КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ им. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО
Кафедра дифференциальных уравнений

Л.Г. Салехов, Ю.В. Обносов, Т.В.Никоненкова

УЛЬТРАОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ НА ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ И АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИОНАЛЫ НА КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

Учебное пособие для магистрантов 1-ого и 2-ого года.

Казань — 2015

УДК 517.958

Рекомендовано учебно-методической комиссией ИММ им. Н.И. Лобачевского
Протокол №10 от 25 июня 2015 года

Рецензенты:
доктор физико-математических наук,
заведующий кафедрой математического анализа **С.Р. Насыров**;
доктор физико-математических наук,
заведующий кафедрой теории функций и приближений **Ф.Г. Авхадиев**

Л.Г. Салехов, Ю.В. Обносов, Т.В. Никоненкова
Ультраобобщенные функции на вещественной оси и аналитические функционалы на комплексной плоскости/ Л.Г. Салехов, Ю.В. Обносов, Т.В. Никоненкова. - Казань: Казан. ун-т, 2015, Ц 40 с.

В стандартном курсе лекций “Уравнения в частных производных” дается расширение преобразования Фурье на пространство обобщенных функций медленного (умеренного) роста.

В данном учебном пособии рассматривается продолжение преобразования Фурье на более широкие пространства обобщенных функций. Это осуществляется с помощью известных теорем Пэли–Винера и Пэли–Винера–Шварца, которые дают выход в пространство целых аналитических функций. Это, в свою очередь, в силу принципа двойственности (дуальности) делает возможным продолжить преобразование Фурье в пространства обобщенных и ультраобобщенных функций (аналитические функционалы).

Пособие предназначено для студентов старших курсов и магистров-математиков.

Оглавление

1 Образ пространства $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ при преобразовании Фурье-Лапласа

Из курса "Уравнения с частными производными" известно, что преобразование Фурье является топологическим автоморфизмом пространства Л. Шварца $\mathcal{S}$, т. е. пространства бесконечно дифференцируемых на оси $\mathbb{R}$ функций, быстро убывающих на бесконечности.

Очевидно, пространство $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ является подпространством пространства $\mathcal{S}$. Преобразование Фурье в пространстве $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ обладает интересным свойством, дающим выход в пространство целых аналитических функций конечного экспоненциального типа.

Теорема Пэли-Винера. *Для функции f, определенной на оси $\mathbb{R}$, эквивалентны следующие утверждения:*
1) *Функция f есть образ Фурье функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ с носителем, содержащемся в интервале: $|x| \le b$;*
2) *Функция f продолжима до функции $\widetilde{f}$, голоморфной на плоскости $\mathbb{C}$, т. е. целой аналитической функции конечного экспоненциального типа, обладающей свойством:*

$$\forall\, k \in \mathbb{N} \quad \exists\, c_k \in \mathbb{R}: \quad |\widetilde{f}(\zeta)| \le c_k(1+|\zeta|^2)^{-k}\mathrm{e}^{2\pi b|\mathrm{Im}\,\zeta|} \quad \forall\, \zeta \in \mathbb{C}.$$

Доказательство. 1) Пусть $f = \mathcal{F}\varphi$, где $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ и $\operatorname{supp}\varphi = \{|x| \le b\}$. Для любого $\zeta \in \mathbb{C}$ положим

$$\widetilde{f}(\zeta) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\, x\zeta}\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

Очевидно, $\widetilde{f}$ продолжает f. Теорема Лебега о дифференцировании под знаком интеграла показывает, что $\widetilde{f}$ дифференцируема на $\mathbb{C}$ и, следовательно, имеем

$$\frac{\mathrm{d}^n\widetilde{f}(\zeta)}{\mathrm{d}\zeta^n} = \int_{\mathbb{R}} (2\pi\mathrm{i}\, x)^n \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\, x\zeta}\varphi(x)\mathrm{d}x \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

С другой стороны, интегрируя n раз по частям и учитывая финитность функции φ, имеем,

$$(-2\pi\mathrm{i}\,\zeta)^n\widetilde{f}(\zeta) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\, x\zeta}\varphi^{(n)}(x)\mathrm{d}x \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Оценивая, имеем

$$|(2\pi\zeta)^n\widetilde{f}(\zeta)| \leq \sup_{|x|\leq b}|\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\,x\zeta}|\int_{\mathbb{R}}|\varphi^{(n)}(x)|\mathrm{d}x \leq \mathrm{e}^{2\pi b|\mathrm{Im}\,\zeta|}\|\varphi^{(n)}(x)\|_1,$$

где $\|\cdot\|_1$ – норма φ в пространстве $L_1(\mathbb{R})$. Поэтому $\forall\, k\in\mathbb{N}$ имеем

$$(1+|\zeta|^2)^k|\widetilde{f}(\zeta)| \leq c_k\mathrm{e}^{2\pi b|\mathrm{Im}\,\zeta|}.$$

2) Обратно, пусть f – функция, удовлетворяющая утверждению 2). Положим

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\,x\xi}f(\xi)\mathrm{d}\xi,$$

тогда $\varphi\in\mathcal{E}(\mathbb{R})$ и f есть образ Фурье для φ. Далее, покажем, что φ имеет носитель, содержащийся в отрезке $|x|\leq b$.

Для любого $\forall\,\eta\in\mathbb{R}$, учитывая, что

$$|f(\zeta)| \leq c_1(1+|\zeta|^2)^{-1}\mathrm{e}^{2\pi b|\eta|}, \quad \text{где } \zeta=\xi+\mathrm{i}\,\eta,$$

имеем

$$\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\,x(\xi+\mathrm{i}\,\eta)}f(\xi+\mathrm{i}\,\eta)\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\,x\xi}f(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

Здесь мы произвели параллельный перенос оси интегрирования на основании принципа гомотопии. Следовательно,

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\,x(\xi+\mathrm{i}\,\eta)}f(\xi+\mathrm{i}\,\eta)\mathrm{d}\xi.$$

Тогда имеем оценку

$$|\varphi(x)| \leq c_1\mathrm{e}^{2\pi(b|\eta|-x\eta)}\int_{\mathbb{R}}\frac{\mathrm{d}\xi}{1+|\xi|^2}.$$

Поскольку η – произвольное вещественное, возьмем $\eta=\alpha x$, где $\alpha>0$, тогда

$$|\varphi(x)| \leq c_1\mathrm{e}^{2\pi\alpha|\eta|(b-|x|)}.$$

Это показывает, что при $\alpha\to+\infty$,

$$\varphi(x)=0, \quad \text{если } |x|>b.$$

Отметим, что голоморфная функция $\widetilde{f}(\zeta)$ называется образом Фурье-Лапласа для элемента $\varphi\in\mathcal{D}$.

2 Образ пространства $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$ при преобразовании Фурье-Лапласа

Теорема Пэли-Винера-Шварца. *Для функции f, определенной на оси $\mathbb{R}$, эквивалентны следующие утверждения:*

1) *Функция f есть образ Фурье обобщенной функции $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ с носителем, содержащимся в интервале: $|x| \leq b$;*

2) *Функция f продолжима до функции $\widetilde{f}$ голоморфной на плоскости $\mathbb{C}$, т. е. целой аналитической функции конечного экспоненциального типа, обладающей свойством:*

$$\exists\, m \in \mathbb{N}, \quad \exists\, C > 0: \quad |\widetilde{f}(\zeta)| \leq C(1+|\zeta|^2)^{\frac{m}{2}} \mathrm{e}^{2\pi b|\mathrm{Im}\,\zeta|} \quad \forall\, \zeta \in \mathbb{C}.$$

Доказательство. 1) Пусть $f = \mathcal{F}(T)$, где $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ такая, что $\operatorname{supp} T = K$, где $K \subset \{|x| \leq b\}$. Известно, что $f(\xi) =< T, \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\, x\xi} > \forall\, \xi \in \mathbb{R}$.
Положим:

$$\widetilde{f}(\zeta) =< T, \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\, x\zeta} > \quad \forall\, \zeta \in \mathbb{C}.$$

Тогда $\widetilde{f}(\zeta)$ – голоморфная функция на $\mathbb{C}$. С другой стороны, существуют $C > 0$ и $m \in \mathbb{N}$ такие, что $\forall\, \varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ имеет место неравенство

$$| < T, \varphi > | \leq C p_{K,m}(\varphi) \equiv C \sup_{|k| \leq m} \sup_{|x| \leq b} |\varphi^{(k)}(x)|.$$

Если $\varphi = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\, x\zeta}$, тогда

$$|\widetilde{f}(\zeta)| \leq C \sup_{k \leq m} |(2\pi\zeta)^k| \mathrm{e}^{2\pi b|\mathrm{Im}\,\zeta|}.$$

Следовательно, $\widetilde{f}(\zeta)$ удовлетворяет утверждению 2).

2) Обратно, пусть функция f удовлетворяет утверждению 2). Очевидно, f есть образ Фурье некоторой обобщенной функции T, так как функция f сама есть обобщенная функция медленного роста.

Пусть $(\theta_j)_{j \in \mathbb{N}}$ – регуляризующая последовательность. Можно считать, что θ_j имеет носитель в интервале $|x| < \varepsilon_j$, где последовательность $(\varepsilon_j) \to 0$, при $j \to \infty$.
Если $T_j = T * \theta_j$ – регуляризация для T посредством θ_j, то

$$\widehat{T_j} = \mathcal{F}(T_j) = \widehat{\theta}_j \widehat{T} = \widehat{\theta}_j f.$$

Согласно теореме Пэли-Винера каждая функция $\widehat{\theta}_j$ продолжима на $\mathbb{C}$ до функции, которую снова обозначим $\widehat{\theta}_j$, голоморфной и обладающей свойством:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \exists\, C_{n,j}: \quad |\theta_j(\zeta)| \leq C_{n,j}(1+|\zeta|^2)^{-\frac{n}{2}} \mathrm{e}^{2\pi\varepsilon_j|\operatorname{Im}\zeta|}.$$

Следовательно,

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \exists\, C_{k,j}: \quad |\widehat{T}_j(\zeta)| \leq C_{k,j}(1+|\zeta|^2)^{-\frac{k}{2}} \mathrm{e}^{2\pi(\varepsilon_j+b)|\operatorname{Im}\zeta|}$$

(достаточно взять $C_{k,j} = CC_{(k+m),j}$).

Согласно теореме Пэли-Винера, T_j имеет компактный носитель, лежащий на отрезке $|x| \leq b+\varepsilon_j$. При $j \to \infty$ последовательность $(T_j)_{j\in\mathbb{N}}$ сходится к T в топологии $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ такая, что $\operatorname{supp}\varphi \subset \{|x| \leq b\}^{\perp}$, где $\perp$ – дополнение. Для достаточно больших j имеем

$$\operatorname{supp}\varphi \subset \{|x| \leq b+\varepsilon_j\}^{\perp}$$

и, следовательно, $< T_j, \varphi >= 0$. Отсюда следует, что $< T, \varphi >= 0$, а значит, $\operatorname{supp} T \subset \{|x| \leq b\}$, что и требовалось доказать.

Важное следствие. *Образ Фурье любой обобщенной функции с компактным носителем не может иметь компактного носителя, т.е.*

$$\mathcal{E}'(\mathbb{R}) \cap \mathcal{F}(\mathcal{E}') = \{0\}.$$

Доказательство. Пусть $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ и $f = \mathcal{F}(T)$, тогда f продолжима до $\widetilde{f}$ – функции голоморфной в $\mathbb{C}$. Откуда вытекает, что f есть аналитическая функция на $\mathbb{R}$. Но всякая аналитическая на $\mathbb{R}$ функция, обращающаяся в нуль на непустом открытом множестве из $\mathbb{R}$, тождественно равна нулю на $\mathbb{R}$. Поэтому f не может быть с компактным носителем что и требовалось доказать.

Напомним, голоморфная функция $\widetilde{f}$ называется образом Фурье-Лапласа обобщенной функции T с компактным носителем.

3 Ультраобобщенные функции на $\mathbb{R}$ и действия над ними

Пусть $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ – топологическое векторное пространство бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(x)$, быстро убывающих на бесконечности, с топологией, определяемой одним из эквивалентных семейств полунорм. А преобразование Фурье $\mathcal{F}$ на $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ определяется формулой:

$$\mathcal{F}(\varphi)(\xi) := \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\, x\xi} \varphi(x) \mathrm{d}x, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}.$$

Известно, что преобразование Фурье является *топологическим автоморфизмом пространства* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Обратным преобразованием Фурье является *копреобразование Фурье* $\overline{\mathcal{F}}$:

$$\overline{\mathcal{F}}(\varphi)(\xi) := \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}\, x\xi} \varphi(x) \mathrm{d}x, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}.$$

Свойство автоморфизма преобразования Фурье для пространства $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ позволяет определить преобразование Фурье в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ обобщенных функций медленного (умеренного) роста как оператор, *транспонированный* ${}^t\mathcal{F}$ к оператору - топологическому автоморфизму пространства $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, т. е. к преобразованию Фурье $\mathcal{F}$ в пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Итак, для $\forall\, T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ и $\forall\, \varphi \in \mathcal{S}$ имеем

$$< {}^t\mathcal{F}(T), \varphi > := < T, \mathcal{F}\varphi > .$$

В дальнейшем, вместо ${}^t\mathcal{F}$ будем писать $\mathcal{F}$, т. е.

$$< \mathcal{F}(T), \varphi > := < T, \mathcal{F}\varphi > .$$

Аналогично определяется копреобразование Фурье на $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$:

$$< \overline{\mathcal{F}}(T), \varphi > := < T, \overline{\mathcal{F}}\varphi >,$$

где ${}^t\overline{\mathcal{F}}$ отождествляем с $\overline{\mathcal{F}}$.

