Министерство образования и науки Российской Федерации
КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ им. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО
Кафедра теории и технологий преподавания математики и информатики
Направление: 050.201.65 Педагогическое образование
Профиль подготовки: Математика и английский язык

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Тема:

Методика изучения показательных уравнений, неравенств и их систем

Работа завершена:
"___"_________ 2014 г. _____________________ А.Р. Зарипова

Работа допущена к защите:

Научный руководитель
Д.п.н., профессор

"___"_________ 2014 г. _____________________ Л.Р. Шакирова

Заведующий кафедрой
Д.п.н., профессор

"___"_________ 2014 г. _____________________ Л.Р. Шакирова

Казань — 2014

Содержание

Введение

В школьном курсе математики важное место отводится решению показательных уравнений и неравенств и системам, содержащие показательные уравнения. Впервые ученики встречаются с показательными уравнениями и неравенствами в 10 классе, после того, как познакомятся с показательной функцией и ее свойствами, а системы, содержащие показательные уравнения и неравенства в 11 классе. Показательные уравнения, неравенства, системы, содержащие показательные уравнения, встречаются в заданиях ЕГЭ. Поэтому изучению методов их решения должно быть уделено значительное внимание, т.к. в заданиях ЕГЭ системы, содержащие показательные уравнения и неравенства могут быть и комбинированными. И для того, чтобы решить правильно систему уравнений или неравенств, нужно правильно решить показательное уравнение или неравенство.

При решении показательных уравнений и неравенств часто возникают трудности, связанные со следующими особенностями:

- незнание четкого алгоритма решения показательных уравнений, неравенств и их систем;

- при решении показательных уравнений и неравенств, ученики производят преобразования, которые не равносильны исходным уравнениям и неравенствам;

- при решении показательного уравнения и неравенства введением новой переменной забывают возвращаться к обратной замене.

Вышесказанное определяет актуальность выбранной темы и полезность ее изучения для будущей педагогической практики.

Цель данной работы: изучить теоретический материал по теме, проанализировать данную тему в учебниках по алгебре и началам анализа, систематизировать задания ЕГЭ на решение показательных уравнений и неравенств, систематизировать и обобщить методические рекомендации по решению показательных уравнений и неравенств. Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи:**

- изучить требования государственных стандартов по теме «Показательные уравнения и неравенства»;

- проанализировать материал по теме в учебниках алгебры и начал анализа;

- систематизировать методы решения показательных уравнений и неравенств;

- систематизировать и обобщить методические особенности изучения данной темы.

Объектом исследования является процесс обучения математике в старшей школе.

Предметом исследования являются методические особенности изучения показательных уравнений, неравенств и их систем в старших классах средней школы.

Практическая значимость исследования заключается в том, что разработанные методические рекомендации по изучению показательных уравнений и неравенств могут быть использованы учителями и практикантами в школе, а также в ходе занятий по элементарной математике на педагогическом отделении университета. Весь теоретический материал по теме «Показательные уравнения и неравенства и их систем» сгруппирован, приведены алгоритмы решения и разобраны примеры. Рассмотрены методы решения уравнений, предложены задания для самостоятельного изучения и закрепления новых знаний и умений. Данные материалы можно использовать, как в школе, так и для индивидуального обучения, при подготовке к сдаче ЕГЭ, а также для тех, кто хочет углубить свои знания по теме «Показательные уравнения и неравенства и их системы».

Структура работы: состоит из двух глав, введения, заключения и списка литературы, и содержит 49 страниц.

Глава I. Методы решения показательных уравнений и неравенств

1.1. Показательные уравнения

Показательным уравнением называется уравнение, содержащее переменную в показателе степени.

Например: $6^x - 6^{x-1} = 1$

Простейшим показательным уравнением называется уравнение вида: $a^{f(x)}$=b.

Показательное уравнение:

1) $a^{f(x)} = a^{g(x)}$;

2) $ka^{2f(x)} + ba^{f(x)} + c = 0, a^{f(x)} = y$;

3) $a^{f(x)} = g(x), y = a^{f(x)}, y = g(x)$.

При решении показательных уравнений необходимо помнить, что решение любого показательного уравнения сводиться к решению простейших показательных уравнений.

Методы решения показательных уравнений:

- метод уравнивания показателей;
- метод введения новой переменной;
- метод вынесения общего множителя за скобки;
- функционально-графический метод;
- метод почленного деления;
- метод группировки.

1.1.1. Метод уравнивания показателей

Алгоритм решения уравнения методом уравнивания показателей:

- представить обе части показательного уравнения в виде степеней с одинаковыми основаниями;

- на основании теоремы, если $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, где $a > 0, a \neq 1$ равносильно уравнению вида $f(x) = g(x)$, приравниваем показатели степеней;

- решаем полученное уравнение, согласно его виду(линейное, квадратное и т.д.);

- записываем ответ.

<u>Пример 1.</u>

Решить уравнение:

$3^x = 27$

Решение:

Представим 27 как 3^3. Наше показательное уравнение имеет одинаковое основание 3.

$3^x=3^3$

Данное уравнение равносильно уравнению

$x = 3$

Ответ: $x = 3$.

<u>Пример 2.</u>

Решить уравнение:

$$(0{,}2)^{x-0{,}5} \cdot (0{,}2)^{0{,}5} = (0{,}2)^{-1} \cdot ((0{,}2)^2)^{x-1}$$

Решение:

Упростим показательное уравнение

$(0{,}2)^x = (0{,}2)^{2x-3}$

т.к. в показательном уравнении основания одинаковы, следует, что оно равносильно уравнению:

$x = 2x - 3$

решаем это линейное уравнение и получаем:

$x = 3$

Ответ: $x = 3$.

