Известия вузов. Математика
2019, № 6, с. 23–33

https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

С.Н. КИЯСОВ

НЕКОТОРЫЕ КЛАССЫ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО ВЕКТОРА, РАЗРЕШИМЫХ В ЗАМКНУТОЙ ФОРМЕ

Аннотация. Рассмотрена структура множества кусочно-мероморфных решений однородной задачи линейного сопряжения для четырехмерного вектора. Показано, что при наличии трех кусочно-мероморфных решений задачи может быть построена каноническая система решений задачи линейного сопряжения и выделены классы задач, разрешимых в замкнутой форме.

Ключевые слова: матрица-функция, задача линейного сопряжения, факторизация.

УДК: 517.544

DOI: 10.26907/0021-3446-2019-6-23-33

Пусть Γ — простой гладкий замкнутый контур, разбивающий плоскость комплексного переменного на две области D^+ и D^- $(0 \in D^+,\ \infty \in D^-)$,

$$G(t) = \begin{pmatrix} g_{11}(t) & g_{12}(t) & g_{13}(t) & g_{14}(t) \\ g_{21}(t) & g_{22}(t) & g_{23}(t) & g_{24}(t) \\ g_{31}(t) & g_{32}(t) & g_{33}(t) & g_{34}(t) \\ g_{41}(t) & g_{42}(t) & g_{43}(t) & g_{44}(t) \end{pmatrix}, \quad \Delta(t) = \det G(t) \neq 0, \quad t \in \Gamma, \tag{1}$$

— H-непрерывная на Γ матрица-функция четвертого порядка. Однородная задача линейного сопряжения для четырехмерного вектора (векторная задача Римана–Гильберта) состоит в отыскании кусочно-аналитической вектор-функции $\mathbf{w}(z) = \big(w^1(z), w^2(z), w^3(z), w^4(z)\big)$ заданного порядка на бесконечности с H-непрерывными на Γ предельными значениями $\mathbf{w}^{\pm}(t)$, связанными условием

$$\mathbf{w}^+(t) = G(t)\mathbf{w}^-(t)$$

или в скалярной форме условиями

$$\begin{aligned} w^{1+}(t) &= g_{11}(t)w^{1-}(t) + g_{12}(t)w^{2-}(t) + g_{13}(t)w^{3-}(t) + g_{14}(t)w^{4-}(t), \\ w^{2+}(t) &= g_{21}(t)w^{1-}(t) + g_{22}(t)w^{2-}(t) + g_{23}(t)w^{3-}(t) + g_{24}(t)w^{4-}(t), \\ w^{3+}(t) &= g_{31}(t)w^{1-}(t) + g_{32}(t)w^{2-}(t) + g_{33}(t)w^{3-}(t) + g_{34}(t)w^{4-}(t), \\ w^{4+}(t) &= g_{41}(t)w^{1-}(t) + g_{42}(t)w^{2-}(t) + g_{43}(t)w^{3-}(t) + g_{44}(t)w^{4-}(t). \end{aligned} \tag{2}$$

Качественная теория задачи (2) в классах гёльдеровских функций любой размерности изложена в [1], а в более широких классах матриц-функций — в [2]. Однако имеется сравнительно немного примеров матриц-функций, для которых решение задачи может быть записано в замкнутой форме — запись решения задачи в интегралах типа Коши и решения определенного числа линейных алгебраических систем. Одним из таких примеров служит

Поступила в редакцию 07.05.2018, после доработки 07.05.2018. Принята к публикации 20.06.2018

решение задачи линейного сопряжения для мероморфных матриц-функций в работе [3]. В монографии [2] также предложен конструктивный алгоритм решения этой задачи. В работе [4] приведен алгоритм эффективного построения канонической системы решений, если известно n решений задачи линейного сопряжения таких, что определитель, составленный из компонент этих решений, имеет в соответствующих областях конечное число нулей. В работе [5] приведен конструктивный алгоритм построения правой факторизации Винера–Хопфа на действительной оси по известному $n-1$ решению n-мерной задачи $G\Phi^+ = \Phi^-$. В статье автора [6] указан эффективный метод построения канонической системы решений задачи линейного сопряжения для n-мерного вектора при наличии $n-1$ частного решения задачи и проведена аналогия между теорией задачи линейного сопряжения и теорией обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. В данной работе предложен метод выделения классов задач линейного сопряжения для четырехмерного вектора, разрешимых в замкнутой форме.

Расширим класс искомых решений задачи (2), допуская наличие у них в областях $D^{\pm}$ конечного числа полюсов. Через M^+ и M^- обозначим классы H-непрерывных на Γ функций, мероморфно продолжимых в области D^+ и D^- соответственно. Каждому решению задачи линейного сопряжения $\mathbf{w}(z) = \big(w^1(z), w^2(z), w^3(z), w^4(z)\big)$ поставим в соответствие набор определенных на Γ функций $(\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t), \lambda_4(t))$, в котором $\lambda_j(t) = w^{j+}(t)/w^{j-}(t)$, $j = \overline{1,4}$. Полагаем, что компонента λ_k этого набора равна тождественному нулю, неограничена или является неопределенной, что соответственно обозначается как 0, ∞, $0/0$, если $w^{k+}(t) \equiv 0$, $w^{k-}(t) \equiv 0$ или $w^{k\pm}(t) \equiv 0$; $k = \overline{1,4}$, $t \in \Gamma$. Набор, соответствующий решению задачи, для которого $w^{k\pm}(t) \not\equiv 0$, $k = \overline{1,4}$, назовем *невырожденным.*

Пусть

$$\mathbf{w}_i(z) = \big(w_i^1(z), w_i^2(z), w_i^3(z), w_i^4(z)\big)\,, \ \ i = 1,2,3, \tag{3}$$

— решения задачи (2) без конечных полюсов, имеющие на бесконечности порядки k_i, $i = 1,2,3$, соответственно (положительный порядок означает порядок полюса). Такие решения задачи могут быть получены из кусочно-мероморфных решений, если последние умножить на соответствующие полиномы.