В силу принципа дуальности (двойственности) отображение $\mathcal{F}$ в $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ также является топологическим автоморфизмом пространства $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, где $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ снабжено слабой или сильной дуальной топологией.

Продолжим преобразование Фурье в пространство $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ обобщенных функций на $\mathbb{R}$, привлекая свойства преобразования Фурье в пространстве $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, т. е. в пространстве бесконечно дифференцируемых, финитных функций на $\mathbb{R}$.

Рассмотрим подпространство $\mathbb{Z}(\mathbb{R})$ из $\mathcal{S}(\mathbb{R})$:

$$\mathbb{Z}(\mathbb{R}) := \{\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \,|\, \mathcal{F}\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\}.$$

В силу плотности $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ в $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, пространство $\mathbb{Z}(\mathbb{R})$ плотно в $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ и устойчиво относительно операций дифференцирования и умножения на мономы. Далее, из определения пространства $\mathbb{Z}(\mathbb{R})$ и в силу того, что $\mathcal{F}$ и $\overline{\mathcal{F}}$ есть автоморфизмы пространства $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, вытекает, что сужение преобразования Фурье $\mathcal{F}$ на $\mathbb{Z}(\mathbb{R})$ есть линейная биекция пространства $\mathbb{Z}(\mathbb{R})$ на $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, а $\overline{\mathcal{F}}$ есть обратная биекция.

Определение. Всякий линейный функционал, непрерывный на $\mathbb{Z}(\mathbb{R})$, называется *ультраобобщенной функцией* на $\mathbb{R}$.

Множество ультраобобщенных функций на $\mathbb{R}$ обозначают $\mathbb{Z}'(\mathbb{R})$ и снабжают слабой или сильной дуальной топологией. Поскольку $\mathbb{Z}(\mathbb{R})$ непрерывно и плотно вкладывается в $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, то в силу принципа дуальности (двойственности) пространство $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ непрерывно вкладывается в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Определение. Преобразование Фурье $\mathcal{F}$ непрерывно и биективно отображает пространство $\mathbb{Z}(\mathbb{R})$ на $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Транспонированное к нему преобразование ${}^t\mathcal{F}$ отображает непрерывно и биективно пространство $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ на $\mathbb{Z}'(\mathbb{R})$. Оно и определяет *преобразование Фурье на* $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, а преобразование ${}^t\mathcal{F}$ есть копреобразование Фурье.

Итак, $\forall\, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $\forall\, \psi \in \mathbb{Z}(\mathbb{R})$ имеем:

$$< \mathcal{F}(T), \psi >:=< T, \mathcal{F}\psi >,$$

$$< \overline{\mathcal{F}}(T), \psi >:=< T, \overline{\mathcal{F}}\psi >,$$

где, по-прежнему, отождествляются ${}^t\mathcal{F} \equiv \mathcal{F}$ и ${}^t\overline{\mathcal{F}} \equiv \overline{\mathcal{F}}$.

Введем пространства $\mathcal{O}(\mathbb{R}) = \mathcal{F}(\mathcal{E}')$ и $\mathcal{O}'(\mathbb{R}) = \mathcal{F}(\mathcal{E})$, где $\mathcal{O}(\mathbb{R})$ - пространство бесконечно дифференцируемых функций, растущих на бесконечности не быстрее полинома, а $\mathcal{O}'(\mathbb{R})$ - пространство ультраобобщенных функций быстрого убывания.

Пусть $f \in \mathcal{O}(\mathbb{R})$, и $\psi \in \mathbb{Z}(\mathbb{R})$. Рассмотрим отображение: $\psi \curvearrowright f\psi$. Так как $\mathcal{O}(\mathbb{R}) \subset \theta_M(\mathbb{R})$ - пространство, мультипликаторное для пространства $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, а $\mathbb{Z}(R) \subset \mathcal{S}(R)$, имеем $\mathcal{F}(f\psi) = \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(\psi)$. Но $\mathcal{F}(f) \in \mathcal{E}'$, а $\mathcal{F}(\psi) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Следовательно, $\mathcal{F}(f\psi) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, т.е. $f\psi \in \mathbb{Z}(\mathbb{R})$. Итак, отображение $\psi \curvearrowright f\psi$ преобразует пространство $\mathbb{Z}(\mathbb{R})$ в $\mathbb{Z}(\mathbb{R})$.

Последний результат позволяет ввести операцию *мультипликативного произведения в пространстве* $\mathbb{Z}(\mathbb{R})$.

Пусть $f \in \mathcal{O}(\mathbb{R})$ и $V \in \mathbb{Z}'(\mathbb{R})$; мультипликативное произведение fV определяется по формуле:

$$< fV, \psi >:=< V, f\psi > \quad \forall \psi \in \mathbb{Z}(\mathbb{R}).$$

Очевидно, $fV \in \mathbb{Z}'(\mathbb{R})$ и отображение $V \curvearrowright fV$ действует из $\mathbb{Z}'(\mathbb{R})$ в $\mathbb{Z}'(\mathbb{R})$.

В пространстве $\mathbb{Z}'(\mathbb{R})$ имеет место

Теорема о перестановке. *Для любых $f \in \mathcal{O}(\mathbb{R})$ и $V \in \mathbb{Z}'(\mathbb{R})$ имеем $\mathcal{F}(fV) = \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(V)$.*

Доказательство. Действительно, $\forall \psi \in \mathbb{Z}(\mathbb{R})$ имеем

$$< \mathcal{F}(fV), \psi >=< fV, \mathcal{F}\psi >=< V, f(\mathcal{F}\psi) >=$$

$$=< \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}V, f(\mathcal{F}\psi) >=< \mathcal{F}V, \overline{\mathcal{F}}[f(\mathcal{F}\psi)] > .$$

Далее, в силу теоремы о перестановке в $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, имеем:

$$\overline{\mathcal{F}}[f(\mathcal{F}\psi)] = \overline{\mathcal{F}}f * \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}\psi = \overline{\mathcal{F}}f * \psi.$$

Следовательно,

$$< \mathcal{F}(fV), \psi >=< \mathcal{F}V, \overline{\mathcal{F}}f * \psi >=< \mathcal{F}V, (\check{\mathcal{F}}f) * \psi >=< (\mathcal{F}f) * \mathcal{F}(V), \psi > .$$

Введем операцию *свертки в пространстве* $\mathbb{Z}'(\mathbb{R})$.

Пусть $\chi \in \mathbb{Z}(\mathbb{R})$, тогда отображение $\psi \curvearrowright \chi * \psi$ действует из $\mathbb{Z}(\mathbb{R})$ в $\mathbb{Z}(\mathbb{R})$. Действительно, имеем: $\mathcal{F}(\chi * \psi) = \mathcal{F}\chi \cdot \mathcal{F}\psi$. Но $\mathcal{F}\chi$ и $\mathcal{F}\psi$ принадлежат пространству $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ по определению пространства $\mathbb{Z}(\mathbb{R})$.

Определение свертки элемента из $\mathbb{Z}'(\mathbb{R})$ и элемента из $\mathbb{Z}(\mathbb{R})$. Для любого $\chi \in \mathbb{Z}(\mathbb{R})$ и любого $V \in \mathbb{Z}'(\mathbb{R})$ свертка $\chi * V$ определяется по формуле:

$$< \chi * V, \psi > := < V, \check{\chi} * \psi >, \quad \psi \in \mathbb{Z}(\mathbb{R}),$$

где $\check{\chi}(x) := \chi(-x)$.

Имеет место

Теорема о перестановке. *Пусть $V \in \mathbb{Z}'(\mathbb{R})$, а $\chi \in \mathbb{Z}(\mathbb{R})$, тогда $(\chi * V) \in \mathcal{O}(\mathbb{R})$ и*

$$\mathcal{F}(\chi * V) = (\mathcal{F}\chi) \cdot (\mathcal{F}V).$$

Доказательство. Действительно, $\forall \psi \in \mathbb{Z}(\mathbb{R})$ имеем:

$$< \mathcal{F}(\chi * V), \psi > = < \chi * V, \mathcal{F}\psi > = < V, \check{\chi} * \mathcal{F}\psi > = < \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}V, \check{\chi} * \mathcal{F}\psi > =$$

$$= < \mathcal{F}V, \overline{\mathcal{F}}[\check{\chi} * \mathcal{F}\psi] > = < \mathcal{F}V, (\mathcal{F}\chi) \cdot \psi > = < \mathcal{F}(\chi) \cdot (\mathcal{F}V), \psi > .$$

Определение свертки элемента из $\mathbb{Z}'(\mathbb{R})$ и элемента из $\mathcal{O}'(\mathbb{R})$. Пусть $U \in \mathcal{O}'(\mathbb{R})$ и $V \in \mathbb{Z}'(\mathbb{R})$. Свертка $U * V$ определяется по формуле:

$$< U * V, \psi > := < V, \check{U} * \psi >, \quad \psi \in \mathbb{Z}(\mathbb{R}).$$

Очевидно, отображение $V \curvearrowright U * V$ отображает $\mathbb{Z}'(\mathbb{R})$ в $\mathbb{Z}'(\mathbb{R})$, так как оно является транспонированным отображением к отображению $\psi \curvearrowright \check{U} * \psi$, действующему из $\mathbb{Z}(\mathbb{R})$ в $\mathbb{Z}(\mathbb{R})$.

Теорема о перестановке для элементов из $\mathcal{O}'(\mathbb{R})$ и $\mathbb{Z}'(\mathbb{R})$. *Пусть $U \in \mathcal{O}'(\mathbb{R})$ и $V \in \mathbb{Z}'(\mathbb{R})$. Тогда*

$$\mathcal{F}(U * V) = \mathcal{F}(U) \cdot \mathcal{F}(V).$$

Доказательство. Действительно, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ имеем:

$$< \mathcal{F}(U * V), \varphi > = < U * V, \mathcal{F}\varphi > = < V, \check{U} * \mathcal{F}\varphi > = < \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}V, \check{U} * \mathcal{F}\varphi > =$$

$$= < \mathcal{F}V, \overline{\mathcal{F}}[\check{U} * \mathcal{F}\varphi] > = < \mathcal{F}V, (\mathcal{F}U) \cdot \varphi > = < \mathcal{F}(U) \cdot \mathcal{F}(V), \varphi > .$$

4 Преобразование Фурье-Лапласа и ультраобобщенные функции на комплексной плоскости

Введем понятие преобразование Фурье-Лапласа, из которого определим ультраобобщенные функции на $\mathbb{C}$, которые представляют более практичный аппарат, чем ультраобобщенные функции на $\mathbb{R}$.

Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Преобразование Фурье-Лапласа определяется формулой:

$$(\mathcal{FL}\varphi)(\zeta) := \int_{\mathbb{R}} \exp(2\pi \mathrm{i}\, x\zeta)\varphi(x)\mathrm{d}x \quad \forall \zeta \in \mathbb{C}.$$

Очевидно, функция $(\mathcal{FL})(\zeta)$ определена на $\mathbb{C}$ и является продолжением функции $(\mathcal{F}\varphi)(\xi)$, определенной на $\mathbb{R}$, где $\zeta = \xi + \mathrm{i}\,\eta$.

Образ Фурье-Лапласа для $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ обозначим $\mathbb{Z}(\mathbb{C})$.

Характеристика пространства $\mathbb{Z}(\mathbb{C})$ дается *теоремой Пэли-Винера.* Преобразование $\mathcal{FL}$ есть изоморфизм пространства $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ на $\mathbb{Z}(\mathbb{C})$. Обратный изоморфизм есть копреобразование Фурье $\overline{\mathcal{F}}$, определяемое формулой

$$(\overline{\mathcal{F}}\psi)(x) := \int_{\mathbb{R}} \exp(-2\pi \mathrm{i}\, x\xi)\psi(\xi)\mathrm{d}\xi \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall \psi \in \mathbb{Z}(\mathbb{C}),$$

где $\psi(\xi)$ – сужение $\psi(\zeta)$ на ось $\mathbb{R}$.

Дуальное пространство к пространству $\mathbb{Z}(\mathbb{C})$ обозначают $\mathbb{Z}'(\mathbb{C})$ и снабжают слабой или сильной дуальной топологией.

Преобразование Фурье-Лапласа обобщенной функции $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ определяем формулой:

$$< \mathcal{FL}(T), \psi >:=< T, \mathcal{F}\psi >, \quad \forall \psi \in \mathbb{Z}(\mathbb{C}),$$

где $\mathcal{F}\psi$ – образ Фурье сужения функции ψ на $\mathbb{R}$.

Так как отображение $\psi \curvearrowright \mathcal{F}\psi$ есть изоморфизм пространства $\mathbb{Z}(\mathbb{C})$ на $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, то отображение $T \curvearrowright \mathcal{FL}(T)$ есть изоморфизм пространства $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ на $\mathbb{Z}'(\mathbb{C})$, поскольку оно является транспонированным к отображению $\psi \curvearrowright \mathcal{F}\psi$.