Примеры для самостоятельного решения.

1. $4^{3-2x} = 4^{2-x}$;

2. $2^{5x+1} = 4^{2x}$;

3. $5^3 = 25^{x+0,5}$;

4. $8^x = 4^{x-1}$;

5. $2^x = 32$;

6. $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \frac{27}{8}$;

7. $\sqrt{\frac{1}{8}} = \left(\frac{1}{64}\right)^x$;

8. $5^{x-4} = 25^2$;

9. $5^{x^2-8x+12} = 1$;

10. $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$.

1.1.2. Метод введения новой переменной

Алгоритм решения показательного уравнения методом введения новой переменной:

- определить возможность переписать данное уравнение в новом виде, позволяющем ввести новую переменную;

- вводим новую переменную;

- решаем уравнение относительно новой переменной;

- записываем ответ.

<u>Пример1.</u>

Решить уравнение:

$9^x - 5 \cdot 3^x + 4 = 0$

Решение:

Упростим показательное уравнение

$(3^x)^2 - 5 \cdot 3^x + 4 = 0$

применим метод введения новой переменной,

пусть $3^x = t, t > 0$

данное уравнение можно записать в виде

$t^2 - 5t + 4 = 0$

решая это квадратное уравнение, получаем

$t_1 = 4, t_2 = 1$

теперь задача сводится к решению совокупности уравнений

$3^x = 4, \ 3^x = 1$

$x_1 = \log_3 4 \; x_2 = 0$

Ответ: $x_1 = \log_3 4 \; x_2 = 0$

<u>Пример 2.</u>

Решить уравнение:

$2^{2x} + 2^x - 2 = 0$

Решение:

Пусть $2^x = t, t > 0$

получаем квадратное уравнение

$t^2 + t - 2 = 0$

находим корни квадратного уравнения

$t_1 = 1, t_2 = -2$ – не удовлетворяет условию t>0

$2^x = 1$

$2^x = 2^0$

$x = 0$

Ответ: $x = 0$.

Примеры для самостоятельного решения.

1. $4^x + 2^x - 24 = 0$;
2. $9^x - 4 \cdot 3^x - 45 = 0$;
3. $4^x - 3 \cdot 2^x = 40$;
4. $2^{4x} - 50 \cdot 2^{2x} = 896$;
5. $7^{2x} - 6 \cdot 7^x - 7 = 0$;
6. $9^x - 8 \cdot 3^x - 9 = 0$;
7. $16^x + 4 \cdot 4^x - 5 = 0$;
8. $4^x - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$;

9. $36^x - 4 \cdot 6^x - 12 = 0$;

10. $64^x - 8^x - 56 = 0$.

1.1.3. Метод вынесения общего множителя за скобки

Решение показательных уравнений методом вынесения общего множителя за скобки

<u>Пример1.</u>

Решить уравнение:

$3^x + 3^{x+1} = 108$

Решение:

$3^x + 3^{x+1} = 108$

т.к. 3^{x+1} равносильно $3^x \cdot 3$, запишем как

$3^x + 3^x \cdot 3 = 108$

вынесем 3^x за скобку

$3^x \cdot (1 + 3) = 108$

$3^x \cdot 4 = 108$

$3^x = \frac{108}{4} = 27$

27 представим как 3^3

тогда получим

$3^x = 3^3$

Следовательно,

$x = 3$

Ответ: $x = 3$.

<u>Пример 2.</u>

Решить уравнение:

$7^{x+2} + 4 \cdot 7^{x+1} = 539$

Решение:

$7^{x+2} + 4 \cdot 7^{x+1} = 539$

Также решаем методом вынесения множителя за скобки. Для этого упростим выражение

$7^x \cdot 49 + 4 \cdot 7^x \cdot 7 = 539$

вынесем 7^x за скобки

$7^x \cdot (29 + 28) = 539$

$7^x = \frac{539}{77}$

$7^x = 7$

$x = 1$

Ответ: $x = 1$.

Примеры для самостоятельного решения.

1. $7^{x+2} + 4 \cdot 7^{x+1} = 539$;
2. $2^{x+1} + 3 \cdot 2^{x-1} - 5 \cdot 2^x + 6 = 0$;
3. $7^x + 7^{x+2} = 350$;
4. $7 \cdot 5^x - 5^{x+1} = 2 \cdot 5^3$;
5. $3^{x+2} + 4 \cdot 3^{x+1} = 21$;
6. $5^{1+2x} + 5^{2x+3} = 650$;
7. $6^{x+1} + 35 \cdot 6^{x-1} = 71$;
8. $4^{x+1} + 4^x = 320$;
9. $3^{x+1} - 2 \cdot 3^{x-2} = 25$;
10. $2^{3x+2} - 2^{3x-2} = 30$.

1.1.4. Функционально-графический метод

Алгоритм:

- левую и правую части уравнения представить в виде функций;
- построить графики обеих функций в одной системе координат;
- найти точки пересечения графиков, если они есть;
- указать абсциссы точек пересечения, это корни уравнения.

Пример 1.