Искомую каноническую систему решений задачи обозначим

$$\mathbf{v}_i(z) = \big(v_i^1(z), v_i^2(z), v_i^3(z), v_i^4(z)\big)\,, \quad i = \overline{1,4} \tag{4}$$

($\mathbf{v}_i(z)$ имеет на бесконечности порядок $(-\varkappa_i)$, $i = \overline{1,4}$). Целые числа $\varkappa_i$ — частные индексы матрицы-функции (1) будем считать упорядоченными по убыванию $\varkappa_1 \geq \varkappa_2 \geq \varkappa_3 \geq \varkappa_4$ ($\varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3 + \varkappa_4 = \varkappa = \operatorname{ind} \det G(t)$ — суммарный индекс матрицы-функции (1)).

Пусть $X(z) = \|v_j^i(z)\|$, $i,j = \overline{1,4}$, — каноническая матрица, столбцы которой образуют компоненты вектор-функций (4), $\Delta(z) = \det X(z)$ ($G(t) = X^+(t)[X^-(t)]^{-1}$, $\Delta(t) = \Delta^+(t)/\Delta^-(t)$, $t \in \Gamma$).

Обозначим через $\Omega^k(z)$ матрицу-функцию третьего порядка, получаемую из прямоугольной матрицы-функции $\Omega(z) = \|w_j^i(z)\|$, $i = \overline{1,4}$, $j = 1,2,3$, столбцами которой служат компоненты вектор-функций (3), вычеркиванием строки с номером $k = \overline{1,4}$.

Из результатов работы [6] при $n = 4$ вытекает

Предложение. *Пусть для решений* (3) *задачи линейного сопряжения* (1) *при некоторых значениях индексов k и s, $k,s = \overline{1,4}$, определитель матрицы-функции $\Omega^k(z)$ не обращается в нуль в $D^+ \cup \Gamma$, а определитель матрицы-функции $\Omega^s(z)$ не имеет нулей в $\Gamma \cup D^- \setminus \{\infty\}$. Тогда каноническая система решений задачи* (2) *может быть построена в замкнутой форме.*

Действительно, предположим, что разложения решений (3) по функциям канонической системы решений (4) имеют вид

$$\mathbf{w}_i(z) = \sum_{j=1}^{n} p_i^j(z)\mathbf{v}_j(z), \quad i = \overline{1, n-1}, \tag{5}$$

где $p_i^j(z)$, $i = 1, 2, 3$; $j = \overline{1, 4}$, — некоторые полиномы.

Обозначим через $\Omega_l(z)$ матрицу-функцию четвертого порядка, которая получается присоединением к матрице-функции $\Omega(z)$ первого столбца, составленного из компонент вектор-функции $\mathbf{v}_l(z) = \big(v_l^1(z), v_l^2(z), v_l^3(z), v_l^4(z)\big)$, $l = \overline{1, 4}$. Пусть $\Delta_l(z) = \det \Omega_l(z)$, а $\Delta_k^1(z)$ — алгебраические дополнения элементов $v_l^k(z)$ первого столбца матрицы-функции $\Omega_l(z)$ ($\Delta_k^1(z) = (-1)^{k+1} \det \Omega^k(z)$). Тогда $\Delta_l(z) = \sum_{k=1}^4 v_l^k(z)\Delta_k^1(z)$. С другой стороны, согласно разложениям (5)

$$\Omega_l(z) = \begin{pmatrix} v_l^1(z) & \sum\limits_{j=1}^4 p_1^j(z)v_j^1(z) & \sum\limits_{j=1}^4 p_2^j(z)v_j^1(z) & \sum\limits_{j=1}^4 p_3^j(z)v_j^1(z) \\ v_l^2(z) & \sum\limits_{j=1}^4 p_1^j(z)v_j^2(z) & \sum\limits_{j=1}^4 p_2^j(z)v_j^2(z) & \sum\limits_{j=1}^4 p_3^j(z)v_j^2(z) \\ v_l^3(z) & \sum\limits_{j=1}^4 p_1^j(z)v_j^3(z) & \sum\limits_{j=1}^4 p_2^j(z)v_j^3(z) & \sum\limits_{j=1}^4 p_3^j(z)v_j^3(z) \\ v_l^4(z) & \sum\limits_{j=1}^4 p_1^j(z)v_j^4(z) & \sum\limits_{j=1}^4 p_2^j(z)v_j^4(z) & \sum\limits_{j=1}^4 p_3^j(z)v_j^4(z) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} v_1^1(z) & v_2^1(z) & v_3^1(z) & v_4^1(z) \\ v_1^2(z) & v_2^2(z) & v_3^2(z) & v_4^2(z) \\ v_1^3(z) & v_2^3(z) & v_3^3(z) & v_4^3(z) \\ v_1^4(z) & v_2^4(z) & v_3^4(z) & v_4^4(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{l1} & p_1^1(z) & p_2^1(z) & p_3^1(z) \\ \delta_{l2} & p_1^2(z) & p_2^2(z) & p_3^2(z) \\ \delta_{l3} & p_1^3(z) & p_2^3(z) & p_3^3(z) \\ \delta_{l4} & p_1^4(z) & p_2^4(z) & p_3^4(z) \end{pmatrix} = X(z)P_l(z),$$