На практике полезна формула обращения в итерационном виде

$$\mathcal{FL}[\mathcal{FL}(T)] = \check{T} \quad \forall T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

Пусть $\mathcal{O}'(\mathbb{C}) := \mathcal{FL}(\mathcal{E})$ и $\mathcal{O}(\mathbb{C}) := \mathcal{FL}(\mathcal{E}')$. Возьмем $\forall T \in \mathcal{E}'$. Вычислим $\mathcal{FL}(T)$. Применяя понятия прямого произведения обобщенных функций и итерационной формулы дуальности, получим

$$< \mathcal{F}\mathcal{L}(T), \psi >=< T, \mathcal{F}\psi >=< T, < \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\, x\xi}, \psi(\xi) >>=< T(x) \otimes \psi(\xi), \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\, x\xi} >=$$

$$=< \psi(\zeta), < T, \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\, x\zeta} >>=<< T, \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\, x\zeta} >, \psi > .$$

Итак, имеем

$$\mathcal{F}\mathcal{L}(T)(\zeta) =< T, \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\, x\zeta} > \quad \forall \zeta \in \mathbb{C}.$$

Напомним, что характеристика пространства $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ дается теоремой Пэли-Винера-Л. Шварца [1], [4].

Мультипликативное произведение элемента из $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ *и элемента из* $\mathbb{Z}'(\mathbb{C})$ *дается формулой*:

$$< UV, \psi >:=< V, U\psi > \quad \forall U \in \mathcal{O}(\mathbb{C}) \quad \forall V \in \mathbb{Z}'(\mathbb{C}) \quad \forall \psi \in \mathbb{Z}(\mathbb{C}),$$

так как отображение $V \curvearrowright UV$ есть транспонированное отображение к отображению $\psi \curvearrowright U\psi$, которое, очевидно, действует из $\mathbb{Z}(\mathbb{R})$ в $\mathbb{Z}(\mathbb{R})$, при этом отображение $V \curvearrowright UV$ действует из $\mathbb{Z}'(\mathbb{R})$ в $\mathbb{Z}'(\mathbb{R})$ в силу принципа дуальности.

А свертка элементов из $\mathcal{O}'(\mathbb{C})$ и элемента из $\mathbb{Z}'(\mathbb{C})$ определяется по формуле

$$< W * V, \psi >:=< V, \check{W} * \psi >, \quad \psi \in \mathbb{Z}(\mathbb{C}),\ W \in \mathcal{O}'(\mathbb{C}),\ V \in \mathbb{Z}'(\mathbb{C}).$$

Так как отображение $\psi \curvearrowright \check{W} * \psi$ действует из $\mathbb{Z}(\mathbb{R})$ в $\mathbb{Z}(\mathbb{R})$, отображение $V \curvearrowright W * V$ действует из $\mathbb{Z}'(\mathbb{R})$ в $\mathbb{Z}'(\mathbb{R})$ в силу принципа дуальности.

Имеет место

Теорема о перестановке.

$$\begin{cases} \mathcal{F}\mathcal{L}(T * S) = \mathcal{F}\mathcal{L}(T) \cdot \mathcal{F}\mathcal{L}(S), \quad \forall T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}),\ \forall S \in \mathcal{E}', \\ \mathcal{F}\mathcal{L}(fT) = \mathcal{F}\mathcal{L}(f) * \mathcal{F}\mathcal{L}(T), \forall f \in \mathcal{E}. \end{cases}$$

Доказательство. Действительно, имеем $\forall \psi \in \mathbb{Z}(\mathbb{C})$:

$$< \mathcal{F}\mathcal{L}(T * S), \psi >=< S * T, \mathcal{F}\psi >=< T, \check{S} * \mathcal{F}\psi >=$$

$$< T, (\mathcal{F}\mathcal{F}S) * \mathcal{F}\psi >=< T, \mathcal{F}[(\mathcal{F}S)\psi] >=$$

$$< \mathcal{FL}(T), (\mathcal{F}S)\psi > = < \mathcal{FL}(T) \cdot \mathcal{FL}(S), \psi >, \quad \text{ибо } \mathcal{F}S = \mathcal{FL}(S)|_{I\cdot\zeta=0}$$

Аналогично доказывается второе утверждение.

Примеры преобразования Фурье-Лапласа на оси $(\mathbb{R})$**.**

1. $\forall a \in \mathbb{R}$ пусть δ_a - функция Дирака. Найдем $\mathcal{FL}(\delta_a)(\zeta)$. Так как $\delta_a \in \mathcal{E}'$,

$$\mathcal{FL}(\delta_a)(\zeta) = < \delta_a, \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\, x\zeta} > = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\, a\zeta}, \quad \forall \zeta \in \mathbb{C}.$$

2. $\forall \alpha \in \mathbb{N}$ пусть $\delta^{(\alpha)} = \dfrac{\mathrm{d}^\alpha \delta}{\mathrm{d}x^\alpha}$. Так как $\delta^{(\alpha)} \in \mathcal{E}'$,

$$\mathcal{FL}(\delta^{(\alpha)})(\zeta) = < \delta^{(\alpha)}, \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\, x\zeta} > = (-1)^\alpha < \delta, \{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\, x\zeta}\}^{(\alpha)} > =$$

$$= (-1)^\alpha (2\pi\mathrm{i}\,\zeta)^\alpha = (-2\pi\mathrm{i}\,\zeta)^\alpha, \quad \forall \zeta \in \mathbb{C}.$$

3. Пусть $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}$ найдем $\mathcal{FL}\left(\mathrm{d}^\alpha T/\mathrm{d}x^\alpha\right)$

$$\mathcal{FL}\left(\frac{\mathrm{d}^\alpha \delta}{\mathrm{d}x^\alpha} * T\right) = \mathcal{FL}\left(\frac{\mathrm{d}^\alpha \delta}{\mathrm{d}x^\alpha}\right) \cdot \mathcal{FL}(T) = (-2\pi\mathrm{i}\,\zeta)^\alpha \cdot \mathcal{FL}(T).$$

4. Пусть $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $\forall a \in \mathbb{R}$ рассмотрим $\tau_a T$, где τ_a - оператор сдвига в точку a. Найдем $\mathcal{FL}(\tau_a T)$:

$$\mathcal{FL}(\tau_a T) = \mathcal{FL}(\tau_a \delta * T) = \mathcal{FL}(\delta_a * T) = \mathcal{FL}(\delta_a)\mathcal{FL}(N) = \mathrm{e}^{2\pi a\mathrm{i}\,\zeta}\mathcal{FL}(T).$$

Вводим в $\mathbb{Z}'(\mathbb{C})$ следующие операции:

$$< \tau_a V, \psi > := < V, \tau_{-a}\psi > \quad \forall a \in \mathbb{C},\ \forall V \in \mathbb{Z}'(\mathbb{C}),$$

$$< \frac{\mathrm{d}^\alpha}{\mathrm{d}x^\alpha} V, \psi > := (-1)^\alpha < V, \frac{\mathrm{d}^\alpha \psi}{\mathrm{d}x^\alpha} > \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}\ \forall \psi \in \mathbb{Z}(\mathbb{C}).$$

Также $\forall a \in \mathbb{C}$ определим *ультраобобщенную функцию Дирака* δ_a на $\mathbb{C}$ формулой ([2], стр. 180-185):

$$< \delta_a, \psi > := \psi(a), \quad \forall \psi \in \mathbb{Z}(\mathbb{C}).$$

Так как $\psi \in \mathbb{Z}$,

$$\psi(a) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_L \frac{\psi(\tau)\mathrm{d}\tau}{\tau - a},$$

где L - произвольный гладкий замкнутый контур, содержащий внутри точку $\zeta = a$ и пробегаемый в положительном направлении один раз.

Итак, *ультраобобщенная функция Дирака δ_a есть аналитический функционал на $\mathbb{C}$*. Отметим, что если функция Дирака на $\mathbb{R}$ есть сингулярная обобщенная функция, то ультраобобщенная функция Дирака δ_a есть регулярная ультраобобщенная функция, определяемая функцией $1/[2\pi\mathrm{i}\,(\tau - a)]$.

Часто пространство $\mathbb{Z}'(\mathbb{C})$ называют *пространством аналитических функционалов* в силу справедливости следующего утверждения.

Теорема о разложении. *Пусть $V \in \mathbb{Z}'(\mathbb{C})$. Для любой точки $a \in \mathbb{C}$ ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \frac{\mathrm{d}^n V}{\mathrm{d}\zeta^n}$$

сходится к ультраобобщенной функции $\tau_{-a}V$ в сильной дуальной топологии пространства $\mathbb{Z}'(\mathbb{C})$.

Доказательство. Действительно, ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\pi\mathrm{i}\,ax)^n}{n!}$$

сходится к функции $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\,ax}$ в топологии пространства $\mathcal{E}(\mathbb{R})$. Пусть $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ такая, что $\mathcal{FL}(T) = V$. Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\pi\mathrm{i}\,ax)^n}{n!} T$$

сходится к обобщенной функции $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\,ax}T$ в сильной топологии пространства $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Переходя к преобразованию $\mathcal{FL}$, получаем утверждение теоремы.

Справедливы следующие предложения.

Предложение 1. *Для любых $n \in \mathbb{N}$ и точки $a \in \mathbb{C}$*

$$\begin{cases} \mathcal{FL}[(2\pi\mathrm{i}\,x)^n](\zeta) = \delta^{(n)}(\zeta), \\ \mathcal{FL}(\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\,ax})(\zeta) = \delta_{-a}(\zeta), \end{cases}$$

где $\delta(\zeta)$ и $\delta_{-a}(\zeta)$ - ультраобобщенные функции Дирака.

Докажем второе утверждение. Иначе говоря, надо показать, что

$$< \mathcal{FL}(\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\,ax}), \psi >=< \delta_{-a}(\zeta), \psi > \quad \forall \psi \in \mathbb{Z}(\mathbb{C}),$$

или

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\,ax} \varphi(-x)\mathrm{d}x = \psi(-a) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\,ax} \varphi(x)\mathrm{d}x \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

А последнее равенство очевидно.

Аналогично доказывается и первое утверждение:

$$< \mathcal{F}\mathcal{L}[(2\pi\mathrm{i}\,x)^n](\zeta), \psi(\zeta) >= \delta^n(\zeta),$$

или

$$< (2\pi\mathrm{i}\,x)^n, \mathcal{F}\psi >=< \delta^{(n)}(\zeta), \psi(\zeta) > \quad \forall\psi \in \mathbb{Z}(\mathbb{C})$$

или

$$\int_{\mathbb{R}} (2\pi\mathrm{i}\,x)^n \varphi(-x)\mathrm{d}x = (-1)^n < \delta(\zeta), \psi^{(n)}(\zeta) >,$$

что равносильно

$$\int_{\mathbb{R}} (2\pi\mathrm{i}\,x)^n \varphi(-x)\mathrm{d}x = (-1)^n < \delta(\zeta), \quad \int_{\mathbb{R}} (2\pi\mathrm{i}\,x)^n \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\,x\zeta}\varphi(x)\mathrm{d}x >,$$

или тождеству

$$\int_{\mathbb{R}} (2\pi\mathrm{i}\,x)^n \varphi(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} (2\pi\mathrm{i}\,x)^n \varphi(x)\mathrm{d}x$$

т.е. пришли к тождеству.

Следствием предложения 1 является

Предложение 2. *Для любых $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{C}$ и $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ имеют место равенства:*

$$\begin{cases} \mathcal{F}\mathcal{L}[(2\pi\mathrm{i}\,x)^n T] = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\zeta^n}[\mathcal{F}\mathcal{L}(T)](\zeta), \\ \mathcal{F}\mathcal{L}(\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\,ax}T) = \tau_{-a}[\mathcal{F}\mathcal{L}(T)](\zeta). \end{cases}$$

Этот результат следует из теоремы о перестановке и следующих соотношений, которые легко получаются:

$$\delta_a * V = \tau_a V \quad \text{и} \quad \frac{\mathrm{d}^n\delta}{\mathrm{d}\zeta^n} * V = \frac{\mathrm{d}^n V}{\mathrm{d}\zeta^n},\ \forall V \in \mathbb{Z}'(\mathbb{C}).$$

Пусть $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Рассмотрим $\mathcal{F}\mathcal{L}(T)$. Имеем:

$$< \mathcal{F}\mathcal{L}(T), \psi >:=< T, \mathcal{F}[\psi|_{\mathrm{Im}\zeta=0}] >=< \mathcal{F}T, \psi|_{\mathrm{Im}\zeta=0} > \quad \forall\psi \in \mathbb{Z}(\mathbb{R}),$$

т. е. $\mathcal{F}\mathcal{L}(T) = \mathcal{F}(T)$, $\forall T \in \mathcal{S}'$. А это влечет совпадение оператора $\mathcal{F}\mathcal{L}$ с оператором $\mathcal{K}\mathcal{F}$ на пространстве $\mathcal{S}'$.