Решить уравнение:

$3^{2x} = 10 - x$

Строим таблицы значений:

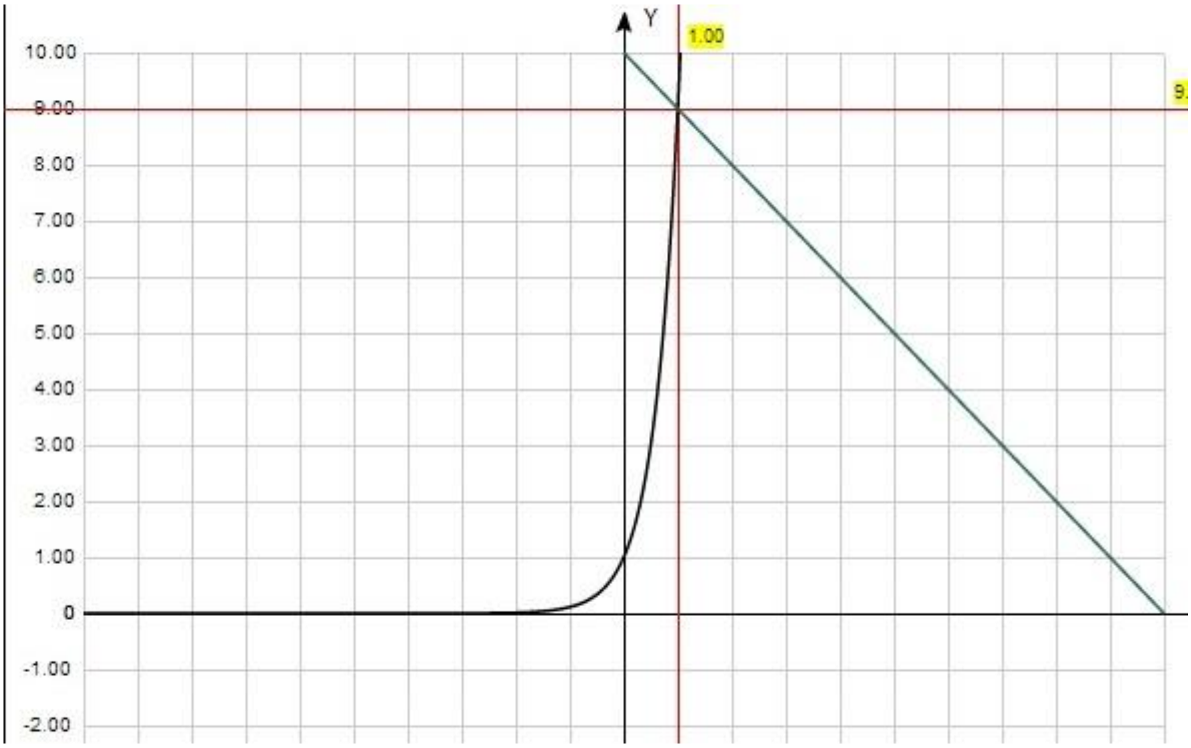
$y = 3^{2x}$

x	0	1	- 1
y	1	9	$\frac{1}{3}$

$y = 10 - x$

x	0	10
y	10	0

Построив графики этих функций, найдем абсциссу точки пересечения, она и будет корнем уравнения $x = 1$.



Ответ: $x = 1$.

Примеры для самостоятельного решения.

1. $1 + 3^{\frac{x}{2}} = 2^x$;

2. $5^{x-1} = \frac{1}{2}$;

3. $4^x = 5 - x$;

4. $3^{-x} = -\frac{3}{x}$;

5. $\frac{1}{2}^{3x} = 2x - 3$.

1.1.5. Метод почленного деления

Данный метод заключается в том, чтобы разделить каждый член уравнения содержащий степени с одинаковыми показателями, но разными основаниями, на одну из степеней. Этот метод применяется для решения однородных показательных уравнений.

<u>Пример 1.</u>

Решить уравнение:

$3 \cdot 4^x + 2 \cdot 25^x - 7 \cdot 10^x = 0$

Решение:

$3 \cdot 4^x + 2 \cdot 25^x - 7 \cdot 10^x = 0$

Для того, чтобы решить данное показательное уравнение разделим его на 5^{2x}

$3 \cdot 2^{2x} + 2 \cdot 5^{2x} - 7 \cdot 2^x \cdot 5^x = 0 : 5^{2x}$

$3 \cdot (\frac{2}{5})^{2x} + 2 - 7 \cdot (\frac{2}{5})^x = 0$

далее это уравнение можем решить методом введения новой переменной

пусть $(\frac{2}{5})^x = y$, y>0

$3y^2 - 7y + 2 = 0$

$y_1 = 2 \quad (\frac{2}{5})^x = 2 \qquad x_1 = \log_{2/5} 2$

$y_2 = \frac{1}{3} \quad (\frac{2}{5})^x = \frac{1}{3} \qquad x_2 = \log_{2/5} 3$

Ответ: $x_1 = \log_{2/5} 2$, $x_2 = \log_{2/5} 3$.

<u>Пример 2.</u>

Решите уравнение:

$5 \cdot 5^{2x} - 13 \cdot 5^x \cdot 3^x + 6 \cdot 3^{2x} = 0$

Решение:

$5 \cdot 5^{2x} - 13 \cdot 5^x \cdot 3^x + 6 \cdot 3^{2x} = 0$

Разделим обе части уравнения почленно на 3^{2x}, получим равносильное ему уравнение

$5 \cdot (\frac{5}{3})^{2x} - 13 \cdot (\frac{5}{3})^x + 6 = 0$

Сделаем замену $y = (\frac{5}{3})^x, y > 0$

$5y^2 - 13y + 6 = 0$

$y_1 = \frac{3}{5} \quad (\frac{5}{3})^x = \frac{3}{5} \quad x_1 = -1$

$y_2 = 2 \quad (\frac{5}{3})^x = 2 \quad x_2 = \frac{25}{9}$

Ответ: $x_1 = -1, x_2 = \frac{25}{9}$.