где через $P_l(z)$ обозначена полиномиальная матрица в этом представлении, а δ_{lk} — символ Кронекера. Значит, справедливо равенство $\Delta_l(z) = \Delta(z)p_l(z)$, в котором $p_l(z)$ — алгебраическое дополнение элемента, стоящего на пересечении строки с номером l и первого столбца матрицы $P_l(z)$, что позволяет записать соотношение, связывающее компоненты вектор-функции $\mathbf{v}_l(z)$, $l = \overline{1, 4}$, канонической системы решений (4) с компонентами вектор-функций (3):

$$p_l(z)\Delta(z) = \sum_{k=1}^{4} v_l^k(z)\Delta_k^1(z), \quad l = \overline{1, 4}. \tag{6}$$

В силу (6) на контуре Γ имеем

$$p_l(t)\Delta^+(t) = \sum_{k=1}^{4} v_l^{k+}(t)\Delta_k^{1+}(t), \tag{7}$$

$$p_l(t)\Delta^-(t) = \sum_{k=1}^{4} v_l^{k-}(t)\Delta_k^{1-}(t). \tag{8}$$

Из полученных представлений, в частности, вытекает, что если одна из вектор-функций, например $\mathbf{v}_1(z)$, канонической системы решений (4) есть линейная комбинация с полиномиальными коэффициентами вектор-функций (3), то $\Delta_1(z) \equiv 0$ и $p_1(z) \equiv 0$.

Для того чтобы получить представление для первой вектор-функции $\mathbf{v}_1(z)$ канонической системы решений (4), достаточно рассмотреть лишь случай, когда решения (3) удовлетворяют условиям

$$\Delta_4^{1+}(z) \neq 0, \quad z \in D^+ \cup \Gamma, \quad \Delta_4^{1-}(z) \neq 0, \quad z \in \Gamma \cup D^- \setminus \{\infty\}. \tag{9}$$

К этому случаю всегда можно придти путем перестановки краевых условий (2) и введения новых обозначений для компонент искомой вектор-функции $\mathbf{w}(z)$, что сводится к умножению матрицы-функции (1) слева и (или) справа на матрицы перестановок четвертого порядка.

Исключая компоненту $v_1^{4-}(t)$ из первых трех краевых условий (2), записанных для $\mathbf{v}_1(z)$, при помощи равенства (8) при $l = 1$ придем на Γ к задаче линейного сопряжения

$$\begin{aligned}
v_1^{1+} &= \frac{g_{11}\Delta_4^{1-} - g_{14}\Delta_1^{1-}}{\Delta_4^{1-}} v_1^{1-} + \frac{g_{12}\Delta_4^{1-} - g_{14}\Delta_2^{1-}}{\Delta_4^{1-}} v_1^{2-} + \frac{g_{13}\Delta_4^{1-} - g_{14}\Delta_3^{1-}}{\Delta_4^{1-}} v_1^{3-} + \frac{g_{14}p_1\Delta^-}{\Delta_4^{1-}},\\
v_1^{2+} &= \frac{g_{21}\Delta_4^{1-} - g_{24}\Delta_1^{1-}}{\Delta_4^{1-}} v_1^{1-} + \frac{g_{22}\Delta_4^{1-} - g_{24}\Delta_2^{1-}}{\Delta_4^{1-}} v_1^{2-} + \frac{g_{23}\Delta_4^{1-} - g_{24}\Delta_3^{1-}}{\Delta_4^{1-}} v_1^{3-} + \frac{g_{24}p_1\Delta^-}{\Delta_4^{1-}},\\
v_1^{3+} &= \frac{g_{31}\Delta_4^{1-} - g_{34}\Delta_1^{1-}}{\Delta_4^{1-}} v_1^{1-} + \frac{g_{32}\Delta_4^{1-} - g_{34}\Delta_2^{1-}}{\Delta_4^{1-}} v_1^{2-} + \frac{g_{33}\Delta_4^{1-} - g_{34}\Delta_3^{1-}}{\Delta_4^{1-}} v_1^{3-} + \frac{g_{34}p_1\Delta^-}{\Delta_4^{1-}}.
\end{aligned}$$

Обозначим через $\omega_{ij}^k(z)$ алгебраическое дополнение элемента матрицы-функции $\Omega^k(z)$, стоящего на пересечении строки с номером i и столбца с номером j $(i, j = 1, 2, 3)$. Используя вычисления, проведенные в работе [6] для любого n, в рассматриваемом случае от полученной задачи линейного сопряжения перейдем к задаче

$$\begin{aligned}
v_1^{1+} &= -\sum_{j=1}^{3} \frac{w_j^{1+}\omega_{1j}^{4-}}{\Delta_4^{1-}} v_1^{1-} - \sum_{j=1}^{3} \frac{w_j^{1+}\omega_{2j}^{4-}}{\Delta_4^{1-}} v_1^{2-} - \sum_{j=1}^{3} \frac{w_j^{1+}\omega_{3j}^{4-}}{\Delta_4^{1-}} v_1^{3-} + \frac{g_{14}p_1\Delta^-}{\Delta_4^{1-}},\\
v_1^{2+} &= -\sum_{j=1}^{3} \frac{w_j^{2+}\omega_{1j}^{4-}}{\Delta_4^{1-}} v_1^{1-} - \sum_{j=1}^{3} \frac{w_j^{2+}\omega_{2j}^{4-}}{\Delta_4^{1-}} v_1^{2-} - \sum_{j=1}^{3} \frac{w_j^{2+}\omega_{3j}^{4-}}{\Delta_4^{1-}} v_1^{3-} + \frac{g_{24}p_1\Delta^-}{\Delta_4^{1-}},\\
v_1^{3+} &= -\sum_{j=1}^{3} \frac{w_j^{3+}\omega_{1j}^{4-}}{\Delta_4^{1-}} v_1^{1-} - \sum_{j=1}^{3} \frac{w_j^{3+}\omega_{2j}^{4-}}{\Delta_4^{1-}} v_1^{2-} - \sum_{j=1}^{3} \frac{w_j^{3+}\omega_{3j}^{4-}}{\Delta_4^{1-}} v_1^{3-} + \frac{g_{34}p_1\Delta^-}{\Delta_4^{1-}}.
\end{aligned}$$