Пусть $\psi(\zeta) \in \mathbb{Z}(\mathbb{C})$, т.е. $\psi(\zeta) = \mathcal{F}\mathcal{L}(\varphi)(\zeta)$, где

$$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) :\ \psi|_{\mathrm{Im}\zeta=0}(\xi) = \mathcal{F}(\varphi)(\xi),\ \forall\ \xi \in \mathbb{R}.$$

Имеем для $\zeta = z \in \mathbb{C}$ и $\forall\ \psi \in \mathbb{Z}(\mathbb{C})$:

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\psi(\xi)\mathrm{d}\xi}{\xi - z}, \quad \mathrm{Im} z \neq 0,$$

где $\Psi(z) \in \mathbb{Z}'(\mathbb{C})$, при этом:

$$\Psi(z) = \begin{cases} \psi(z), \quad \text{если} \quad \mathrm{Im} z > 0, \\ \frac{1}{2}\psi(x), \quad \text{если} \quad \mathrm{Im} z = 0, \\ 0, \quad \text{если} \quad \mathrm{Im} z < 0, \end{cases}$$

но $\Psi^+(x) = \psi(x)$, $\Psi^-(x) = 0$. Следовательно, так как

$$\Psi^+(x) - \Psi^-(x) = \psi(x), \quad \forall\ x \in \mathbb{R},$$

имеем $\Psi(z) = \hat{\psi}(z)$, где $\hat{\psi}(z)$ - аналитическое продолжение для $\psi(\xi) \in \mathbb{Z}(\mathbb{R})$, где

$$\Psi^+(x) = \lim_{\mathrm{Im} z \to +0} \Psi(z), \quad \Psi^-(x) = \lim_{\mathrm{Im} z \to -0} \Psi(z).$$

Итак,

$$\hat{\psi}(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\psi(\xi)\mathrm{d}\xi}{\xi - z} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\mathbb{R}} \frac{(\mathcal{F}\varphi)(\xi)\mathrm{d}\xi}{\xi - z} = (\widehat{\mathcal{F}\varphi})(z) =$$

$$= \begin{cases} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\, tz} \varphi(t)\mathrm{d}t, \quad \mathrm{Im} z > 0, \\ -\int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\, tz} \varphi(t)\mathrm{d}t, \quad \mathrm{Im} z < 0. \end{cases}$$

Из равенства

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\mathbb{R}} \frac{(\mathcal{F}\varphi)(\xi)\mathrm{d}\xi}{\xi - z} = \begin{cases} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\, tz} \varphi(t)\mathrm{d}t, \quad \mathrm{Im} z > 0, \\ -\int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\, tz} \varphi(t)\mathrm{d}t, \quad \mathrm{Im} z < 0, \end{cases} \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D},$$

в силу свойства транспозиции преобразования Фурье, справедливо равенство:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{2\pi \mathrm{i}\,(\xi - z)}\right\}(t_j z) = Y(\mathrm{Im} z)\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\, tz} Y(t) - Y(-\mathrm{Im} z)\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\, tz} Y(-t), \quad \forall\, t \in \mathbb{R},\ \mathrm{Im} z \neq 0,$$

где Y - *функция Хевисайда.*

Замечание. Получим это непосредственным вычислением.

Найдем преобразование $\mathcal{FL}$ функции Хевисайда $Y(x)$.

$$< \mathcal{FL}(Y), \psi > := < Y(x), (\mathcal{F}\psi)(x) > =$$

$$= \int_0^{+\infty} \mathrm{d}x \left\{ \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\, x\zeta} \psi(\zeta)\mathrm{d}(\zeta) \right\} = \int_{\mathbb{R}} \psi(\zeta)\mathrm{d}\zeta \left\{ \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\, x\zeta} \mathrm{d}x \right\}, \quad \mathrm{Im}\zeta > 0.$$

Следовательно,

$$< \mathcal{F}\mathcal{L}(Y), \psi >=< -\frac{1}{2\pi \mathrm{i}\,\zeta}, \psi(\zeta) >, \quad \mathrm{Im}\zeta > 0,$$

т. е.

$$\mathcal{K}\mathcal{F}(Y)(\zeta) = -\frac{1}{2\pi \mathrm{i}\,\zeta}, \quad \mathrm{Im}\zeta > 0,$$

или

$$\widehat{\mathcal{F}(Y)}(\zeta) = \mathcal{K}\mathcal{F}(Y)(\zeta) = -\frac{1}{2\pi \mathrm{i}\,\zeta}, \quad \mathrm{Im}\zeta > 0,$$

где $\widehat{\mathcal{F}(Y)}(\zeta)$ - аналитическое продолжение $\mathcal{F}(Y)$. Переходя к пределу при $\mathrm{Im}\zeta \to +0$ в смысле обобщенных функций из $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, имеем $\forall \varphi \in \mathcal{S}$ ([3], стр.90-99):

$$< \mathcal{F}(Y)(\xi), \varphi >= \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\mathbb{R}} \left\{ -\frac{1}{2\pi \mathrm{i}\,(\xi + \mathrm{i}\,\varepsilon)} \right\} \varphi(\xi) \mathrm{d}\xi =$$

$$= \left\langle -\frac{1}{2\pi \mathrm{i}\,(\xi + \mathrm{i}\,0)}, \varphi \right\rangle =< \delta_+, \varphi > .$$

Итак,

$$-\frac{1}{2\pi \mathrm{i}\,(\xi + \mathrm{i}\,0)} = \delta_+ = \frac{1}{2}\delta - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \mathrm{v.p.}\ \frac{1}{\xi}.$$

Аналогично:

$$-\frac{1}{2\pi \mathrm{i}\,(\xi - \mathrm{i}\,0)} = \delta_- = \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \mathrm{v.p.}\ \frac{1}{\xi}.$$

или

$$-\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \left\{ \frac{1}{\xi + \mathrm{i}\,0} + \frac{1}{\xi - \mathrm{i}\,0} \right\} = \delta_+ + \delta_- = \delta,$$

где $\delta_\pm := \frac{1}{2}\delta \mp \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \mathrm{v.p.}\ \frac{1}{\xi}$ - обобщенные функции (Племеля - Ю.В. Сохоцкого - В.Гейзенберга - Н.Н.Боголюбова)

Замечания об аналитических функционалах

Из курса комплексного анализа известно что, когда $g(\tau)$ - голоморфная функция, $\forall\ \psi \in \mathbb{Z}(\mathbb{C})$, интеграл

$$\int_\Gamma g(\tau)\psi(\tau)\mathrm{d}\tau =< g, \psi >$$

не меняет величины $< g, \psi >$ при непрерывной деформации контура Γ, если начало и конец контура фиксированы и контур Γ не проходит через особые точки функции $g(\zeta)$ (принцип гомотопии).

Например, функционал-единица:

$$< 1, \psi >:= \int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot \psi(\xi) \mathrm{d}\xi$$

может быть задан интегрированием не только по вещественной оси, но и вдоль любой линии, идущей из $-\infty$ в ∞ в пределах некоторой полосы $|\mathrm{Im}\zeta| \leq C$. Линии, вдоль которых от любой тестовой (пробной) функции $\psi(\zeta) \in \mathbb{Z}(\mathbb{C})$ интегралы равны, называют эквивалентными ([2], стр.183).

Если за Γ взять замкнутый контур, то получим функционал, равный нулю. *Контур, вдоль которого интегралы от любой пробной функции* $\psi(\zeta) \in \mathbb{Z}(\mathbb{C})$ *равны нулю, называют нулевыми.*

Функция $g(\zeta) = 1/\zeta$ порождает два различных аналитических функционала:

$$< U_+, \psi >:= \int_{-\infty+a\mathrm{i}}^{+\infty+a\mathrm{i}} \frac{\psi(\xi)\mathrm{d}\xi}{\xi}, \quad a > 0,$$

$$< U_-, \psi >:= \int_{-\infty-a\mathrm{i}}^{+\infty-a\mathrm{i}} \frac{\psi(\xi)\mathrm{d}\xi}{\xi}, \quad a > 0,$$

где интегрирование ведется вдоль прямой, параллельной вещественной оси. Оба эти функционала удовлетворяют уравнению

$$\xi U = 1.$$

Разность $(U_- - U_+)$ может быть приведена к виду

$$< (U_- - U_+), \psi >= \oint_{|\zeta|=1} \frac{\psi(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{\zeta} = 2\pi\mathrm{i}\,\psi(0) = 2\pi\mathrm{i}\,\delta(\zeta),$$

где $\delta(\zeta)$ - ультраобобщенная функция Дирака.

Очевидно, $\delta(\zeta)$ удовлетворяет уравнению:

$$\zeta\delta(\zeta) = 0.$$

5 Приложение к обыкновенным линейным дифференциальным уравнениям в пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

Рассмотрим уравнение

$$P(D)T = S \quad \text{в} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \tag{1}$$

где

$$P(D)=\sum_{k=0}^{n}a_kD^k,\quad D=-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x},\quad a_k\in\mathbb{C}.$$

Преобразование $\mathcal{FL}$, основанное на функционале

$$\mathcal{F}(\varphi)(\xi):=\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\,x\xi}\varphi(x)\mathrm{d}x,\quad \forall\,\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}),$$

действует по формуле

$$<\mathcal{FL}(T),\psi>:=<T(x),\mathcal{F}(\psi)(x)>,\quad \forall\,T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})\quad \forall\,\psi\in\mathbb{Z}(\mathbb{C}),$$

где $\mathbb{Z}(\mathbb{C}):=\mathcal{FL}(\mathcal{D})$, $\psi=\mathcal{FL}(\varphi)(\zeta)$, $\forall\,\zeta\in\mathbb{C}$.

Применяя преобразование $\mathcal{FL}$ к уравнению

$$P(D)E=\delta(x),\tag{2}$$

определяющему элементарное решение оператора $P(D)$, имеем уравнение в $\mathbb{Z}'(\mathbb{C})$

$$P(\zeta)\cdot\widetilde{E}(\zeta)=1\quad\forall\,\zeta\in\mathbb{C},\tag{3}$$

где $\widetilde{E}=\mathcal{FL}(E)$, $P(\zeta)=\sum_{k=0}^{n}a_k\zeta^k$.

Пусть ζ_j - нули полинома $P(\zeta)$ кратности q_j, $j=\overline{1,p}$, т. е. $n=\sum_{j=1}^{p}q_j$. Тогда имеем мультипликативную факторизацию уравнения (2)

$$\prod_{j=1}^{p}(\zeta-\zeta_j)^{q_j}\cdot\widetilde{E}=1\quad\forall\,\zeta\in\mathbb{C},\tag{4}$$

которая влечет сверточную факторизацию уравнения (2):

$$\circledast_{j=1}^{p}\left(\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}x}+2\pi\mathrm{i}\,\zeta_j\delta\right)^{q_j}*E=(-2\pi\mathrm{i}\,)^n\delta(x).\tag{5}$$

Из представления уравнения (5) вытекает структура элементарного решения E оператора $P(D)$:

$$E(x)=(-2\pi\mathrm{i}\,)^n\circledast_{j=1}^{p}E_j,$$

где

$$E_j=\left(\frac{1}{2}\mathrm{sgn}\;x\right)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\,\zeta_jx}\frac{x^{q_j}}{\Gamma(q_j)},$$

$\Gamma(\cdot)$ - гамма - функция Эйлера. А общая структура элементарного решения оператора $P(D)$ имеет вид:

$$\mathcal{E}(x) = (-2\pi\mathrm{i}\,)^n \circledast_{j=1}^{p} E_j + \sum_{j=1}^{p} Q_{q_j-1}(x)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\,\zeta_j x}, \tag{6}$$

где $Q_{q_j-1}(x)$ - полиномы степени $(q_j - 1)$ с произвольными коэффициентами.

Отметим, что общая структура $\mathcal{E}$ элементарных решений оператора $P(D)$ позволяет за счет произвола, входящего в полиномы $Q_{q_j-1}(x)$, находить элементарные решения, принадлежащие различным сверточным алгебрам. Это позволяет решать вопросы существования и единственности решения уравнения (1) даже в сверточных модулях на этих сверточных алгебрах.

Например, если рассматривать уравнение (1) в сверточной алгебре $\mathcal{D}'_+$ - обобщенных функции с носителями в $\mathbb{R}_+ := [0, +\infty]$, то элементарное решение, принадлежащее этой сверточной алгебре имеет вид:

$$\mathcal{E}^+(x) = \circledast_{j=1}^{p} \mathcal{E}_j^+(x),$$

где

$$\mathcal{E}_j^+(x) = Y(x)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\,\zeta x}\frac{x^{q_j-1}}{\Gamma(q_j)}.$$

Уравнение (1) имеет в этом случае единственное решение в $\mathcal{D}'_+$ $\forall\ S \in \mathcal{D}'_+$, следующего вида:

$$T = \mathcal{E}^+(x) * S.$$

Наконец, отметим, что общая структура $\mathcal{E}$ элементарного решения оператора $P(D)$, определяемая формулой (6), позволяет находить функции Грина оператора $P(D)$ при решении краевых задач для уравнения (1).

Примеры в $\mathbb{Z}'(\mathbb{C})$

1) Пусть $a \in \mathbb{C}$, $\delta_a \in \mathbb{Z}'(\mathbb{C})$. Найти $\mathcal{FL}(\delta_a)(\zeta)$.