Примеры для самостоятельного решения.

1. $3 \cdot 2^{2x} + 6^x - 2 \cdot 3^{2x} = 0$;

2.$2 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 2^x \cdot 3^x + 3 \cdot 3^{2x} = 0$;

3. $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$;

4. $3 \cdot 4^{2x} - 4^x \cdot 9^x + 2 \cdot 9^{2x} = 0$;

5. $6 \cdot 4^x - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 9^x = 0$

1.1.6. Метод группировки

Способ группировки заключается в том, чтобы собрать степени с разными основаниями в разных частях уравнения, а затем разделить обе части уравнения на одну из степеней.

<u>**Пример 1.**</u>

Решить уравнение:

$3 \cdot 2^{2x} + \frac{1}{2} \cdot 9^{x+1} - 6 \cdot 4^{x+1} = -\frac{1}{3} \cdot 9^{x+2}$

Решение:

$3 \cdot 2^{2x} + \frac{1}{2} \cdot 9^{x+1} - 6 \cdot 4^{x+1} = -\frac{1}{3} \cdot 9^{x+2}$

Сгруппируем слагаемые следующим образом:

$\frac{1}{2} \cdot 9^{x+1} + \frac{1}{3} \cdot 9^{x+2} = 6 \cdot 4^{x+1} - 3 \cdot 2^{2x}$

$\frac{1}{2} \cdot 9^{x} \cdot 9 + \frac{1}{3} \cdot 9^{x} \cdot 9^{2} = 6 \cdot 4^{x} \cdot 4 - 3 \cdot 4^{x}$

$4{,}5 \cdot 9^{x} + 27 \cdot 9^{x} = 24 \cdot 4^{x} - 3 \cdot 4^{x}$

$9^{x}(4{,}5 + 27) = 4^{x} \cdot 21$

$9^{x} \cdot 31{,}5 = 4^{x} \cdot 21 \ \ :9^{x}$

$(\frac{4}{9})^{x} = \frac{3}{2}$

$(\frac{2}{3})^{2x} = (\frac{2}{3})^{-1}$

$2x = -1$

$x = -0{,}5$

Ответ: $x = -0{,}5$.

<u>Пример 2.</u>

Решите уравнение:

$5^{2x} - 4^{x+1} = 4^{x} + 5^{2x-1}$

Решение:

$5^{2x} - 4^{x+1} = 4^{x} + 5^{2x-1}$

$5^{2x} - 4^{x+1} - 4^{x} - 5^{2x-1} = 0$

$5^{2x} \cdot (1 - 5^{-1}) - 4^{x}(4 + 1) = 0$

$5^{2x} \cdot \frac{4}{5} = 5 \cdot 4^{x}$

$25^{x} \cdot \frac{4}{5} = 4^{x} \cdot 5$

$\frac{4}{25} = \frac{4^{x}}{25^{x}}$

$\frac{4}{25} = (\frac{4}{25})^{x}$

$x = 1$

Ответ: $x = 1$.

Примеры для самостоятельного решения.

1. $3 \cdot 2^{2x} + \frac{1}{2} \cdot 9^{x+1} - 6 \cdot 4^{x+1} = -\frac{1}{3} \cdot 9^{x+2}$;

2. $4^{x} + 3^{x-1} = 4^{x-1} + 3^{x+2}$;

3. $2^{x^2-1} - 3^{x^2} = 3^{x^2-1} - 2^{x^2+2}$;

4. $7^{x-5} \cdot 5^{x^2} - 49 \cdot 5^{x^2} + 3 \cdot 7^{x-5} = 147$;

5. $3 \cdot 2^{x+1} + 2 \cdot 5^{x-2} = 5^x + 2^{x-2}$.

1.2. Показательные неравенства

Неравенства, содержащие переменные в показателе степени, называются показательными.

1.2.1. Неравенства вида $a^{f(x)} > a^{g(x)}$

Решение неравенств подобного вида основано на следующих утверждениях:

- если $a > 1$, то неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству $f(x) > g(x)$;

- если $0 < a < 1$, то неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству $f(x) < g(x)$.

Заметим, что применяя какой-либо метод при решении неравенства, содержащего знак «>», можно этот же метод применять и при решении неравенств, содержащих знаки «<», «≥», «≤».

<u>**Пример 1.**</u>

Решить неравенство:

$2^x < \frac{1}{8}$

Решение:

$2^x < \frac{1}{8}$

Поскольку $\frac{1}{8} = 2^{-3}$, то

$2^x < 2^{-3}$, т.к. 2>1, функция $y = 2^t$ - возрастает

$x < -3$

Ответ: x ∈(- ∞; - 3)

<u>Пример 2.</u>

$2^{x^2} > 2^{x+2}$

Решение:

$2^{x^2} > 2^{x+2}$

$x^2 > x + 2$, т.к. 2>1 функция $y = 2^t$ возрастает

$x^2 - x - 2 > 0$

$x < -1, x > 2$

$x \in (-\infty;\ -1) \cup (2;\ +\infty)$

Ответ: $x \in (-\infty;\ -1) \cup (2;\ +\infty)$

Примеры для самостоятельного решения.

1. $4^{5-2x} < 0{,}25$;
2. $0{,}4^{2x+1} \geq 0{,}16$;
3. $5^{x^2-2x-1} < 25$;
4. $3^x > 9^{x-3}$;
5. $(\frac{1}{7})^x \leq 49$.