Введем новую неизвестную вектор-функцию $\mathbf{W}(z) = \big(W^1(z), W^2(z), W^3(z)\big)$ при помощи равенств

$$\mathbf{W}^+(z) = \mathbf{V}^+(z), \quad z \in D^+, \tag{10}$$

$$\mathbf{W}^-(z) = [\Omega^{4-}(z)]^{-1}\mathbf{V}^-(z), \quad z \in D^-, \tag{11}$$

где

$$\mathbf{V}(z) = \left(v_1^1(z), v_1^2(z), v_1^3(z)\right), \tag{12}$$

а компоненты вектор-функции (11) имеют вид

$$W^{1-}(z) = -\sum_{j=1}^{3} \frac{\omega_{j1}^{4-}(z) v_1^{j-}(z)}{\Delta_4^{1-}(z)},$$
$$W^{2-}(z) = -\sum_{j=1}^{3} \frac{\omega_{j2}^{4-}(z) v_1^{j-}(z)}{\Delta_4^{1-}(z)}, \tag{13}$$
$$W^{3-}(z) = -\sum_{j=1}^{3} \frac{\omega_{j3}^{4-}(z) v_1^{j-}(z)}{\Delta_4^{1-}(z)}, \quad z \in D^-.$$

Тогда для предельных значений на Γ вектор-функции $\mathbf{W}(z)$ получим задачу линейного сопряжения

$$\mathbf{W}^+(t) = \Omega^{4+}(t)\mathbf{W}^-(t) + \mathbf{f}(t), \quad t \in \Gamma, \tag{14}$$

с аналитической в D^+ матрицей-функцией

$$\Omega^{4+}(t) = \begin{pmatrix} w_1^{1+}(t) & w_2^{1+}(t) & w_3^{1+}(t) \\ w_1^{2+}(t) & w_2^{2+}(t) & w_3^{2+}(t) \\ w_1^{3+}(t) & w_2^{3+}(t) & w_3^{3+}(t) \end{pmatrix},$$

определитель которой $\det \Omega^{4+}(t) = -\Delta_4^{1+}(t) \neq 0$, $t \in \Gamma$, и вектор-функцией

$$\mathbf{f}(t) = \left(\frac{g_{14} p_1 \Delta^-}{\Delta_4^{1-}}, \quad \frac{g_{24} p_1 \Delta^-}{\Delta_4^{1-}}, \quad \frac{g_{34} p_1 \Delta^-}{\Delta_4^{1-}} \right).$$

Так как вектор-функция $\mathbf{v}_1(z)$ канонической системы решений (4) должна иметь самый низкий из возможных порядок на бесконечности, то $-\varkappa_1 \leq \min(k_1, k_2, k_3)$. Поэтому решение задачи (14) согласно (13) следует искать в классе функций, ограниченных на бесконечности. Полагая на Γ

$$\mathbf{W}_1^+(t) = [\Omega^{4+}(t)]^{-1}\mathbf{W}^+(t), \quad \mathbf{W}_1^-(t) = \mathbf{W}^-(t), \tag{15}$$

придем в силу (9) к задаче “о скачке” для отыскания кусочно-аналитической и ограниченной на бесконечности вектор-функции $\mathbf{W}_1(z)$:

$$\mathbf{W}_1^+(t) = \mathbf{W}_1^-(t) + \mathbf{g}(t), \quad t \in \Gamma, \tag{16}$$

с H-непрерывной вектор-функцией

$$\mathbf{g}(t) = [\Omega^{4+}(t)]^{-1}\mathbf{f}(t) =$$
$$= -\frac{p_1(t)\Delta^-(t)}{\Delta_4^{1+}(t)\Delta_4^{1-}(t)} \left(\sum_{j=1}^{3} g_{j4}(t)\omega_{j1}^{4+}(t), \sum_{j=1}^{3} g_{j4}(t)\omega_{j2}^{4+}(t), \sum_{j=1}^{3} g_{j4}(t)\omega_{j3}^{4+}(t) \right). \tag{17}$$

Тогда на контуре Γ

$$\mathbf{W}_1^+(t) = P[\mathbf{g}(t)] - \mathbf{c}, \quad \mathbf{W}_1^-(t) = -Q[\mathbf{g}(t)] + \mathbf{c},$$

где $P = (I+S)/2$, $Q = (I-S)/2$ (I — единичный, S — сингулярный операторы), а $\mathbf{c} = (c^1, c^2, c^3)$ — постоянный вектор. Таким образом, из (15), (10), (11) для предельных значений на Γ первых трех компонент канонической системы решений (4) получаем представления

$$\mathbf{V}^+(t) = \Omega^{4+}(t)(P[\mathbf{g}(t)] - \mathbf{c}), \quad \mathbf{V}^-(t) = \Omega^{4-}(t)(-Q[\mathbf{g}(t)] + \mathbf{c}). \tag{18}$$

Представление для последней компоненты $v_1^4(z)$ системы решений (4) получим из соотношений (7), (8) при $l = 1$.

