon_j)\| + \|\mathbf{O}(\varepsilon)\|)\bigl(\sup_{\eta}\|\phi_1(\eta)\| + \sup_{\eta}\|\phi_2(\eta)\|\bigr) +$$
$$+ \widehat{L}\prod_{j=0}^{n-1}(q + \|\mathbf{O}(\varepsilon_j)\| + \|\mathbf{O}(\varepsilon)\|)\bigl(\max_{0\le t\le\sigma}\|f_1(t)\| + \max_{0\le t\le\sigma}\|f_2(t)\|\bigr) +$$
$$+ \widehat{L}\prod_{j=0}^{n-2}(q + \|\mathbf{O}(\varepsilon_j)\| + \|\mathbf{O}(\varepsilon)\|)\bigl(\max_{0\le t\le\sigma}\|f_1(t)\| + \max_{0\le t\le\sigma}\|f_2(t)\|\bigr) + \dots +$$
$$+ \widehat{L}\bigl(\max_{0\le t\le\sigma}\|f_1(t)\| + \max_{0\le t\le\sigma}\|f_2(t)\|\bigr) \le \widehat{L}_1\prod_{j=0}^{n}(q_1 + \|\mathbf{O}(\varepsilon_j)\|)\bigl(\sup_{\eta}\|\phi_1(\eta)\| + \sup_{\eta}\|\phi_2(\eta)\|\bigr) +$$
$$+ \frac{\widehat{L}_1}{1-q_1}\bigl(\max_{0\le t\le\sigma}\|f_1(t)\| + \max_{0\le t\le\sigma}\|f_2(t)\|\bigr), \quad \widehat{L} < \widehat{L}_1 < \infty.$$

Ввиду данной оценки решения системы (2.1) $\{\|\widehat{x}(t,\phi_1(\theta))\|, \|\widehat{y}(t,\phi_2(\theta))\|\}$ ограничены. Тогда (как следует из теоремы 1, именно из соотношения, аналогичного (1.10)), $\lim\limits_{t\to\infty} d\widehat{x}(t)/dt = 0$. Поэтому можно исследовать асимптотические свойства некоторых частных решений при дополнительных условиях на правые части неоднородной системы (2.1).

В виде продолжения исследований из [9] доказывается

Теорема 2. *Пусть наряду с условиями теоремы* 1 *выполнены следующие условия*:
1) *существует матрица* $(B_3 + B_4)^{-1}$,
2) *найдется* $\widehat{C}$ — *постоянный* m-*мерный вектор такой, что справедливо равенство*

$$(A_1(t) + A_2(t))\widehat{C} + f_1(t) = (B_1(t) + B_2(t))\bigl[(B_3 + B_4)^{-1}[(A_3 + A_4)\widehat{C} + f_2(t)]\bigr].$$

Тогда система (2.1) *допускает асимптотически периодическое* (*периода* σ) *решение* $\{\widehat{x}_\sigma, \widehat{y}_\sigma\}^\top$, *где*

$$\widehat{x}_\sigma = \widehat{C}, \quad \widehat{y}(t) = -(B_3 + B_4)^{-1}[(A_3 + A_4)\widehat{C} + f_2(t)].$$

Доказательство. Системе (2.1) соответствует неоднородная дифференциально-разностная система

$$\begin{gathered} d\widehat{x}_{n+1}(t)/dt = A_1(t)\widehat{x}_{n+1}(t) + A_2(t)\widehat{x}_n(t) + B_1(t)\widehat{y}_{n+1}(t) + B_2(t)\widehat{y}_n(t) + f_1(t), \\ \varepsilon_n d\widehat{y}_{n+1}(t)/dt = e^t[A_3\widehat{x}_{n+1}(t) + A_4\widehat{x}_n(t) + B_3\widehat{y}_{n+1}(t) + B_4\widehat{y}_n(t) + f_2(t)], \\ 0 \le t \le \sigma, \quad \widehat{y}_{n+1}(0) = \widehat{y}_n(\sigma), \quad \widehat{x}(t) \approx \widehat{C}, \quad n \ge N. \end{gathered} \tag{2.3}$$