1.2.2. Неравенства вида $a^{f(x)} > b, a > 0$

Необходимо рассмотреть два случая:

А) $b \leq 0$, тогда $a^{f(x)} > b \leftrightarrow x \in D(f)$

В) $b > 0$, тогда $a^{f(x)} > b \leftrightarrow f(x) > \log_a b$ при $a > 1$;

$a^{f(x)} > b \leftrightarrow f(x) < \log_a b$ при $0 < a < 1$.

При $a = 1$ исходное неравенство $a^{f(x)} > b$ равносильно числовому неравенству $1 > b$ при $x \in D(f)$.

<u>Пример 1.</u>

Решить неравенство:

$2^x > 5$

Решение:

$2^x > 5$

$2^x > 2^{\log_2 5}$

$x > \log_2 5$

Ответ: $x \in (\log_2 5\,;\ +\infty)$

<u>Пример 2.</u>

$3^x < 6$

Решение:

$3^x < 6$

$3^x < 3^{\log_3 6}$

$x < \log_3 6$

$x \in (-\infty;\ \log_3 6)$

Примеры для самостоятельного решения.

1. $(\frac{1}{4})^x < 7$;
2. $3^x > 5$;
3. $(\frac{1}{3})^x > 25$;
4. $2^x < 6$;
5. $(\frac{1}{2})^x \geq 3$.

1.2.3. Неравенства вида $a^{f(x)} > b^{g(x)}$

При решении неравенств подобного вида применяют логарифмирование обеих частей по основанию a или b. Учитывая свойства показательной функции, получаем:

$a^{f(x)} > b^{g(x)} \leftrightarrow f(x) > g(x)\log_a b,$ если $a > 1$;

$a^{f(x)} > b^{g(x)} \leftrightarrow f(x) < g(x)\log_a b,$ если $0 < a < 1$.

<u>Пример 1.</u>

Решить неравенство:

$2^x \geq 3^{x^2}$

Решение:

$2^x \geq 3^{x^2}$

Прологарифмируем обе части неравенства по основанию 2. Тогда имеем:

$$\log_2(2^x) \geq \log_2(3^{x^2}) \leftrightarrow x \geq x^2 \log_2 3 \leftrightarrow x = x^2 \log_2 3 \geq 0 \leftrightarrow x(1 - x\log_2 3) \geq 0 \leftrightarrow x \in \left[0; \frac{1}{\log_2 3}\right] = [0; \log_3 2]$$

Ответ: $x \in [0; \log_3 2]$

1.2.4. Решение показательных неравенств методом замены переменной

<u>Пример 1.</u>

Решить неравенство:

$9^x + 27 < 12 \cdot 3^x$

Решение:

$9^x + 27 < 12 \cdot 3^x$

Пусть $3^x = t$ тогда исходное неравенство равносильно:

$t^2 - 12t + 27 < 0$

3<t<9

3<3^x<9

3^1<3^x<3^2

$1 < x < 2$

Ответ: x ∈(1; 2).

<u>Пример 2.</u>

Решите неравенство:

$16^x + 4^x - 2 > 0$

Решение:

$16^x + 4^x - 2 > 0$

Пусть $4^x = t, t > 0$

$t^2 + t - 2 > 0$

$\left\{\begin{matrix} t < -2 \\ t > 1 \end{matrix}\right.$ т.к. $t = 4^x$

$\left\{\begin{matrix} 4^x < -2 < 0 \text{ нет решений} \\ 4^x > 1 \end{matrix}\right.$

$4^x > 1$

$4^x > 4^0$

$x > 0$

Ответ: x ∈(0;+∞).

Примеры для самостоятельного решения.

1. $(0{,}5)^{2x} + 2 < 3 \cdot (0{,}5)^x$;
2. $9^{x-1} < 3^{x-1} + 6$;
3. $25^x \leq 6 \cdot 5^x - 5$;
4. $4^{2x} - 5 \cdot 4^x + 4 \geq 0$;
5. $4^x - 2^{x+1} - 24 < 0$.

1.2.5. Решение неравенств, содержащих однородные функции относительно показательных функций

<u>Пример 1.</u>

Решить неравенство:

$4^x - 2 \cdot 5^{2x} - 2^x \cdot 5^x > 0$

Решение:

Исходное неравенство можно записать в виде:

$2 \cdot 2^x - 2 \cdot 5^{2x} - 2^x \cdot 5^x > 0$

В левой части – однородные функции относительно 2^x и 5^x. Отсюда можно разделить обе части неравенства на $2^{2x}, 5^{2x}$ или $10^x = 2^x \cdot 5^x$. Разделив обе части исходного неравенства на $5^{2x} = 25^x$, получаем:

$(\frac{4}{25})^x - 2 - (\frac{10}{25})^x > 0$

$((\frac{2}{5})^x)^2 - (\frac{2}{5})^x - 2 > 0$

Обозначив $\left(\frac{2}{5}\right)^x = t,$ получаем

$t^2 - t - 2 > 0$

$t_1 < -1, t_2 > 2$

Поскольку $t_1 < -1$ и $t_2 > 2$ исходное неравенство равносильно следующему:

$\left(\frac{2}{5}\right)^x > 2$

$\left(\frac{2}{5}\right)^x > (\frac{2}{5})^{\log_{\frac{2}{5}} 2}$

$x < \log_{\frac{2}{5}} 2$

Ответ: $x \in (-\infty; \log_{\frac{2}{5}} 2)$

<u>Пример 2.</u>

Решите неравенство:

$3^{2x^2} - 2 \cdot 3^{x^2+x+6} + 3^{2x+12} > 0$

Решение:

$3^{2x^2} - 2 \cdot 3^{x^2+x+6} + 3^{2x+12} > 0$

$(3^{x^2})^2 - 2 \cdot 3^{x^2} \cdot 3^{x+6} + (3^{x+6})^2 > 0$

$(\frac{3^{x^2}}{3^{x+6}})^2 - 2 \cdot \left(\frac{3x^2}{3^{x+6}}\right) + 1 > 0$

$3^{x^2-x-6} - 2 \cdot 3^{x^2-x-6} + 1 > 0$

$3^{x^2-x-6} \neq 1$

$x^2 - x - 6 \neq 0$

$\begin{cases} x \neq 3 \\ x \neq -2 \end{cases}$

Ответ: $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 3) \cup (3; +\infty)$

Примеры для самостоятельного решения.