Подставляя найденное представление для $\mathbf{v}_1(z)$ в краевые условия (2), убеждаемся, что его компоненты являются решением задачи для любого полинома $p_1(z)$. Значит, для отыскания первой вектор-функции канонической системы решений $\mathbf{v}_1(z)$ нужно распорядиться неопределенными коэффициентами полинома $p_1(z)$ и компонентами постоянного вектора $\mathbf{c}$ так, чтобы вектор-функция с компонентами, определенными из (17), (18), (7), (8), имела самый низкий из возможных порядок $-\varkappa_1$ на бесконечности. Если такой порядок достигается при $p_1(z) \equiv 0$, то первая вектор-функция канонической системы решений (4) совпадет с одним из заданных решений или их линейной комбинацией с постоянными коэффициентами.

Для степени s_1 полинома $p_1(z)$ может быть получена оценка сверху аналогично тому, как это сделано в работе [6].

Вектор-функции $\mathbf{v}_j(z)$, $j = 2, 3, 4$, канонической системы решений (4) строятся аналогично из соответствующих представлений (17), (18), (7), (8), в которых компоненты постоянного вектора $\mathbf{c}$ следует считать полиномами.

Замечание. Ограничения (9) относятся, в основном, к технической стороне вопроса — методу решения задачи (14), (10)–(13) и получения более простых формул в представлении (18). Предложенный метод построения канонической системы решений может быть распространен на случай обращения $\Delta_4^{1\pm}(z)$ в нуль в соответствующих областях с использованием работы [3], а в конечном числе точек контура — работы [7].

Пусть $\mathbf{w}_1(z)$, $\mathbf{w}_2(z)$ — два кусочно-мероморфных решения задачи (2). Выясним сначала, когда они будут решениями этой задачи с одним и тем же невырожденным набором $(\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t), \lambda_4(t))$. Если

$$\lambda_k(t) = w_1^{k+}(t)/w_1^{k-}(t) = w_2^{k+}(t)/w_2^{k-}(t), \quad k = \overline{1,4}, \tag{19}$$

то $w_2^k(z) = r_k(z) w_1^k(z)$, где $r_k(z)$, $k = \overline{1,4}$, — рациональные функции. Подставляя выраженные отсюда предельные значения $w_2^{k\pm}(t)$, $k = \overline{1,4}$, в краевые условия (2), записанные для $\mathbf{w}_2(z)$, получим, что $\mathbf{w}_1(z)$ является также решением задачи линейного сопряжения с матрицей-функцией

$$F(t) = \begin{pmatrix} g_{11}(t) & g_{12}(t)R_1(t) & g_{13}(t)R_2(t) & g_{14}(t)R_3(t) \\ g_{21}(t)\frac{1}{R_1(t)} & g_{22}(t) & g_{23}(t)\frac{R_2(t)}{R_1(t)} & g_{24}(t)\frac{R_3(t)}{R_1(t)} \\ g_{31}(t)\frac{1}{R_2(t)} & g_{32}(t)\frac{R_1(t)}{R_2(t)} & g_{33}(t) & g_{34}(t)\frac{R_3(t)}{R_2(t)} \\ g_{41}(t)\frac{1}{R_3(t)} & g_{42}(t)\frac{R_1(t)}{R_3(t)} & g_{43}(t)\frac{R_2(t)}{R_3(t)} & g_{44}(t) \end{pmatrix},$$

где $R_1(t) = r_2(t)/r_1(t)$, $R_2(t) = r_3(t)/r_1(t)$, $R_3(t) = r_4(t)/r_1(t)$. Значит, на контуре $(F(t) - G(t))\, \mathbf{w}_1^-(t) \equiv 0$ или

$$\begin{pmatrix} 0 & g_{12}(t)(R_1(t)-1) & g_{13}(t)(R_2(t)-1) & g_{14}(t)(R_3(t)-1) \\ g_{21}(t)\frac{(1-R_1(t))}{R_1(t)} & 0 & g_{23}(t)\frac{(R_2(t)-R_1(t))}{R_1(t)} & g_{24}(t)\frac{(R_3(t)-R_1(t))}{R_1(t)} \\ g_{31}(t)\frac{1-R_2(t)}{R_2(t)} & g_{32}(t)\frac{R_1(t)-R_2(t)}{R_2(t)} & 0 & g_{34}(t)\frac{R_3(t)-R_2(t)}{R_2(t)} \\ g_{41}(t)\frac{1-R_3(t)}{R_3(t)} & g_{42}(t)\frac{R_1(t)-R_3(t)}{R_3(t)} & g_{43}(t)\frac{R_2(t)-R_3(t)}{R_3(t)} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{w}_1^-(t) \equiv 0.$$

Поэтому на контуре Γ

$$\det\,(F(t) - G(t)) \equiv 0.$$

Рассмотрим некоторые случаи, вытекающие из этого условия. Предположим, что для искомых решений $\mathbf{w}_1(z)$, $\mathbf{w}_2(z)$ выполняются условия

$$R_1(t) \equiv 1 \;\; (r_2(t) \equiv r_1(t)), \quad R_2(t) \neq 1, \quad R_3(t) \neq 1, \quad R_3(t) \neq R_2(t).$$