Решение.

$$< \mathcal{FL}^{-1}(\delta_a), \varphi >=< \delta_a, \overline{\mathcal{F}}\varphi >=< \delta_a, \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\,x\zeta}\varphi(x)\mathrm{d}x >=$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\,xa}\varphi(x)\mathrm{d}x =< \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\,xa}, \varphi > \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}.$$

т. е. $\mathcal{F}\mathcal{L}^{-1}(\delta_a) = \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}\, xa} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $\forall\ a \in \mathbb{C}$.

2) Пусть $\dfrac{\mathrm{d}^n\delta_a}{\mathrm{d}\zeta^n} \in \mathbb{Z}'(\mathbb{C})$ $\forall a \in \mathbb{C}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Найти $\mathcal{F}\mathcal{L}^{-1}$.

Решение.

$$<\mathcal{F}\mathcal{L}^{-1}[\delta_a^{(n)}(\zeta),\varphi]>=<\delta_a^{(n)}(\zeta),\overline{\mathcal{F}}\varphi>=<\delta_a(\zeta),\left[\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\,x\zeta}\varphi(x)\mathrm{d}x\right]^{(n)}>=$$

$$=(-1)^n<\delta_a(\zeta),\int_{\mathbb{R}}(-2\pi\mathrm{i}\,x)^n\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\,x\zeta}\varphi(x)\mathrm{d}x>=(2\pi\mathrm{i}\,x)^n\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\,xa}\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

3) Найти $\zeta\delta'(\zeta)$ в $\mathbb{Z}'(\mathbb{C})$, где $\delta(\zeta)$ - ультраобобщенная функция Дирака.

Решение.

1-й способ:

$$<\zeta\delta',\psi>=<\delta',\zeta\psi>=-<\delta(\zeta),\{\zeta\psi(\zeta)\}'>=-\{\zeta\psi(\zeta)\}'|_{\zeta=0}=$$

$$\{-\psi(\zeta)-\zeta\psi'(\zeta)\}|_{\zeta=0}=-\psi(0)=<-\delta(\zeta),\psi>.$$

Следовательно, $\zeta\delta' = -\delta(\zeta)$.

2-й способ:

Так как $\zeta\delta(\zeta) = 0$, то $\{\zeta\delta(\zeta)\}' = 0$. Следовательно, $\delta(\zeta) + \zeta\delta'(\zeta) = 0$ или $\zeta\delta'(\zeta) = -\delta(\zeta)$.

3-й способ:

$$<\zeta\delta'(\zeta),\psi>=<\delta'(\zeta),\zeta\psi>=-<\delta(\zeta),(\zeta\psi)'>=$$

$$-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_L\frac{(\tau\psi)'\mathrm{d}\tau}{\tau}=-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_L\frac{\psi(\tau)\mathrm{d}\tau}{\tau}-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_L\frac{\tau\psi'\mathrm{d}\tau}{\tau}=<-\delta(\zeta),\varphi>.$$

Следовательно, $\zeta\delta'(\zeta) = -\delta(\zeta)$.

4) Пусть $k \le n$. Найти $\zeta^k\delta^{(n)}(\zeta)$.

Решение.

$$<\zeta^k\delta^{(n)}(\zeta),\psi>=<\delta^{(n)}(\zeta),\zeta^k\psi>=(-1)^n<\delta(\zeta),\{\zeta^k\psi\}^{(n)}>,$$

но $\{\zeta^k\psi\}^{(n)} = \sum_{j=0}^n \mathrm{C}_n^j(\zeta^k)^{(j)}(\psi)^{(n-j)} = \sum_{j=n}^k \mathrm{C}_n^j(\zeta^k)^{(j)}(\psi)^{(n-j)}$, то

$$(-1)^n<\delta(\zeta),\{\zeta^k\psi\}^{(n)}>=(-1)^n\mathrm{C}_n^k k!(\psi)^{(n-k)}(0),$$

$$<\delta^{(n-k)(\zeta)},\psi>=(-1)^{n-k}<\delta(\zeta),\psi^{(n-k)}>=(-1)^{n-k}\psi^{(n-k)}(0).$$

Откуда $\psi^{(n-k)}(0) = (-1)^{n-k}\delta^{(n-k)}(\zeta)$.

Следовательно,

$$< \zeta^k \delta^{(n)}, \psi >= (-1)^k \mathrm{C}_n^k k! < \delta^{(n-k)}(\zeta), \psi >,$$

т.е.

$$< \zeta^k \delta^{(n)}, \psi >= (-1)^k \mathrm{C}_n^k k! < \delta^{(n-k)}(\zeta), \psi >,$$

но

$$\mathrm{C}_n^k k! = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Итак, имеем:

$$\zeta^k \delta^{(n)}(\zeta) = (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} \delta^{(n-k)}(\zeta), \quad \forall\, k, n \in \mathbb{N}\ (k \leq n).$$

Если $k = n$, то:

$$\zeta^n \delta^{(n)}(\zeta) = (-1)^n n! \delta.$$

Пример уравнения в $\mathbb{Z}'(\mathbb{C})$.

Дано уравнение

$$\zeta V = 1, \quad \text{в} \quad \mathbb{Z}'(\mathbb{C}). \tag{7}$$

Найдем частное решение $V_{\text{ч}}$. Уравнение (7) в $\mathbb{Z}'(\mathbb{C})$ означает:

$$< \zeta V_{\text{ч}}, \psi >=< 1, \psi >, \quad \forall\, \psi(\zeta) \in \mathbb{Z}(\mathbb{C}).$$

Функция $1/\zeta$ порождает различные функционалы:

$$< U^+, \psi >:= \int_{-\infty + a\mathrm{i}}^{+\infty + a\mathrm{i}} \frac{\psi(\xi)\mathrm{d}\xi}{\xi} \quad \forall\, \psi \in \mathbb{Z}(\mathbb{C}),$$

$$< U^-, \psi >:= \int_{-\infty - a\mathrm{i}}^{+\infty - a\mathrm{i}} \frac{\psi(\xi)\mathrm{d}\xi}{\xi} \quad \forall\, \psi \in \mathbb{Z}(\mathbb{C}),$$

где $a > 0$, $\zeta = \xi \pm \mathrm{i}\, a$, $\xi \in \mathbb{R}$. Они являются частными решениями уравнения (7). Рассмотрим разность $(U^- - U^+)$. Этот функционал может быть представлен в виде:

$$< U^- - U^+, \psi >= \oint_{|\zeta|=1} \frac{\psi(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{\zeta} = 2\pi\mathrm{i}\, \psi(0) = 2\pi\mathrm{i}\, < \delta(\zeta), \psi >,$$

т. е. функционал $V = U^- - U^+ = C\delta(\zeta)$ есть общее решение соответствующего однородного уравнения (7), где $\delta(\zeta)$ - ультраобобщенная функция Дирака, а C - произвольная константа.

Приложение в $\mathcal{D}'_+$.

Пусть $T \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$, имеющая асимптотическую грань ([3], стр. 81): $\mathrm{e}^{2\pi x\beta}$, где $\beta > 0$, т. е. существуют константы $R > 0$ и $C > 0$ такие, что $\forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ с носителем в $x > R$ имеет место оценка:

$$| < T, \varphi > | \leq C \int_{\mathbb{R}_+} \mathrm{e}^{2\pi x\beta} |\varphi(x)| \mathrm{d}x.$$

В символике Ландау это записывают так:

$$T = O(\mathrm{e}^{2\pi x\beta}).$$

Покажем, что преобразование $\mathcal{FL}(T)(\zeta)$ есть голоморфная функция в полуплоскости $\mathrm{Im}\zeta > \beta$. Рассмотрим мультипликативное произведение $T\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\, x\sigma}$, где $\sigma = \alpha + \mathrm{i}\,\beta$, $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$. Очевидно, $T\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\, x\sigma} \in \mathcal{S}'_+(\mathbb{R})$.

Известна ([3], стр. 127) структура обобщенной функции медленного роста. Для любой обобщенной функции $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ существует $n \in \mathbb{N}$ и непрерывная функция медленного роста f такие, что

$$S = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} f(x),$$

где $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}$ - производная в смысле обобщенных функций. Поэтому обобщенная функция $T \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$, имеющая асимптотическую грань $\exp(2\pi x\beta)$, $\beta > 0$, имеет структуру:

$$T = \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}\, x\sigma} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} f(x).$$

Следовательно, в силу свойств преобразования Фурье-Лапласа, имеем

$$\mathcal{FL}(T)(\zeta) = \tau_\sigma \delta(\zeta) * (-2\pi \mathrm{i}\, \zeta)^n \mathcal{FL}(f)(\zeta), \quad \mathrm{Im}\zeta > \beta,$$

где τ_σ - оператор сдвига в точку $\zeta = \sigma \in \mathbb{C}$ для ультраобобщенной функции Дирака $\delta(\zeta)$.

Итак, имеем:

$$\mathcal{FL}(T)(\zeta) = [-2\pi \mathrm{i}\, (\zeta - \sigma)]^n [\mathcal{FL}(f)](\zeta - \sigma), \quad \mathrm{Im}\zeta > \beta > 0.$$

Задача для самостоятельного решения. Пусть $T = Y(x)\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}\, x\sigma} \dfrac{x^{m-1}}{(m-1)!}$, где $m \in \mathbb{N}$, $\sigma \in \mathbb{C}$ ($\mathrm{Im}\sigma > 0$), а $Y(x)$ - функция Хевисайда. Найти $\mathcal{FL}(T)$.

Известно, что пространство $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ обобщенных функций на $\mathbb{R}$ с носителями на $\mathbb{R}_+ := [0, +\infty]$, снабженное операцией свертки, является *сверточной алгеброй с единицей* (δ-мера Дирака). Свертка обобщенных функций S и T из $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ определяется формулой

$$< S * T, \varphi >:=< S(x) \otimes T(y), \varphi(x+y) > \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),$$

где $\otimes$ - *тензорное (прямое) произведение.*

А тензорное произведение $S \otimes T$ вычисляется по итерационной формуле дуальности:

$$< S\otimes T, \varphi(x+y) >=< S(x), < T(y), \varphi(x+y) >>=< T(y), < S(x), \varphi(x+y) >> .$$

Здесь используется некорректная, но удобная для практики символика.

Вычислим $\mathcal{FL}(S * T)(\zeta)$. Для $\forall\, \psi \in \mathbb{Z}(\mathbb{C})$ имеем:

$$< \mathcal{FL}(S * T), \psi >=< S * T, \mathcal{F}\psi >=< S \otimes T, (\mathcal{F}\psi)(x+y) >=$$

$$=< S \otimes T, < \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\,(x+y)\xi}, \psi(\xi) >>:=< S(x) \otimes T(y), \eta(x,y) < \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\,(x+y)\xi}, \psi(\xi) >>,$$

где $\eta(x,y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ такая, что $\eta(x,y) = 1$ в окрестности $(\operatorname{supp} S \times \operatorname{supp} T) \cap \operatorname{supp} \varphi(x+y)$, которая есть компакт в $\mathbb{R}^2$. Такая функция существует в силу леммы об отделимости типа Урысона.

Следовательно, далее имеем:

$$< \mathcal{FL}(S * T)(\zeta), \psi(\zeta) >=< \psi(\zeta), < S(x)\eta(x,y)\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\,x\zeta} >< T(y), \eta(x,y)\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\,y\zeta} >>=$$

$$=<< S(x)\eta(x,y), \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\,x\zeta} >< T(y)\eta(y), \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\,y\zeta} >, \psi(\zeta) >=$$

$$=< \mathcal{FL}(S)(\zeta) \cdot \mathcal{FL}(T)(\zeta), \psi(\zeta) >, \quad \mathrm{Im}\zeta > 0.$$

Таким образом, имеем: $\forall S, T \in \mathcal{D}'_+$

$$\mathcal{FL}(S * T)(\zeta) = \mathcal{FL}(S) \cdot \mathcal{FL}(T)(\zeta), \quad \mathrm{Im}\zeta > 0.$$

Итак, сверточная алгебра $\mathcal{D}'_+$ изоморфна мультипликативной алгебре функций, аналитических в $\mathrm{Im}\zeta > 0$ с обычной единицей.

Покажем, что $\mathcal{FL}(\delta)(\zeta) = 1$ в $\mathrm{Im}\zeta > 0$.

Так как $\delta \in \mathcal{S}'_+ \subset \mathcal{D}'_+$,

$$\mathcal{FL}(\delta)(\zeta) = \mathcal{KF}(\delta) = \mathcal{KF}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Y(t)\right)(\zeta) =$$

$$= (-2\pi \mathrm{i}\,\zeta) \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\, t\zeta} \mathrm{d}\zeta = (-2\pi \mathrm{i}\,\zeta) \frac{1}{-2\pi \mathrm{i}\,\zeta} = 1, \quad \mathrm{Im}\zeta > 0.$$

Обозначим через $A^+(\zeta)$ мультипликативную алгебру функций аналитических в полуплоскости $\mathrm{Im}\zeta > 0$.

Итак,

$$A^+ = \mathcal{FL}(\mathcal{D}'_+)(\zeta).$$

Так как пространства $A^+(\zeta)$ и $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ изоморфны при преобразовании Фурье-Лапласа $\mathcal{FL}$, возникает вопрос отыскания по заданному элементу из $A^+(\zeta)$ элемента из $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$.