1. $2^{2x+1} + 3^{2x+1} > 5 \cdot 6^x$;

2. $5 \cdot 4^x + 2 \cdot 25^x \leq 7 \cdot 10^x$;

3. $6 \cdot 25^x - 5 \cdot 10^x > 4^x$;

4. $2^{x+1} - 3 \cdot 10^x > 5^{2x+1}$;

5. $5 \cdot 9^x + 15 \cdot 5^{2x-1} \geq 8 \cdot 15^x$.

1.3. Системы, содержащие одно или два показательных уравнений

При решении систем уравнений, содержащих показательные функции, чаще всего используют традиционные методы решения систем уравнений: метод подстановки и метод замены переменных.

Напомним, что систему двух уравнений с двумя переменными обозначают фигурными скобками и обычно записывают в виде:

$$\begin{cases} f1(x,y) = g1(x,y) \\ f2(x,y) = g2(x,y) \end{cases}$$

Несколько уравнений с двумя (или более) переменными образуют **систему уравнений**, если ставиться задача найти множество общих решений этих уравнений .

$$\begin{cases} f1(x,y) = g1(x,y) \\ f2(x,y) = g2(x,y) \end{cases}$$

Множество упорядоченных пар, точек (в случае систем с тремя переменными) и т.д. значений переменных, обращающих в истинное равенство каждое уравнение системы, называется **решением системы уравнений.**

Решить систему уравнений – значит найти все ее решения или доказать, что решений нет. Система называется **совместной,** если она имеет хотя бы одно решение, и **несовместной,** если она не имеет ни одного решения.

Система уравнений называется **определенной,** если она имеет конечное число решений, и **неопределенной,** если она имеет бесчисленное множество решений.

Две системы называются **равносильными,** если они имеют одно и то же множество решений.

Пример 1.

$\begin{cases} x + y = 1 \\ 4^x + 4^y = 5 \end{cases}$

Решение:

Используем метод подстановки.

Из первого уравнения y=1-x подставим это выражение во второе уравнение:

$4^x + 4^{1-x} = 5;$

$4^x + \frac{4^1}{4^x} = 5$

Замена: $4^x = t, t > 0$

Получим уравнение:

$t + \frac{4}{t} = 5$ или

$t^2 - 5t + 4 = 0$

$t_1 = 1, t_2 = 4$

Обратная замена:

$4^x = 1$, тогда x=0, y=1

$4^x = 4$, x=1, y=0

Ответ: (0;1), (1;0)

Пример 2

$\begin{cases} 5^x \cdot 3^y = 16 \\ 5^{\frac{x}{2}} - 3^{\frac{y}{2}} = 2 \end{cases}$

Решение:

Сделаем замену: $5^{\frac{x}{2}} = t; 3^{\frac{y}{2}} = z$, получим систему:

$\begin{cases} t^2 - z^2 = 16 \\ t - z = 2 \end{cases}$

$\begin{cases} (t - z)(t + z) = 16 \\ t - z = 2 \end{cases}$

$\begin{cases} 2(t + z) = 16 \\ t - z = 2 \end{cases}$

$$\begin{cases} t + z = 8 \\ t - z = 2 \end{cases}$$

$2t = 10$

$t = 5, z = 3$

Обратная замена: $5^{\frac{x}{2}}$=5; $\frac{x}{2} = 1; x = 2;$

$3^{\frac{y}{2}} = 3;$

$\frac{y}{2}$=1;

$y = 2.$

Ответ: (2;2)

Примеры для самостоятельного решения.

1. $\begin{cases} 4^{x+y} = 16 \\ 4^{x+2y-1} = 1 \end{cases}$;

2. $\begin{cases} 3^{2y-x} = \frac{1}{81} \\ 3^{x-y+2} = 27 \end{cases}$;

3. $\begin{cases} 6^{3x-y} = \sqrt{6} \\ 2^{y-2x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$;

4. $\begin{cases} (\frac{1}{5})^{4x-y} = 25 \\ 7^{9x-y} = \sqrt{7} \end{cases}$;

5. $\begin{cases} 5^{x+y} = 125 \\ 4^{(x-y)^2-1} = 1 \end{cases}$.

1.4. Системы неравенств. Совокупность неравенств.

Несколько неравенств с одной переменной образуют **систему неравенств,** если ставиться задача об отыскании всех тех значений переменной, которые удовлетворяют одновременно каждому из этих неравенств (т.е. если отыскиваются все общие решения исходных неравенств).

Значение переменной, при котором каждое неравенство системы обращается в верное числовое неравенство, называется **решением системы неравенств.**

Две системы неравенств называются равносильными, если они имеют общее множество решений, удовлетворяющих этим неравенствам.

Очевидно, что решением системы неравенств является пересечение решений неравенств, образующих систему, а решением совокупности неравенств является объединение решений неравенств, образующих совокупность.