Тогда
$$\det\left(F(t)-G(t)\right)=(R_2(t)-1)^2(R_3(t)-1)^2G^{34}_{12}(t)G^{12}_{34}(t),$$
где через $G^{ij}_{kl}(t)$ обозначен определитель второго порядка, составленный из элементов матрицы-функции (1), оставшихся после вычеркивания строк с номерами i и j, а также столбцов с номерами k и l. В рассматриваемом случае тождество $\left(F(t)-G(t)\right)\mathbf{w}_1^-(t)\equiv 0$, $t\in\Gamma$, запишется в виде
$$\begin{gathered}
g_{13}(t)(R_2(t)-1)w_1^{3-}(t)+g_{14}(t)(R_3(t)-1)w_1^{4-}(t)\equiv 0,\\
g_{23}(t)(R_2(t)-1)w_1^{3-}(t)+g_{24}(t)(R_3(t)-1)w_1^{4-}(t)\equiv 0,\\
g_{31}(t)(1-R_2(t))w_1^{1-}(t)+g_{32}(t)(1-R_2(t))w_1^{2-}(t)+g_{34}(t)(R_3(t)-R_2(t))w_1^{4-}(t)\equiv 0,\\
g_{41}(t)(1-R_3(t))w_1^{1-}(t)+g_{42}(t)(1-R_3(t))w_1^{2-}(t)+g_{43}(t)(R_2(t)-R_3(t))w_1^{3-}(t)\equiv 0.
\end{gathered}$$
Из условия невырожденности набора $(\lambda_1(t),\lambda_2(t),\lambda_3(t),\lambda_4(t))$ для решений $\mathbf{w}_1(z)$, $\mathbf{w}_2(z)$ из первых двух тождеств заключаем, что коэффициенты $g_{13}(t)$, $g_{14}(t)$ а также $g_{23}(t)$, $g_{24}(t)$ могут быть нулевыми лишь одновременно, и всюду на Γ не может выполняться неравенство $G^{34}_{12}(t)\not\equiv 0$. Если же на Γ
$$g_{13}(t)\not\equiv 0,\quad g_{14}(t)\not\equiv 0,\quad g_{23}(t)\not\equiv 0,\quad g_{24}(t)\not\equiv 0,$$
то отношения
$$\frac{g_{13}(t)}{g_{14}(t)},\quad \frac{g_{23}(t)}{g_{24}(t)} \tag{20}$$
должны быть функциями класса M^-, а определитель
$$G^{34}_{12}(t)\equiv 0,\quad t\in\Gamma. \tag{21}$$
При $g_{13}(t)\not\equiv 0$, $g_{14}(t)\not\equiv 0$ и $g_{23}(t)\equiv 0$, $g_{24}(t)\equiv 0$ или $g_{13}(t)\equiv 0$, $g_{14}(t)\equiv 0$ и $g_{23}(t)\not\equiv 0$, $g_{24}(t)\not\equiv 0$ условие (21) выполняется автоматически, а в (20) требование принадлежности классу M^- должно выполняться для соответствующего отношения.

Пусть $g_{13}(t)\not\equiv 0$, $g_{14}(t)\not\equiv 0$. Полагая
$$w_1^{4-}(t)=-\frac{g_{13}(t)(R_2(t)-1)}{g_{14}(t)(R_3(t)-1)}w_1^{3-}(t),$$
последние из двух записанных тождеств перепишем в виде
$$\begin{gathered}
g_{31}(t)w_1^{1-}(t)+g_{32}(t)w_1^{2-}(t)+\frac{g_{34}(t)g_{13}(t)}{g_{14}(t)}\frac{R_3(t)-R_2(t)}{R_3(t)-1}w_1^{3-}(t)\equiv 0,\\
g_{41}(t)w_1^{1-}(t)+g_{42}(t)w_1^{2-}(t)+g_{43}(t)\frac{R_3(t)-R_2(t)}{R_3(t)-1}w_1^{3-}(t)\equiv 0.
\end{gathered} \tag{22}$$

Предположим, что определитель
$$G^{12}_{34}(t)\neq 0,\quad t\in\Gamma. \tag{23}$$
Это условие приводит к соотношениям
$$\begin{aligned}
w_1^{1-}&=\frac{(g_{14}g_{32}g_{43}-g_{13}g_{34}g_{42})(R_3-R_2)}{g_{14}G^{12}_{34}(R_3-1)}w_1^{3-},\\
w_1^{2-}&=\frac{(g_{13}g_{34}g_{41}-g_{14}g_{31}g_{43})(R_3-R_2)}{g_{14}G^{12}_{34}(R_3-1)}w_1^{3-}.
\end{aligned} \tag{24}$$
Поэтому отношения
$$\frac{g_{14}g_{32}g_{43}-g_{13}g_{34}g_{42}}{g_{14}G^{12}_{34}},\quad \frac{g_{13}g_{34}g_{41}-g_{14}g_{31}g_{43}}{g_{14}G^{12}_{34}} \tag{25}$$

должны быть функциями класса M^-.

Соотношения (24) позволяют после определенных вычислений переписать краевые условия (2):

$$\begin{aligned}
w_1^{1+} &= \frac{(R_3-R_2)(g_{14}g_{43}G_{34}^{24}+g_{14}g_{13}G_{34}^{12}-g_{13}g_{34}G_{34}^{23})}{(R_3-1)g_{14}G_{34}^{12}}w_1^{3-},\\
w_1^{2+} &= \frac{(R_3-R_2)(g_{14}g_{43}G_{34}^{14}+g_{14}g_{23}G_{34}^{12}-g_{13}g_{34}G_{34}^{13})}{(R_3-1)g_{14}G_{34}^{12}}w_1^{3-},\\
w_1^{3+} &= -\frac{G_{12}^{24}}{g_{14}}w_1^{3-},\\
w_1^{4+} &= -\frac{(R_2-1)G_{12}^{23}}{(R_3-1)g_{14}}w_1^{3-}.
\end{aligned} \tag{26}$$

Таким образом, из (26) вытекает, что отношения

$$\frac{g_{14}g_{43}G_{34}^{24}+g_{14}g_{13}G_{34}^{12}-g_{13}g_{34}G_{34}^{23}}{G_{34}^{12}G_{12}^{24}},\quad \frac{g_{14}g_{43}G_{34}^{14}+g_{14}g_{23}G_{34}^{12}-g_{13}g_{34}G_{34}^{13}}{G_{34}^{12}G_{12}^{24}},\quad \frac{G_{12}^{23}}{G_{12}^{24}} \tag{27}$$

должны быть функциями класса M^+.