Рассмотрим вторую подсистему. Пусть N — достаточно большое натуральное число. Ввиду того, что в левой части подсистемы содержится малый параметр ε_n, ищем частное решение в виде

$$\widehat{y}_\sigma(t) = -(B_3 + B_4)^{-1}[(A_3 + A_4)\widehat{C} + f_2(t)]. \tag{2.4}$$

Полагая $\widehat{x}_n(t) = \widehat{C} + x_n^0(t)$, $\widehat{y}_n(t) = y(t)_\sigma + y_n^0(t)$, учитывая (2.4), из второй подсистемы в (2.3) имеем

$$dx_{n+1}(t)^0/dt = A_1(t)x_{n+1}^0(t) + A_2(t)x_n^0(t) + B_1(t)y_{n+1}^0(t) + B_2(t)y_n^0(t),$$

$$\varepsilon_n dy_\sigma(t)/dt + \varepsilon_n dy^0_{n+1}(t)/dt =$$
$$= e^t[A_3\widehat{C} + A_4\widehat{C} + A_3\widehat{x}^0_{n+1}(t) + A_4\widehat{x}^0_n(t) + B_3 y_\sigma(t) + B_4 y_\sigma(t) + B_3 y^0_{n+1}(t) + B_4\widehat{y}^0_n(t) + f_2(t)] =$$
$$= e^t[A_3\widehat{x}^0_{n+1}(t) + A_4\widehat{x}^0_n(t) + B_3 y^0_{n+1}(t) + B_4\widehat{y}^0_n].$$

Данная система является неоднородной с исчезающей вектор-функцией $\varepsilon_n dy_\sigma(t)/dt$, которая стремится к нулю при $n\to\infty$. Покажем, что решение этой системы $\{x^0_n(t), y^0_n(t)\}^\top \to 0$ при $n\to\infty$. Пусть $\widehat{q} = q + \mathbf{O}(\varepsilon)$, $q = e^{-\beta_0\sigma}$, $q < \widehat{q} < 1$. Без ограничения общности считаем, что

$$\widehat{q} > \mu : \mu = \delta\widehat{q}, \quad 0 < \delta < 1. \tag{2.5}$$

Используя формулу вариации постоянных ([9], с. 157), запишем решение возмущенной неоднородной системы на любом шаге. Имеем

$$w_{n+k,\varepsilon}(t) = \widehat{T}_{n+k-1}\widehat{T}_{n+k-2}\ldots\widehat{T}_n(w_n(s)) + \varepsilon_1\widehat{T}_{n+k-1}\widehat{T}_{n+k-2}\ldots\widehat{T}_{n+1}dy_\sigma(t)/dt +$$
$$+ \varepsilon_2\widehat{T}_{n+k-1}\widehat{T}_{n+k-2}\ldots\widehat{T}_{n+2}dy_\sigma(t)/dt + \cdots + \varepsilon_k dy_\sigma(t)/dt. \tag{2.6}$$

Здесь $\widehat{T}_n$ — оператор сдвига, подобный (1.19), действующий в банаховом пространстве $C_{2m}[0,\tau]$ непрерывных функций ([5], с. 124). В этом пространстве решение невозмущенной (линейной) системы представимо также в операторном виде. Асимптотические свойства этого оператора [4] аналогичны свойствам оператора T_{n,τ_n}. Именно, для произведения этих операторов (как следует из теоремы 1) справедлива оценка

$$\Big\|\prod_{j=N}^{N+k}\widehat{T}_j w_{N-1}(s)\Big\| \le \widehat{L}_2\widehat{q}^k(\|x^{N-1}(t)\|_\tau + \|y_{N-1}(\tau)\|_\tau), \tag{2.7}$$
$$w^{(\top)}_{N-1}(t) = \{x^{N-1}(t), y^{N-1}(t)\}, \quad \widehat{L}_2 \ge 1, \quad k = 1,2,\ldots$$