Несколько неравенств с одной переменной образуют **совокупность неравенств,** если ставится задача об отыскании всех тех значений переменной, каждое из которых удовлетворяет по крайней мере одному их этих неравенств.

<u>Пример 1.</u>

Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} 7^{2x+1} > 49 \\ 2x - 4 > 3 \end{cases}$$

Решение:

Представим 49 в виде степени с основанием 7 в первом неравенстве:

$$\begin{cases} 7^{2x+1} > 7^2 \\ 2x - 4 > 3 \end{cases}$$

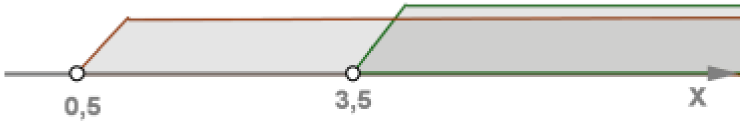
$$\begin{cases} 2x + 1 > 2 \\ 2x - 4 > 3 \end{cases}$$

т.к. $y = 7^t, (t > 1)$ возрастающая функция, знак неравенства не меняется

$$\begin{cases} 2x > 2 - 1 \\ 2x > 3 + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x > 1 : 2 \\ 2x > 7 : 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0{,}5 \\ x > 3{,}5 \end{cases}$$



Ответ: $x \in (3{,}5;\ +\infty)$.

Глава II. Методика изучения показательных уравнений, неравенств и их систем

2.1. Анализ заданий на решение показательных уравнений и неравенств в составе ЕГЭ

Рассмотрим задания из состава ЕГЭ, содержащие примеры на решение показательных уравнений и неравенств и открытой базы данных 2007-2014 годов.

ЕГЭ – 2007

***А*6**– Укажите множество значений функции $y = 2^x + 5$.

1. $(5; \infty)$
2. $(0; \infty)$
3. $(-\infty; \infty)$
4. $(7; \infty)$

В4 – Найдите значение выражения 2^x-y, если (x;y) являются решениями системы:

$$\begin{cases} 7 \cdot 2^x + 6y = 2 \\ 2^{x+1} - 3y = 43 \end{cases}$$

ЕГЭ – 2008

В1 – Решите уравнение:

$$4^{x+1} + 8 \cdot 4^x = 3$$

ЕГЭ – 2009

***В*4 –** Найдите значение выражения $x + y$, где $(x; y)$ – решение системы:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 64^x - 56 \cdot 8^y = 8 \end{cases}$$

В4 – Решите уравнение:

$$5^x + 20 \cdot (\sqrt{5})^x - 125 = 0$$

(Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите их произведение.)

ЕГЭ – 2010

B₃ **–** Решите уравнение:

$7^{x-2} = 49.$

B3 – Найдите корень уравнения:

$3^{x+2} - 2 \cdot 3^{x} = 63$

C1 – Найдите корни уравнения:

$4^{x^2+3x-2} - 0{,}5^{2x^2+2x-1} = 0$

C3 – Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 5 \cdot 5^{tg\, y} + 4 = 5^{-tg\, y} \\ \sqrt{x-5} + 4\cos y = 0 \end{cases}$$

ЕГЭ - 2011

B3 – Найдите корень уравнения:

$3^{x-2} = 27$

B3 – Найдите корень уравнения:

$\left(\frac{1}{2}\right)^{11-x} = 128$

ЕГЭ 2012

B5 – Найдите корень уравнения:

$2^{4-2x} = 64$

B7 – Найдите значение выражения:

$5^{3\sqrt{7}-1} \cdot 5^{1-\sqrt{7}} : 5^{2\sqrt{7}-1}$

C3 – Решите неравенство:

$\sqrt{17 \cdot 9^{x} - 4^{x}} \geq 3^{x} - 3 \cdot 2^{2}$

ЕГЭ – 2013

В-5 – Решите уравнение:

$3^{2x+4} = \sqrt[3]{3}$

Анализируя задания ЕГЭ, можно сделать вывод о том, что задачи на решение показательных уравнений могут встречаться в любой части заданий ЕГЭ. В части **«В»** обычно предлагают решить простейшие показательные уравнения. В части ***«С»*** можно встретить более сложные показательные уравнения, решение которых обычно является одним из этапов выполнения задания. Уравнения в части **«С»** могут быть и комбинированные, т.е. быть и показательными, и рациональными, и иррациональными, и тригонометрическими, и логарифмическими и т.д., это как правила задания части **«С3».**

Примеры комбинированных заданий.

ЕГЭ – 2013

С-3 – Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} 4^x \le 9 \cdot 2^x + 22 \\ \log_3(x^2 - x - 2) \le 1 + \log_3 \frac{x+1}{x-2} \end{cases}$$

С-3 – Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} \log_{5-x} \frac{x+4}{(x-5)^{10}} \ge -10 \\ x^3 + 8x^2 + \frac{50x^2+x-7}{x-7} \le 1 \end{cases}$$

ЕГЭ - 2012

С-3 – Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} \frac{160-4^x}{32-2^x} \ge 5 \\ \log_{0,25x^2}(\frac{6-x}{4}) \le 1 \end{cases}$$

С3 – Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} 2^{4x} - 4^{x+3} \le 65 \\ \log_{x+5}\left(\frac{3-x}{x}\right)^4 + \log_{x+5} \frac{x}{x-3} \le 3 \end{cases}$$

Рассмотрим задания ЕГЭ-2014 года. Задания на решение показательных уравнений и неравенств встречаются в части **«В»** и **«С».** В задании **«В-7»,** где нужно решить простейшее показательное уравнение методом сведения к одинаковому основанию. **«В-12» -** задачи с прикладным содержанием, в которых содержатся показательные уравнения и неравенства.