Пусть

$$G_{12}^{24}(t)\neq 0,\quad g_{14}(t)\neq 0,\quad t\in\Gamma, \tag{28}$$

и представления

$$G_{12}^{24}(t)=(G_{12}^{24}(t))^+(G_{12}^{24}(t))^-,\quad g_{14}(t)=g_{14}^+(t)g_{14}^-(t),\quad t\in\Gamma, \tag{29}$$

— факторизации этих функций. Тогда кусочно-мероморфные решения задачи (2) $\mathbf{w}_1(z)$ и $\mathbf{w}_2(z)$ с одинаковым невырожденным набором (19) имеют вид

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_1(z) &= (w_1^1(z), w_1^2(z), w_1^3(z), w_1^4(z)),\\
\mathbf{w}_2(z) &= (r_1(z)w_1^1(z), r_1(z)w_1^2(z), r_3(z)w_1^3(z), r_4(z)w_1^4(z))
\end{aligned} \tag{30}$$

с компонентами, определяемыми по формулам

$$\begin{aligned}
w_1^{1+} &= \frac{(r_4-r_3)(g_{14}g_{43}G_{34}^{24}+g_{14}g_{13}G_{34}^{12}-g_{13}g_{34}G_{34}^{23})(G_{12}^{24})^+}{(r_4-r_1)G_{34}^{12}G_{12}^{24}g_{14}^+},\\
w_1^{2+} &= \frac{(r_4-r_3)(g_{14}g_{43}G_{34}^{14}+g_{14}g_{23}G_{34}^{12}-g_{13}g_{34}G_{34}^{13})(G_{12}^{24})^+}{(r_4-r_1)G_{34}^{12}G_{12}^{24}g_{14}^+},\\
w_1^{3+} &= -s\frac{(G_{12}^{24})^+}{g_{14}^+},\\
w_1^{4+} &= -\frac{(r_3-r_1)G_{12}^{23}(G_{12}^{24})^+}{(r_4-r_1)G_{12}^{24}g_{14}^+};
\end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned} w_1^{1-} &= \frac{(r_4-r_3)(g_{14}g_{32}g_{43}-g_{13}g_{34}g_{42})g_{14}^-}{(r_4-r_1)g_{14}G_{34}^{12}(G_{12}^{24}(t))^-},\\ w_1^{2-} &= \frac{(r_4-r_3)(g_{13}g_{34}g_{41}-g_{14}g_{31}g_{43})g_{14}^-}{(r_4-r_1)g_{14}G_{34}^{12}(G_{12}^{24}(t))^-},\\ w_1^{3-} &= s\frac{g_{14}^-}{(G_{12}^{24})^-},\\ w_1^{4-} &= -\frac{(r_3-r_1)g_{13}g_{14}^-}{(r_4-r_1)g_{14}(G_{12}^{24}(t))^-} \end{aligned} \tag{32}$$

(r_1, r_3, r_4, s — рациональные функции).

Если $G_{34}^{12}(t)\equiv 0$, но один из определителей

$$\begin{vmatrix} g_{32} & g_{34}\dfrac{g_{13}}{g_{14}}\\ g_{42} & g_{43}\end{vmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} g_{31} & g_{34}\dfrac{g_{13}}{g_{14}}\\ g_{41} & g_{43}\end{vmatrix}$$

не обращается в нуль на Γ, то, выражая из (22) $w_1^{2-}(t)$ и $w_1^{3-}(t)$ через $w_1^{1-}(t)$ в первом или $w_1^{1-}(t)$ и $w_1^{3-}(t)$ через $w_1^{2-}(t)$ во втором случаях, придем к скалярным задачам линейного сопряжения, связывающим "плюсовые" компоненты искомого решения с $w_1^{1-}(t)$ соответственно $w_1^{2-}(t)$. Решение исходной задачи запишется по формулам, аналогичным (30)–(32).

Предположим, что для решений $\mathbf{w}_1(z)$, $\mathbf{w}_2(z)$ выполняются условия

$$R_1(t)\equiv R_2(t)\equiv 1 \quad (r_3(t)\equiv r_2(t)\equiv r_1(t)), \quad R_3(t)\neq 1.$$

Из условия невырожденности набора $(\lambda_1(t),\lambda_2(t),\lambda_3(t),\lambda_4(t))$ для решений $\mathbf{w}_1(z)$, $\mathbf{w}_2(z)$ в рассматриваемом случае и условия $\det G(t)\neq 0$, $t\in\Gamma$, тождество $(F(t)-G(t))\,\mathbf{w}_1^-(t)\equiv 0$, $t\in\Gamma$, запишется в виде

$$\begin{gathered} g_{14}(t)\equiv g_{24}(t)\equiv g_{34}(t)\equiv 0, \quad g_{44}(t)\neq 0,\\ g_{41}(t)w_1^{1-}(t)+g_{42}(t)w_1^{2-}(t)+g_{43}(t)w_1^{3-}(t)\equiv 0. \end{gathered}$$