Данные операторы также равномерно ограничены. Из соотношений (2.6), (2.7) получаем неравенство

$$\max_{0\le t\le\sigma}\big(\|x^0_{n+k}(t)\| + \|y^0_{n+k}(t)\|\big) \le \widehat{L}_2\widehat{q}^k\max_{0\le t\le\sigma}\big(\|x^0_n(t)\| + \|y^0_n(t)\|\big) + \widehat{L}_2\widehat{q}^{k-1}\max_{0\le t\le\sigma}\|dy_\sigma(t)/dt\| +$$
$$+ \widehat{L}_2\varepsilon_1\widehat{q}^{k-2}\max_{0\le t\le\sigma}\|dy_\sigma(t)/dt\| + \widehat{L}_2\varepsilon_2\widehat{q}^{k-3}\max_{0\le t\le\sigma}\|dy_\sigma(t)/dt\| + \cdots + \widehat{L}_2\varepsilon_{k-1}\max_{0\le t\le\sigma}\|dy_\sigma(t)/dt\|.$$

Отсюда, учитывая (2.5), имеем

$$\max_{0\le t\le\sigma}\big(\|x^0_{n+k}(t)\| + \|y^0_{n+k}(t)\|\big) \le \widehat{L}_2\widehat{q}^k\max_{0\le t\le\sigma}\big(\|x^0_n(t)\| + \|y^0_n(t)\|\big) + \widehat{L}_2\widehat{q}^{k-1}\max_{0\le t\le\sigma}\|dy_\sigma(t)/dt\| +$$
$$+\widehat{L}_2\widehat{q}^{k-1}\frac{\delta}{\theta_0}\max_{0\le t\le\sigma}\|dy_\sigma(t)/dt\| + \widehat{L}_2\widehat{q}^{k-1}\frac{\delta^2}{\theta_0}\max_{0\le t\le\sigma}\|dy_\sigma(t)/dt\| + \ldots + \widehat{L}_2\widehat{q}^{k-1}\frac{\delta^{k-1}}{\theta_0}\max_{0\le t\le\sigma}\|dy_\sigma(t)/dt\| \le$$
$$\le \widehat{L}_2\widehat{q}^k\max_{0\le t\le\sigma}(\|x^0_n(t)\| + \|y^0_n(t)\|) + \frac{\widehat{L}_2\widehat{q}^{k-1}}{\theta_0(1-\delta)}\max_{0\le t\le\sigma}\|dy_\sigma(t)/dt\|.$$

Поскольку величины $\max\limits_{0\le t\le\sigma}\big(\|x^0_n(t)\| + y^0_n(t)\|\big)$, $\max\limits_{0\le t\le\sigma}\|dy_\sigma(t)/dt\|$ ограничены, следовательно, $\max\limits_{0\le t\le\sigma}\big(\|x^0_{n+k}(t)\| + \|y^0_{n+k}(t)\|\big) \to 0$ при $k\to\infty$. □

Замечание. Условие 2) теоремы 2 может выполняться с точностью до исчезающей вектор-функции.

3. Пример. Рассмотрим асимптотическое поведение системы четвертого порядка, имеющей следующие параметры: запаздывание $\sigma = 1$, матрицы A_j, B_j, $j = 1, \dots, 4$, имеют компоненты

$$A_1 = \begin{pmatrix} \sin pt & \cos pt \\ \sin pt & -\cos pt \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -\cos pt & \sin pt \\ \sin pt & \sin pt \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.1 \\ 0 & 0.4 \end{pmatrix},$$
$$B_1 = \begin{pmatrix} 4\cos pt & -\cos pt \\ -0.5\cos pt & -\sin pt \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0.3\cos pt & -0.5\cos pt \\ \sin pt & \sin pt \end{pmatrix},$$
$$B_3 = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