Пользоваться теорией на практике не всегда рационально. Предпочтение отдается частным приемам, использующим свойства пространства $\mathcal{FL}$. Например, пусть

$$f^+(\zeta) = \frac{\zeta}{\zeta - \sigma}, \quad \mathrm{Im}\zeta > \mathrm{Im}\sigma > 0.$$

Найти обобщенную функцию $T \in \mathcal{D}'_+$ такую, что

$$\mathcal{FL}(T)(\zeta) = \frac{\zeta}{\zeta - \sigma}, \quad \mathrm{Im}\zeta > \mathrm{Im}\sigma > 0.$$

Имеем:

$$(-2\pi \mathrm{i}\,\zeta + 2\pi \mathrm{i}\,\sigma)\mathcal{FL}(T)(\zeta) = -2\pi \mathrm{i}\,\zeta \quad \forall\, \zeta \in \mathbb{C},$$

или

$$\mathcal{FL}\left\{\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} + 2\pi \mathrm{i}\,\sigma T\right\}(\zeta) = \mathcal{FL}\left(\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}x}\right)(\zeta),$$

т. е.

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} + 2\pi \mathrm{i}\,\sigma T = \frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}x} \quad \text{в} \quad \mathcal{D}'_+.$$

Но элементарные решения оператора $\mathrm{d}/\mathrm{d}x + 2\pi \mathrm{i}\,\sigma$ в $\mathcal{D}'_+$ суть

$$E(x) = Y(t)\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}\,\sigma t},$$

где $Y(t)$ - функция Хевисайда.

Поскольку $E \in \mathcal{D}'_+$, существует единственное решение последнего уравнения в $\mathcal{D}'_+$, которое имеет вид:

$$T = E * \frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}x} = \delta(x) - 2\pi \mathrm{i}\,\sigma Y(x)\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}\,\sigma x}.$$

Пример. Дано: $f^{+}(\zeta)=1/P(\zeta)$, где $\mathrm{Im}\zeta>\mathrm{Im}\zeta_j>0$. Найти $T\in\mathcal{D}'_{+}$ такую, что $f^{+}(\zeta)=\mathcal{FL}(T)(\zeta)$. Здесь

$$P(\zeta)=\sum_{k=0}^{n}a_k\zeta^k,\quad a_n=1,\quad a_k\in\mathbb{C},$$

а ζ_j - тот из нулей полинома $P(\zeta)$, который имеет наибольшую мнимую часть.

Решение. Пусть ζ_k - нули кратности q_k, $k=\overline{1,p}$, т.е. $\sum_{k=1}^{p}q_k=n$. Тогда имеем:

$$\prod_{k=1}^{p}(\zeta-\zeta_k)^{q_k}\cdot\mathcal{FL}(T)(\zeta)=1,\quad \mathrm{Im}\zeta>\mathrm{Im}\zeta_j,$$

или

$$\prod_{k=1}^{p}(-2\pi\mathrm{i}\,\zeta+2\pi\mathrm{i}\,\zeta_k)^{q_k}\cdot\mathcal{FL}(T)(\zeta)=(-2\pi\mathrm{i}\,)^n,$$

или

$$\mathcal{FL}\left\{\circledast_{k=1}^{p}[\delta'(x)+2\pi\mathrm{i}\,\zeta_k\delta(x)]^{*q_k}*T(x)\right\}=(-2\pi\mathrm{i}\,)^n\mathcal{FL}(\delta).$$

Следовательно,

$$\circledast_{k=1}^{p}[\delta'+2\pi\mathrm{i}\,\zeta_k\delta]*T=(-2\pi\mathrm{i}\,)^n\delta(x)\qquad(a)$$

в $\mathcal{D}'_{+}$. Элементарное решение оператора $\{\circledast_{k=1}^{p}[\delta'+2\pi\mathrm{i}\,\zeta_k\delta]^{*q_k}*\cdot\}$, принадлежащее $\mathcal{D}'_{+}$, имеет вид

$$E(x)=\circledast_{k=1}^{n}E_k(x),$$

где

$$E_k(x)=Y(x)\frac{\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\,\zeta_k x}x^{q_k-1}}{\Gamma(q_k)}.$$

Следовательно, существует единственное решение уравнения (a) в $\mathcal{D}'_{+}$, которое имеет вид:

$$T=(-2\pi\mathrm{i}\,)^nE(x)*\delta(x)=(-2\pi\mathrm{i}\,)^nE(x)\in\mathcal{D}'_{+}.$$

6 Приложение преобразования Фурье-Лапласа к операторам комплексного интегродифференцирования

Рассмотрим семейство по $\lambda \in \mathbb{C}$ обобщенных функций из сверточной алгебры $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$:

$$f_\lambda(t) = \begin{cases} Y(t)\frac{\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\,\sigma t}t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}, & \mathrm{Re}\lambda > 0, \\ \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + 2\pi\mathrm{i}\,\sigma\right)^m f_{\lambda+m}(t), & \mathrm{Re}\lambda \le 0,\ m \in \mathbb{N}\ \ (\mathrm{Re}\lambda + m > 0), \end{cases}$$

где $Y(t)$ - функция Хевисайда; $\Gamma(\lambda)$ - Гамма-функция; σ - фиксированное комплексное число, мнимая часть которого больше нуля; $(\mathrm{d}/\mathrm{d}t + 2\pi\mathrm{i}\,\sigma)^m$ - есть m-ая итерация оператора $(\mathrm{d}/\mathrm{d}t + 2\pi\mathrm{i}\,\sigma)$ в смысле обобщенных функций; $t^\lambda = \mathrm{e}^{\lambda \ln t}$ - ветвь, фиксированная условием $\arg t = 0$ на верхнем берегу разреза по $\mathbb{R}_+ := [0, +\infty]$.

Выясним, привлекая преобразование Фурье-Лапласа, свойства этого семейства по отношению к операции свертки.

Отметим, что обобщенные функции из этого семейства принадлежат сверточной алгебре $\mathcal{D}'_+$. Поэтому применяем преобразование Фурье-Лапласа.

С учетом свойств преобразования Фурье-Лапласа, достаточно найти образ Фурье-Лапласа для функции-ската:

$$h(t) = Y(t)\frac{t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}, \quad \mathrm{Re}\lambda > 0.$$

Имеем,

$$\mathcal{FL}\{h(t)\}(\zeta) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\,t\zeta}t^{\lambda-1}\mathrm{d}t, \quad \mathrm{Im}\zeta > 0.$$

Вычислим интеграл

$$I(\lambda,\zeta) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\,t\zeta}t^{\lambda-1}\mathrm{d}t.$$

Введем замену:

$$-2\pi\mathrm{i}\,t\zeta = \tau, \quad t = -\frac{\tau}{2\pi\mathrm{i}\,\zeta}, \quad \mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}\tau}{2\pi\mathrm{i}\,\zeta}.$$

Переменная τ меняется по лучу $\{\tau = -2\pi\mathrm{i}\,t\zeta,\ 0 < t < \infty\}$ в полуплоскости $\mathrm{Im}\zeta > 0$.

Тогда имеем

$$I(\lambda,\zeta) = \int_0^{-2\pi\mathrm{i}\,\infty\zeta} \mathrm{e}^{-\tau}\left(\frac{-1}{2\pi\mathrm{i}\,\zeta}\right)^\lambda \tau^{\lambda-1}\mathrm{d}\tau =$$

$$= \left(\frac{-1}{2\pi\mathrm{i}\,\zeta}\right)^{\lambda} \int_0^{-2\pi\mathrm{i}\,\infty\zeta} \mathrm{e}^{-\tau}\tau^{\lambda-1}\mathrm{d}\tau, \quad \mathrm{Im}\zeta > 0.$$

В силу интегральной теоремы Коши и леммы Жордана, возможна змена луча интегрирования на луч $\mathbb{R}_+$. Следовательно, имеем:

$$I(\lambda,\zeta) = \left(\frac{-1}{2\pi\mathrm{i}\,\zeta}\right)^{\lambda} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\xi}\xi^{\lambda-1}\mathrm{d}\xi = \left(\frac{-1}{2\pi\mathrm{i}\,\zeta}\right)^{\lambda}\Gamma(\lambda).$$

Таким образом,

$$\mathcal{FL}(h)(\zeta) = \left(\frac{-1}{2\pi\mathrm{i}\,\zeta}\right)^{\lambda}, \quad \mathrm{Im}\zeta > 0.$$

Поэтому

$$\mathcal{FL}(f_\lambda)(\zeta) = \frac{1}{[-2\pi\mathrm{i}\,(\zeta-\sigma)]^{\lambda}}, \quad \mathrm{Im}\zeta > \mathrm{Im}\sigma > 0, \quad \mathrm{Re}\lambda > 0.$$

Аналогично имеем:

$$\mathcal{FL}(f_\lambda)(\zeta) = \frac{1}{[-2\pi\mathrm{i}\,(\zeta-\sigma)]^{\lambda}}, \quad \mathrm{Im}\zeta > \mathrm{Im}\sigma > 0, \quad \mathrm{Re}\lambda \le 0.$$

Очевидно, семейство $\{\mathcal{FL}(f_\lambda)(\zeta),\ \forall\ \lambda \in \mathbb{C}\}$, снабженное операцией “мультипликативное произведение”, является мультипликативной группой с обычной единицей, а изоморфное ему семейство $\{f_\lambda(t),\ \forall\ \lambda \in \mathbb{C}\}\}$ является сверточной группой с единицей (мерой Дирака), т. е.

$$\begin{cases} f_\lambda(t) * f_\mu(t) = f_{\lambda+\mu}(t), & \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \\ f_\lambda(t) * f_{-\lambda}(t) = f_0(t) = \delta. \end{cases}$$

Замечание. Доказать эти свойства непосредственным вычислением сверток.

По аналогии с известными операторами Римана-Лиувилля ([5], стр. 143), оператор $\{f_\lambda(t)*\cdot\}, \forall\ \lambda \in \mathbb{C}$ можно назвать *операторами комплексного (фрактального) интегродифференцирования.*

7 О мультипликативном произведении обобщенных функций

Эта операция вводится всегда с определенными условиями, ибо, как было показано Л. Шварцем на простом примере, не всегда выполняется основной закон мультипликативного произведения - закон ассоциативности.

Рассмотрим три обобщенных функции v.p.$\frac{1}{t}$, t, δ.

Вычислим:

1) $\{\text{v.p.}\frac{1}{t}\cdot t\}\cdot\delta=\delta$,

2) v.p.$\frac{1}{t}\cdot\{t\cdot\delta\}=\delta$.

Известно, что пространство $\mathcal{S}'_+(\mathbb{R})$ обобщенных функций медленного роста с носителями в $\mathbb{R}_+ := [0,\infty]$, снабженное операцией "свертка", есть сверточная алгебра, т. е. векторное пространство, снабженное операцией "свертка", при этом операция "свертка" коммутативна, ассоциативна и является внутренним законом композиции.

Преобразование Карлемана-Фурье отображает взаимно-однозначно сверточную алгебру $\mathcal{S}'_+(\mathbb{R})$ на мультипликативную алгебру $A^+(\mathbb{C})$ функций, аналитических в верхней полуплоскости $\mathrm{Im}\zeta>0$.

Напомним, что если $f(t)$ - функция медленного роста, т. е. непрерывная функция на $\mathbb{R}$, растущая на бесконечности не быстрее полинома, то преобразование Карлемана-Фурье определяется по формуле ([3], стр. 119):

$$\mathcal{KF}(f)(\zeta):=\begin{cases}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\,t\zeta}f(t)\mathrm{d}t, & \mathrm{Im}\zeta>0,\\ -\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\,t\zeta}f(t)\mathrm{d}t, & \mathrm{Im}\zeta<0\end{cases}$$

или

$$\mathcal{KF}(f)(\zeta)=Y(\mathrm{Im}\zeta)\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\,t\zeta}f(t)\mathrm{d}t-Y(-\mathrm{Im}\zeta)\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\,t\zeta}f(t)\mathrm{d}t.$$

Если же $T\in\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, то известна структура обобщенной функции T, т. е. существует $n\in\mathbb{N}$ и функция медленного роста $f(t)$ такие, что

$$T=\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}f(t),$$

где $\mathrm{d}^n/\mathrm{d}t^n$ понимается в смысле обобщенных функций.