Если на Γ $g_{41}(t)\equiv g_{42}(t)\equiv g_{43}(t)\equiv 0$, то задача эффективной факторизации матрицы-функции (1) сводится к задаче такой факторизации для матрицы-функции третьего порядка, рассмотренной в работе [8]. Поэтому будем предполагать, что, например, коэффициент $g_{43}(t)\neq 0$, $t\in\Gamma$. Тогда, выражая из последнего тождества $w_1^{3-}(t)$, от краевых условий (2) придем к условиям

$$w_1^{1+} = \frac{G_{24}^{23}}{g_{43}}w_1^{1-} + \frac{G_{14}^{23}}{g_{14}}w_1^{2-}, \tag{33}$$

$$w_1^{2+} = \frac{G_{24}^{13}}{g_{43}}w_1^{1-} + \frac{G_{14}^{13}}{g_{14}}w_1^{2-}, \tag{34}$$

$$w_1^{3+} = \frac{G_{24}^{12}}{g_{43}}w_1^{1-} + \frac{G_{14}^{12}}{g_{14}}w_1^{2-}, \tag{35}$$

$$w_1^{4+} = g_{44}w_1^{4-}. \tag{36}$$

Если хотя бы один из определителей матрицы-функции задачи линейного сопряжения (33),(34) или (33), (35), или (34), (35) не обращается в нуль на Γ, а соответствующая матрица-функция факторизуется эффективно, то решения задачи (2) $\mathbf{w}_1(z)$ и $\mathbf{w}_2(z)$ с одинаковым невырожденным набором (19) имеют вид

$$\mathbf{w}_1^+(z) = (w_1^{1+}(z), w_1^{2+}(z), w_1^{3+}(z), g_{44}^+(z)),$$
$$\mathbf{w}_1^-(z) = (w_1^{1-}(z), w_1^{2-}(z), w_1^{3-}(z), 1/g_{44}^-(z)),$$
$$\mathbf{w}_2(z) = (r_1(z)w_1^1(z), r_1(z)w_1^2(z), r_1(z)w_1^3(z), r_4(z)w_1^4(z)),$$

где $g_{44}^{\pm}(z)$ — аналитические продолжения факторизационных множителей элемента $g_{44}(t)$.

Случай $R_1(t) \equiv R_2(t) \equiv R_3(t) \equiv 1$ является тривиальным ($\mathbf{w}_2(z) = r(z)\mathbf{w}_1(z)$), где $r(z)$ — рациональная функция.

Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

Теорема. *Два решения задачи линейного сопряжения* (2) $\mathbf{w}_i(z) = \big(w_i^1(z), w_i^2(z), w_i^3(z), w_i^4(z)\big)$, $i = 1, 2$, *будут решениями с одним и тем же невырожденным набором* $(\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t), \lambda_4(t))$ $(\lambda_j(t) = w^{j+}(t)/w^{j-}(t),\ j = \overline{1,4})$, *если выполняется одно из следующих условий*:

1) *определитель* (21) *— тождественный нуль на* Γ, *отношения* (25) *и одно из отношений* (20) *— функции класса* M^-, *а отношения* (27) *— функции класса* M^+*; если выполнены неравенства* (28), *то решения записываются по формулам* (29), (31);

2) *элементы* $g_{1j}(t)$, $j = 1, 2, 3$, *— тождественные нули на* Γ, *а одна из задач линейного сопряжения* (33), (34) *или* (33), (35), *или* (34), (35) *допускает решение в замкнутой форме*;

3) $\mathbf{w}_2(z) = r(z)\mathbf{w}_1(z)$, *где* $r(z)$ *— рациональная функция.*

Для решения задачи (2) в замкнутой форме согласно сделанному предложению достаточно указать три частных решения задачи, для которых выполняются условия (9). В качестве таких решений можно взять, например, решение (31),(32) и решения $\mathbf{w}_i(z) = \big(w_1^1(z), s_i^2 w_1^2(z), s_i^3 w_1^3(z), s_i^4 w_1^4(z)\big)$, $i = 1, 2$, где s_j^k, $j = 1, 2$, $k = 2, 3, 4$, — рациональные функции, удовлетворяющие условию

$$\frac{s_1^3 - s_1^2}{s_1^4 - s_1^2} = \frac{s_2^3 - s_2^2}{s_2^4 - s_2^2}.$$

Литература

[1] Векуа Н.П. *Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи* (Наука, М.,1970).

[2] Литвинчук Г.С., Спитковский И.М. *Факторизация матриц-функций*, Ч. I, II. Деп. в ВИНИТИ 17.04.84, № 2410–84, АН УССР, Одесса, 1984.

[3] Адуков В.М. *Факторизация Винера–Хопфа кусочно-мероморфных матриц-функций*, Матем. сб. **200** (8), 3–24 (2011).

[4] Гахов Ф.Д. *Краевая задача Римана для системы n пар функций*, УМН **7** (4), 3–54 (1952).

[5] Camara M.C., Rodman L., Spitkovsky I.M. *One sided invertibility of matrices over commutative rings, corona problems and Toeplitz operators with matrix symbols*, Linear Algebra Appl. **459**, 58–82 (2014).

[6] Киясов С.Н. *Об одном дополнении к общей теории задачи линейного сопряжения для кусочно аналитического вектора*, Сиб. матем. журн. **59** (2), 369–377 (2018).

[7] Гахов Ф.Д. *Особые случаи краевой задачи Римана для системы n пар функций*, Изв. АН СССР, сер. матем. **16** (2), 147–156 (1952).

[8] Киясов С.Н. *Некоторые классы задач линейного сопряжения для трехмерного вектора, разрешимые в замкнутой форме*, Сиб. матем. журн. **56** (2), 389–408 (2015).

Сергей Николаевич Киясов

Казанский федеральный университет,

ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

e-mail: Sergey.Kijasov@kpfu.ru

S.N. Kiyasov

Some classes of linear conjugation problems for a four-dimensional vector that are solvable in closed form

Abstract. We consider the structure of the set of piecewise meromorphic solutions for a homogeneous linear conjugation problem for a four-dimensional vector. We show that in the presence of three piecewise meromorphic solutions to the linear conjugation problem it is possible to construct a canonical system of solutions to the linear conjugation problem and distinguish some classes of problems that are solvable in closed form.

Keywords: matrix-function, linear conjugation problem, factorization.

Sergei Nikolaevich Kiyasov

Kazan Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

`e-mail:` Sergey.Kijasov@kpfu.ru