матрица A_3 нулевая. Здесь $p = 2\pi/\sigma$. Далее, вектор-функция $f_2(t) = \{\cos^3 pt, \sin^3 pt\}^\top$,

$$f_1(t) = \begin{pmatrix} 4\cos pt + 0.3\cos pt & -1.5\cos pt \\ -0.5\cos pt + \sin pt & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -0.602 & -0.422 \\ -0.606 & -0.452 \end{pmatrix} *$$
$$* \left[\begin{pmatrix} 0.4 & 0.1 \\ 0 & 0.4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos^3 pt \\ \sin^3 pt \end{pmatrix} \right] -$$
$$- \begin{pmatrix} 4\cos pt + 0.3\cos pt & -1.5\cos pt \\ -0.5\cos pt + \sin pt & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -0.217\cos pt - 1.68\cos^4 pt - 1.137\cos pt\sin^3 pt \\ 0.849\cos pt - 1.699\sin pt + 0.301\cos^4 pt - 0.62\cos^3 pt\sin pt + 0.211\cos pt\sin^3 pt - 0.422\sin^4 pt \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Очевидно, вектор-функция $f_1(t)$ удовлетворяет условию 2) теоремы 2. Асимптотические свойства соответствующей однородной системы (точнее, соответствующей системы первого приближения) достаточно хорошо изучены в [3], именно, показано, что система первого приближения экспоненциально устойчива и (как следует из теоремы 1) экспоненциально устойчива соответствующая однородная система. Окончательно, система четвертого порядка, определенная равенствами (3.1), (3.2), допускает асимптотически периодическое решение, имеющее вид

$$x_\sigma = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad y_\sigma = \begin{pmatrix} -0.9 - 0.067\cos^3 pt - 0.417\sin^3 pt \\ -0.1 - 0.067\cos^3 pt - 0.017\sin^3 pt \end{pmatrix}.$$

Литература

[1] Барбашин Е.А. *Введение в теорию устойчивости* (М., 1967).

[2] Гребенщиков Б.Г. *Асимптотическое поведение решений одной системы с линейным запаздыванием*, Изв. РАН. Теория и системы управления, № 2, 29–34 (2008).

[3] Гребенщиков Б.Г., Новиков С.И. *О неустойчивости некоторой системы с линейным запаздыванием*, Изв. вузов. Матем., № 2, 3–12 (2010).

[4] Гребенщиков Б.Г. *Об устойчивости по первому приближению одной нестационарной системы с запаздыванием*, Изв. вузов. Матем., № 2, 34–42 (2012).

[5] Беллман Р., Кук К. *Дифференциально-разностные уравнения* (М., 1967).

[6] Фихтенгольц Г.М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, т. 3 (М., 1966).

[7] Митропольский Ю.А. *Метод усреднения в нелинейной механике* (Киев, 1971).

[8] Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. *Теория показателей Ляпунова и ее приложение к вопросам устойчивости* (М., 1967).

[9] Гребенщиков Б.Г. *О существовании асимптотически периодического решения одной системы с запаздыванием*, Изв. Уральск. гос. ун-та, № 26. (Математика и механика. Вып. 5), 44–54 (2003).

[10] Халанай А., Векслер Д. *Качественная теория импульсных систем* (М., 1971).

Б.Г. Гребенщиков

доцент, кафедра прикладной математики,
Уральский федеральный университет,
ул. Мира, д. 19, г. Екатеринбург, 620002, Россия,

e-mail: ablozhnikov@yandex.ru

B.G. Grebenshchikov

The asymptotic stability of a nonstationary system with delay

Abstract. In this paper we study the exponential stability of a linear system of differential equations with a constant delay such that the right-hand side of one of its subsystems contains the multiplier in the form of an exponent. We establish sufficient conditions for the existence of an asymptotically periodic solution to the inhomogeneous system.

Keywords: asymptotic stability, exponential bound, asymptotically periodic solution.

B.G. Grebenshchikov

Associate Professor, Chair of Applied Mathematics,
Ural Federal University,
19 Mira str., Ekaterinburg, 620002 Russia,

e-mail: ablozhnikov@yandex.ru