Поэтому преобразование Карлемана-Фурье $T\in\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ определяется по формуле ([3], стр. 128):

$$\mathcal{KF}(T)(\zeta)=(-2\pi\mathrm{i}\,\zeta)^n\mathcal{KF}(f)(\zeta),\quad \mathrm{Im}\zeta\neq0.$$

Например, пусть $T=1\in\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, тогда:

$$\mathcal{KF}(1)(\zeta)=Y(\mathrm{Im}\zeta)\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\,t\zeta}\mathrm{d}t-Y(-\mathrm{Im}\zeta)\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\,t\zeta}\mathrm{d}t=-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}\,\zeta},\quad \mathrm{Im}\zeta\neq0.$$

Но, если $T = Y(t)$ - функция Хевисайда, то имеем:

$$\mathcal{KF}(Y)(\zeta) = Y(\mathrm{Im}\zeta)\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\,t\zeta}\mathrm{d}t = -\frac{1}{2\pi\mathrm{i}\,\zeta}, \quad \mathrm{Im}\zeta > 0.$$

Пусть $T = \delta$ - мера Дирака, принадлежащая $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, тогда имеем:

$$\mathcal{KF}(\delta)(\zeta) = \mathcal{KF}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{1}{2}\mathrm{sgn}\ t)\right](\zeta) = (-2\pi\mathrm{i}\,\zeta)\frac{1}{2}\mathcal{KF}(\mathrm{sgn}\ t)(\zeta) =$$

$$= (-2\pi\mathrm{i}\,\zeta)\frac{1}{2}\left\{Y(\mathrm{Im}\zeta)\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\,t\zeta}\mathrm{d}t + Y(-\mathrm{Im}\zeta)\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\,t\zeta}\mathrm{d}t\right\} =$$

$$= (-2\pi\mathrm{i}\,\zeta)\frac{1}{2}\left\{Y(\mathrm{Im}\zeta)\frac{1}{-2\pi\mathrm{i}\,\zeta} + Y(-\mathrm{Im}\zeta)\frac{1}{2\pi\mathrm{i}\,\zeta}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}Y(\mathrm{Im}\zeta) - \frac{1}{2}Y(-\mathrm{Im}\zeta), \quad \mathrm{Im}\zeta \neq 0.$$

Если же $T = \delta$ - мера Дирака, принадлежащая $\mathcal{S}'_+(\mathbb{R})$, то имеем:

$$\mathcal{KF}(\delta)(\zeta) = \mathcal{KF}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Y(t)\right](\zeta) = (-2\pi\mathrm{i}\,\zeta)\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\,t\zeta}\mathrm{d}t = 1, \quad \mathrm{Im}\zeta > 0.$$

Заметим, что последние два примера характерны тем, что одна и таже обобщенная функция - мера Дирака - имеет различные образы при преобразовании $\mathcal{FL}$, ибо она принадлежит разным пространствам обобщенных функций.

Известна связь преобразования Фурье с преобразованием Карлемана-Фурье ([3], стр. 128), которая в символической записи имеет вид:

$$\mathcal{F}(T) = \mathcal{KF}^+(T) - \mathcal{KF}^-(T) \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R} \tag{I}$$

или

$$\widehat{\mathcal{F}(T)}(\zeta) = \mathcal{KF}(T)(\zeta), \quad \mathrm{Im}\zeta \neq 0, \tag{II}$$

где соотношение (I) это предельное соотношение в смысле обобщенных функций из $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, т. е.:

$$< \mathcal{F}(T), \varphi >= \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\mathbb{R}}\{\mathcal{KF}(T)(\xi+\mathrm{i}\,\varepsilon) - \mathcal{KF}(T)(\xi-\mathrm{i}\,\varepsilon)\}\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi,\ \forall\ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

А в соотношении (II) $\widehat{\mathcal{F}(T)}(\zeta)$ - это аналитическое представление преобразования Фурье $\mathcal{F}(T)(\zeta)$ есть преобразование Карлемана-Фурье обобщенной функции $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Отметим, что на практике часто удобна формула (II) для отыскания аналитического представления обобщенных функций медленного роста.

Действительно, пусть $\mathcal{F}(T) = S$. Очевидно, в силу автоморфизма преобразования Фурье в пространстве $\mathcal{S}'$, обобщенная функция $S \in \mathcal{S}'$. Тогда $T = \overline{\mathcal{F}}(S)$ где $\overline{\mathcal{F}}$ - копреобразование Фурье в $\mathcal{S}'$, которое в пространстве $\mathcal{S}'$ является обратным преобразованием Фурье.

Поэтому соотношение (II) примет вид:

$$\widehat{S}(\zeta) = \mathcal{KF}[\overline{\mathcal{F}}(S)](\zeta), \quad \mathrm{Im}\zeta \neq 0.$$

Примеры.

1) Пусть $S = \sin(2\pi\alpha t)$, $\alpha > 0$. Найти $\widehat{S}(\zeta)$.

Решение.

$$\overline{\mathcal{F}}(S) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\overline{\mathcal{F}}\{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\,t\alpha} - \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\,t\alpha}\} = \frac{1}{2\mathrm{i}}\{\delta_\alpha(x) - \delta_{-\alpha}(x)\}.$$

Тогда

$$\widehat{S}(\zeta) = \mathcal{KF}[\overline{\mathcal{F}}(S)](\zeta) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\{\mathcal{KF}(\delta_\alpha) - \mathcal{KF}(\delta_{-\alpha})\}(\zeta) =$$

$$\frac{1}{2\mathrm{i}}\left\{\mathcal{KF}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t-\alpha)\right]\right)(\zeta) - \mathcal{KF}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t+\alpha)\right]\right)(\zeta)\right\} =$$

$$= \frac{1}{2\mathrm{i}}\left\{\frac{1}{2}(-2\pi\mathrm{i}\,\zeta)\mathcal{KF}[\mathrm{sgn}(t-\alpha)](\zeta) - \frac{1}{2}(-2\pi\mathrm{i}\,\zeta)\mathcal{KF}[\mathrm{sgn}(t+\alpha)](\zeta)\right\} =$$

$$= \frac{1}{4\mathrm{i}}(-2\pi\mathrm{i}\,\zeta)\left[\left\{\begin{array}{ll} -\int_0^\alpha \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\,\zeta t}\mathrm{d}t + \int_\alpha^{+\infty} e^{2\pi\mathrm{i}\,\zeta t}\mathrm{d}t, & \mathrm{Im}\zeta > 0, \\ \int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\,\zeta t}\mathrm{d}t, & \mathrm{Im}\zeta < 0 \end{array}\right\} -\right.$$

$$\left. - \left\{\begin{array}{ll} -\int_0^\infty \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\,\zeta t}\mathrm{d}t, & \mathrm{Im}\zeta > 0, \\ \int_{-\infty}^{-\alpha} \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\,\zeta t}\mathrm{d}t - \int_{-\alpha}^0 \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\,\zeta t}\mathrm{d}t, & \mathrm{Im}\zeta < 0 \end{array}\right\}\right] =$$

$$= \frac{1}{4\mathrm{i}}(-2\pi\mathrm{i}\,\zeta)\left[\left\{\begin{array}{ll} -\frac{1}{2\pi\mathrm{i}\,\zeta}(\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\,\alpha\zeta} - 1) - \frac{1}{2\pi\mathrm{i}\,\zeta}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\,\alpha\zeta}, & \mathrm{Im}\zeta > 0, \\ \frac{1}{2\pi\mathrm{i}\,\zeta}, & \mathrm{Im}\zeta < 0 \end{array}\right\} -\right.$$

$$\left. - \left\{\begin{array}{ll} -\frac{1}{2\pi\mathrm{i}\,\zeta}, & \mathrm{Im}\zeta > 0, \\ \frac{1}{2\pi\mathrm{i}\,\zeta}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\,\alpha\zeta} - \frac{1}{2\pi\mathrm{i}\,\zeta}(1 - \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\,\alpha\zeta}), & \mathrm{Im}\zeta < 0 \end{array}\right\}\right] =$$

$$= \frac{1}{4\mathrm{i}}(-2\pi\mathrm{i}\,\zeta)\left\{\begin{array}{ll} \left(-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}\,\zeta}\right)[(2\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\,\alpha\zeta} - 1) + 1], & \mathrm{Im}\zeta > 0, \\ \left(\frac{1}{2\pi\mathrm{i}\,\zeta}\right)[(2\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\,\alpha\zeta} - 1) + 1], & \mathrm{Im}\zeta < 0, \end{array}\right.$$

$$= \frac{1}{4\mathrm{i}} \begin{cases} 2\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\,\alpha\zeta}, & \mathrm{Im}\zeta > 0, \\ 2\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\,\alpha\zeta}, & \mathrm{Im}\zeta < 0 \end{cases} = \frac{1}{2\mathrm{i}} \begin{cases} \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\,\alpha\zeta}, & \mathrm{Im}\zeta > 0, \\ \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\,\alpha\zeta}, & \mathrm{Im}\zeta < 0. \end{cases}$$

Проверка:

$$\widehat{S}^{+} = \frac{1}{2\mathrm{i}}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\,\alpha t}, \quad \widehat{S}^{-} = \frac{1}{2\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\,\alpha t},$$

тогда

$$\widehat{S}^{+} - \widehat{S}^{-} = \sin(2\pi\alpha t) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

2) Пусть $S = (2\pi\mathrm{i}\,t)^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Найти $\widehat{S}(\zeta)$.

Решение.

Так как

$$\overline{\mathcal{F}}(S) = \overline{\mathcal{F}}\{(2\pi\mathrm{i}\,t)^n\} = -\delta^{(n)}(x),$$

имеем

$$\widehat{S}(\zeta) = \mathcal{KF}[\overline{\mathcal{F}}(S)](\zeta) = -\mathcal{KF}(\delta^{(n)})(\zeta) = -\mathcal{KF}\left\{\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}t^{n+1}}\left(\frac{1}{2}\mathrm{sgn}\; t\right)\right\}(\zeta) =$$

$$= -(-2\pi\mathrm{i}\,\zeta)^{n+1}\frac{1}{2}\mathcal{KF}(\mathrm{sgn}\; t)(\zeta) = -\frac{1}{2}(2\pi\mathrm{i}\,\zeta)^{n+1} \begin{cases} \int_0^\infty \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\,t\zeta}\mathrm{d}t, & \mathrm{Im}\zeta > 0, \\ \int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\,t\zeta}\mathrm{d}t, & \mathrm{Im}\zeta < 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(2\pi\mathrm{i}\,\zeta)^n, & \mathrm{Im}\zeta > 0, \\ -\frac{1}{2}(2\pi\mathrm{i}\,\zeta)^n, & \mathrm{Im}\zeta < 0. \end{cases}$$

Проверка:

$$\widehat{S}^{+} = \frac{1}{2}(2\pi\mathrm{i}\,t)^n, \quad \widehat{S}^{-} = -\frac{1}{2}(2\pi\mathrm{i}\,t)^n,$$

тогда

$$\widehat{S}^{+} - \widehat{S}^{-} = (2\pi\mathrm{i}\,t)^n.$$

Предельный переход в смысле обобщенных функций из $\mathcal{S}'$ при $\mathrm{Im}\zeta \to +0$ для элементов из мультипликативной алгебры $A^{+}(\mathbb{C})$ порождает подпространство обобщенных функций $A'^{+}(\mathbb{R})$ из $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, являющихся граничными значениями (в смысле обобщенных функций $\mathcal{S}'$) аналитических функций из $A^{+}(\mathbb{C})$.

При таком пределе операция мультипликативного произведения в $A^{+}(\mathbb{C})$ переходит в операцию мультипликативного произведения обобщенных функций из $A'^{+}(\mathbb{R})$ по формуле

$$< U \cdot V, \varphi >:= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}} U^{+}(\xi + \mathrm{i}\,\varepsilon) \cdot V^{+}(\xi + \mathrm{i}\,\varepsilon)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi \;\; \forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),$$

где $U \in A'^{+}(\mathbb{R})$, $V \in A'^{+}(\mathbb{R})$.

Пример.

Пусть

$$S = Y(t)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\,\alpha t}\frac{t^{m-1}}{\Gamma(m)}, \quad T = Y(t)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\,\beta t}\frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)},$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; $m, n \in \mathbb{N}$; Γ - гамма-функция.

Очевидно, $S \in \mathcal{S}'_{+}(\mathbb{R})$ и $T \in \mathcal{S}'_{+}(\mathbb{R})$. Далее

$$U^{+}(\zeta) = \mathcal{KF}(S)(\zeta) = \frac{1}{[-2\pi\mathrm{i}\,(\zeta+\alpha)]^{m}}, \quad \mathrm{Im}\zeta > 0,$$

и

$$V^{+}(\zeta) = \mathcal{KF}(T)(\zeta) = \frac{1}{[-2\pi\mathrm{i}\,(\zeta+\beta)]^{n}}, \quad \mathrm{Im}\zeta > 0,$$

т. е. $U^{+}(\zeta) \in A^{+}(\mathbb{C})$, $V^{+}(\zeta) \in A^{+}(\mathbb{C})$.

Далее

$$U = \tau_{-\alpha}\delta_{+}^{m}, \quad U = \tau_{-\beta}\delta_{+}^{n},$$

тогда

$$U \cdot V = (\tau_{-\alpha}\delta_{+}^{m})(\tau_{-\beta}\delta_{+}^{n}) \in A'^{+}(\mathbb{R}).$$

Очевидно, пространство обобщенных функций $A'^{+}(\mathbb{R})$ снабженное мультипликативным произведением, является мультипликативной алгеброй с обычной единицей, ибо

$$\mathcal{KF}(\delta)(\zeta) = \mathcal{KF}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Y\right)(\zeta) = (-2\pi\mathrm{i}\,\zeta)\left(\frac{-1}{2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{i}\,\zeta}\right) = 1, \quad \mathrm{Im}\zeta > 0.$$

Отметим, что мультипликативная алгебра $A'^{+}(\mathbb{R})$ не может содержать обобщенные функции с компактным носителем, например, мера Дирака не принадлежит $A'^{+}(\mathbb{R})$.

В этой алгебре нет делителя нуля.

Особую роль в этой алгебре играет обобщенная функция δ_{+}. Поскольку $\delta_{+} = \mathcal{F}[Y(t)](\xi)$, где $Y(t)$ - функция Хевисайда, то из очевидного соотношения

$$[Y(t)]^{2} = Y(t)$$

и теоремы о перестановке имеем

$$\delta_{+} * \delta_{+} = \delta_{+}^{*2} = \delta_{+}, \quad \delta_{+}^{*n} = \delta_{+} \;\forall\; n \in \mathbb{N}. \tag{III}$$

Напомним, что аналогичным свойством обладает и мера Дирака δ, которая, как известно, является “нейтральным” (или “единичным”) элементом для операции “свертка”.

Возникает вопрос: нельзя ли в мультипликативной алгебре $A'^{+}(\mathbb{R})$ ввести также операцию “свертка”?

Введем пространство $\mathcal{O}_{-1}(\mathbb{R})$ бесконечно дифференцируемых на $\mathbb{R}$ функций с асимптотикой $O(|t|^{-1})$ как для самих функций так и для всех их производных с соответствующей топологией ([3], стр. 81).

Пусть $\mathcal{O}'_{-1}$ - пространство дуальное к пространству $\mathcal{O}_{-1}(\mathbb{R})$, т. е. пространство всех линейных функционалов, непрерывных на $\mathcal{O}_{-1}(\mathbb{R})$.

Если $T \in \mathcal{O}'_{-1}(\mathbb{R})$, то символом $< T, \varphi >$ обозначается, как обычно, значение функционала T на пробной функции $\varphi \in \mathcal{O}_{-1}(\mathbb{R})$.

Вводят операцию “свертка” для $\forall\ S \in \mathcal{O}'_{-1}(\mathbb{R})$, $\forall\ T \in \mathcal{O}'_{-1}(\mathbb{R})$ по формуле:

$$< S * T, \varphi >:=< T, \check{S} * \varphi > \quad \forall\ \varphi \in \mathcal{O}_{-1}(\mathbb{R}),$$

или по формуле:

$$< S * T, \varphi >:=< S, \check{T} * \varphi > \quad \forall\ \varphi \in \mathcal{O}_{-1}(\mathbb{R}).$$

Оба определения корректны, так как свертки $(\check{S} * \varphi)$ и $(\check{T} * \varphi)$ суть элементы из $\mathcal{O}_{-1}(\mathbb{R})$ в силу регуляризующих свойств свертки.

При $\alpha > -1$ очевидно $\mathcal{O}_{\alpha} \supset \mathcal{O}_{-1}$. Следовательно, в силу принципа дуальности $\mathcal{O}'_{\alpha} \subset \mathcal{O}'_{-1}$. Поэтому введенная операция свертки определена также для всех пространств $\mathcal{O}'_{\alpha}$, $\alpha > -1$.

Далее заметим, что если $S \in \mathcal{O}'_{\alpha}(\mathbb{R})$, $T \in \mathcal{O}'_{\alpha}(\mathbb{R})$, $\alpha > -1$, то и свертка $(S * T) \in \mathcal{O}'_{\alpha}$, $\alpha > -1$.

Если $S \in \mathcal{O}'_{\alpha}(\mathbb{R})$, $T \in \mathcal{O}'_{-1}(\mathbb{R})$, $\alpha > -1$, то свертка определена по формуле

$$< S * T, \varphi >:=< T, \check{S} * \varphi > \quad \forall\ \varphi \in \mathcal{O}_{-1}(\mathbb{R})$$

и, очевидно, $(S * T) \in \mathcal{O}'_{-1}$.

Таким образом, пространства $\mathcal{O}'_{\alpha}$, $\alpha > -1$, снабженное операцией-свертка, являются сверточными подалгебрами алгебры $\mathcal{O}'_{-1}$, а пространство $\mathcal{O}'_{-1}$ является сверточным модулем на сверточных алгебрах $\mathcal{O}'_{\alpha}$, $\alpha > -1$.

Очевидно, обобщенная функция $\delta_+ \in \{\mathcal{O}'_{-1} \cap A'^{+}\}$. В силу свойств (III) она является нейтральным элементом для операции "свертка". Тогда для любой обобщенной функции из $\{\mathcal{O}'_\alpha \cap A'^{+}\}$, $\alpha > -1$, имеет структуру $(\delta_+ * T)$, где $T \in \{\mathcal{O}'_\alpha \cap A'^{+}\}$, $\alpha > -1$.

Действительно, имеем

$$\delta_+ * (\delta_+ * T) = (\delta_+ * T), \quad \forall\, T \in (\mathcal{O}'_\alpha \cap A'^{+}),\ \alpha \geq -1,$$

и

$$(\widehat{\delta_+ * T})(\zeta) = \widehat{\delta}_+ * T = -\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \frac{1}{\zeta - \tau} * T(\tau) =< T(\tau), \frac{1}{2\pi \mathrm{i}\,(\tau - \zeta)} >= \widehat{T}^{+}(\zeta),$$

где $\mathrm{Im}\zeta > 0$, т. е. $\widehat{T}^{+}(\zeta) \in A^{+}(\mathbb{C})$ является аналитическим представлением для $T \in (\mathcal{O}'_\alpha \cap A'^{+})$.

Итак, $T = \widehat{T}^{+} = T * \delta_+$, т.е. δ_+ - нейтральный элемент для свертки в $(\mathcal{O}'_\alpha \cap A'^{+})$. Пространства $\mathcal{O}'_\alpha \cap A'^{+})$, где $\alpha \geq -1$, снабженные операциями мультипликативного произведения и свертки, являются мультипликативно-сверточными алгебрами. Обозначим эти пространства $(MC)'_\alpha$, $\alpha \geq -1$.

Пример.

Исходя из вышеизложенного относительно обобщенной функции δ_+, доказать формулу, связывающую мультипликативную степень и производную обобщенной функции δ_+:

$$\delta_+^{n+1} = \frac{1}{(2\pi \mathrm{i}\,)^n n!} \delta_+^{(n)} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Интересно заметить, что любой функции $g(\zeta)$, аналитической в $\mathrm{Im}\zeta > 0$, определена композиция $g(\delta_+)$, но если δ - мера Дирака, то композиция $g(\delta)$ не определена.

8 Примеры и задачи

1. Найти общее решение уравнения
$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - a\right)^k T = 0, \quad T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

2. Показать, что образ Фурье-Лапласа для
$$f(x) = \oint_L \frac{\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\, x\zeta}\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z},$$
где L – произвольный замкнутый контур, содержащий внутри точку $\zeta = a$ и пробегающий один раз в положительном направлении, есть ультраобобщенная функция на $\mathbb{C}$:
$$< U, \psi >= \oint_L \frac{\psi(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z}, \quad \forall\ \psi \in \mathbb{Z}(\mathbb{C}).$$

3. Вычислить свертку: $\delta(\zeta) * \delta_z(\zeta)$, где δ и δ_z - ультраобобщенные функции Дирака.

4. Вычислить $\mathcal{FL}^{-1}(\delta_z)(t)$ $\forall z \in \mathbb{C}$.

5. В полуплоскости $\operatorname{Im}\zeta > 0$ дана функция
$$f^+(\zeta) = \operatorname{sinc}(2\pi\alpha\zeta) := \frac{\sin(2\pi\alpha\zeta)}{2\pi\alpha\zeta}$$
(синус-кардиналис). Найти $T \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ такую, что $\mathcal{FL}(T)(\zeta) = f^+(\zeta)$, $\mathrm{Im}\zeta > 0$.

6. Показать, что $[Y(t)]^{*n}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, где $Y(t)$ - функция Хевисайда, есть функция-ската: $Y(t)\dfrac{t^{n-1}}{\Gamma(n)}$, Γ - гамма-функция.

   Элементарным решением какого оператора-свертки она является? Какой сверточной алгебре принадлежит оператор-свертки?

7. Вычислить $\{Y(t)e^{2\pi \mathrm{i}\, \sigma t}\}^{*n}$ $\forall\ n \in \mathbb{N}$, где $\sigma \in \mathbb{C}$.

   Элементарным решением какого оператора свертки является вычисленный результат - функция-ската? Какой сверточной алгебре принадлежат оператор свертки?

8. Вычислить свертку $\{Y(a-|t|)\}^{*n}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$, где $a > 0$.

   Какому функциональному пространству принадлежит образ Фурье-Лапласа этой свертки?

9. Исследовать решение уравнений свертки

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \delta_+^{k+1} * U = W$$

   в мультипликативно-сверточной алгебре $(MC)'_{-1}(\mathbb{R})$, где $a_k \in \mathbb{C}$, W – заданная функция из $(MC)'_{-1}(\mathbb{R})$.

10. a. Дано $T = \sin(2\pi\alpha t)$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Найти $\mathcal{FL}(T)(\zeta)$.

    b. Дано $T = \cos(2\pi\alpha t)$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Найти $\mathcal{FL}(T)(\zeta)$.

    c. Дано $T = \mathrm{sh}(2\pi\alpha t)$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Найти $\mathcal{FL}(T)(\zeta)$.

    d. Дано $T = \mathrm{ch}(2\pi\alpha t)$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Найти $\mathcal{FL}(T)(\zeta)$.

11. Дано $T = Y(t)\sin(2\pi\alpha t)$, $\in \mathbb{C}$ $(\mathrm{Im}\alpha > 0)$. Найти $\mathcal{FL}(T)(\zeta)$.

12. Решить в сверточной алгебре $\mathcal{D}'_+$ уравнение $Y(t) = \sin(2\pi\alpha t) * U = W$, где $\alpha \in \mathbb{C}$ $(\mathrm{Im}\,\alpha > 0)$.

13. Даны функции

$$\left\{\begin{aligned} f_a(t) &= \frac{Y(t)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\,\sigma t}t^{a-1}}{\Gamma(a)}, \quad \mathrm{Re}\,a > 0, \\ f_a(t) &= \frac{Y(t)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\,\sigma t}t^{b-1}}{\Gamma(b)}, \quad \mathrm{Re}\,b > 0, \end{aligned}\right. \quad \sigma \in \mathbb{C}\ (\mathrm{Im}\,\sigma > 0),$$

    где Γ - гамма-функция. Вычислить свертку.

14. Исследовать уравнение свертки в $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$:

$$P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) f_{a,\sigma}(t) * U = W \in \mathcal{D}'_+,$$

    где

$$P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) = \sum_{k=0}^{n} c_k \frac{\mathrm{d}^{n-k}}{\mathrm{d}t^{n-k}}, \quad c_0 = 1,\ c_k \in \mathbb{C},$$

$$f_{a,\sigma}(t) = \begin{cases} \dfrac{Y(t)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\,\sigma t}t^{a-1}}{\Gamma(a)}, & \mathrm{Re}\,a > 0, \\ \left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + 2\pi\mathrm{i}\,\sigma\right)^m f_{a+m,\sigma}(t), & \mathrm{Re}\,a < 0,\ m \in \mathbb{N}\ (\mathrm{Re}\,a + m > 0), \end{cases}$$

$\sigma \in \mathbb{C}$ ($\mathrm{Im}\sigma > 0$); $Y(t)$ - функция Хевисайда, $(\mathrm{d}/\mathrm{d}t + 2\pi\mathrm{i}\,\sigma)^m$ - m-я итерация дифференциального оператора $(\mathrm{d}/\mathrm{d}t + 2\pi\mathrm{i}\,\sigma)$ в смысле $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

15. Доказать равенство

$$\tau_\alpha\delta_+ \cdot \tau_\beta\delta_+ = -\frac{1}{2\pi\mathrm{i}\,(\alpha-\beta)}\{\tau_\alpha\delta_+ - \tau_\beta\delta_+\}, \quad \alpha,\beta \in \mathbb{R}\ (\alpha \neq \beta),$$

где τ_α - оператор сдвига в точку $t = \alpha$, т. е. $\tau_\alpha\varphi(t) := \varphi(t-\alpha)$.

16. Доказать равенство

$$\{1 - [(-2\pi\mathrm{i}\,\alpha)\delta_+]^p\}\,\tau_\alpha\delta_+ = \sum_{k=0}^{p-1}(-2\pi\mathrm{i}\,\alpha)^k\delta_+^{k+1} \quad \forall\, p \in \mathbb{N}\ \forall\, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Литература

[1] У.Рудин, *Функциональный анализ.* С.-Петербург – Москва – Краснодар, 2005.

[2] И.М.Гельфанд, Г.Е. Шилов, *Обощенные функции и действвия над ними.* Вып.1. М: ГИФШЛ, 1958.

[3] Г.Бремерман, *Распределения, комплесные переменнные и преобразования Фурье* . – М: "Ми", 1968.

[4] Л.Хёрмандер, *Анализ линейных дифференциальных опреаторов с частными производными. Т.1.Теория распределений и анализ Фурье.* – М: "Мир", 1986.

[5] В.С.Владимиров, *Уравнения математической физики.* М., Наука, 1981.

Учебное издание

Салехов Леонард Гарунович, **Обносов** Юрий Викторович,
Никоненкова Татьяна Владимировна

УЛЬТРАОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ НА ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ И АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИОНАЛЫ НА КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