В части **«С»** предложены не только показательные уравнения, но и системы показательных неравенств. Задание **«С-1»** заключается в том, чтобы решить показательное уравнение и выбрать подходящий корень из определенного промежутка. В задание **«С-3»** нужно решить систему показательных неравенств. Так же в заданиях **«С-3»** мы можем встретить комбинированные неравенства.

№	Виды задач	Условие
B-7	Простейшие уравнения (показательные уравнения)	1) Найдите корень уравнения: $5^{x-7} = \frac{1}{125}$; 2) Найдите корень уравнения: $9^{-5+x} = 729$; 3) Решите уравнение: $2^{3+x} = 0{,}4 \cdot 5^{3+x}$; 4) Решите уравнение: $8^{9-x} = 64^{x}$.
B-12	Задачи с прикладным содержанием (показательные уравнения и неравенства)	1) Уравнение процесса, в котором участвовал газ, записывается в виде $pV^{a} = const$, где p (Па) – давление в газе, V объем газа в кубических метрах, a – положительная константа. При каком наименьшем значении константы a уменьшение в двое раз объема газа, участвующего в этом процессе, приводит к увеличению давления не менее, чем в 4 раза? 2) При адиабатическом процессе для идеального газа выполняется закон $pV^{k} = const$, где p давление газа в паскалях, V объем газа в кубических метрах. В ходе эксперимента с одноатомным идеальным газом (для него $k = \frac{5}{3}$) из начального состояния, в котором $const = 1{,}2 \cdot 10^{8}$ Па·м^3, газ начинают сжимать. Какой наибольший объем V может занимать газ при давлениях p не ниже $3{,}75 \cdot 10^{6}$ Па? Ответ выразите в кубических метрах.
С-1	Уравнения (показательные	1) а) Решите уравнение:

	уравнения)	$4^{x-\frac{1}{2}}-5\cdot 2^{x-1}+3=0$; б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(1;\frac{5}{3}\right)$. 2) а) Решите уравнение: $7\cdot 9^{x^2-3x+1}+5\cdot 6^{x^2-3x+1}-48\cdot 4^{x^2-3x}=0$; б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку [-1;2].
С-3	Неравенства и системы неравенств (показательные неравенства)	1) Решите систему неравенств: $\begin{cases}6^x+(\frac{1}{6})^x>2\\ 2^{x^2}\le 4\cdot 2^x\end{cases}$; 2) Решите систему неравенств: $\begin{cases}5^x+(\frac{1}{5})^x>2\\ 2^{x^2}\le 64\cdot 2^x\end{cases}$
С-3	Комбинированные неравенства	1) Решите систему неравенств: $\begin{cases}11^{x+1}+3\cdot 11^{-x}\le 34\\ \log_{2x}0{,}25\le \log_2 32x-1\end{cases}$ 2) Решите систему неравенств: $\begin{cases}3\cdot 9^x-28\cdot 3^x+9\le 0\\ \log_{x^2}(x-1)^2\le 1\end{cases}$

2.2. Анализ учебников по алгебре и началам анализа по теме «Показательные уравнения и неравенства»

В данном параграфе мы проведем анализ школьных учебников алгебра и начал анализа, для того, чтобы узнать в каком классе изучают показательные уравнения и как преподносится эта тема в каждых из учебников. Для сравнения возьмем 3 учебника алгебры для старших классов общеобразовательной школы.

- А.Г. Мордкович, Алгебра и начала анализа 10-11 классы, учебник для общеобразовательных учреждений;
- А.Н. Колмогоров, Алгебра и начала математического анализа, учебник для 10-11 классов общеобразовательных учреждений;
- Ш.В. Алимов, Алгебра и начала математического анализа 10-11 классы, учебник для общеобразовательных учреждений.

Впервые тему «Показательные уравнения неравенства» изучают в 10 классе. Проанализировав учебники, мы можем узнать в чем сходство и различие теоретического материала, заданий.

Учебник алгебры А.Г. Мордковича дает цельное и полное представление о школьном курсе алгебры и начала анализа, отвечает требованиям обязательного минимума содержания образования. Изложение теоретического материала ведется очень подробно. Построение курса алгебры осуществляется на основе приоритетной функциональной линии.

Прежде чем познакомить нас с методами решения показательных уравнений и неравенств автор знакомит нас с такими понятиями как, корень n-ой степени числа и его свойства. Далее мы знакомимся с функцией $y=\sqrt[n]{x}$, ее графиком и свойствами. После мы изучаем логарифмическую функцию, ее свойства. И уже потом переходим к показательной функции и затем, к решению показательных уравнений и неравенств.

Сначала вводится понятие показательного уравнения, как показательным называют уравнения вида: $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, где a – положительное число, отличное от 1, и уравнения сводящиеся к нему. Далее приведена теорема о решении показательного уравнения с одинаковыми основаниями. В учебнике предложены методы решения показательных уравнений: метод уравнивания показателей, функционально-графический метод и метод введения новой переменной.

Отличительной особенностью учебника является доступное изложение материала, большое количество разобранных примеров. Например, в п.46

Показательные уравнения, на метод уравнивания показателей приведено 3 разобранных примера:

А) $2^{2x-4} = 64$,

где нужно 64 представить как 2^6;

Б) $(\frac{1}{3})^{2x-3,5} = \frac{1}{\sqrt{3}}$,

где $\frac{1}{\sqrt{3}}$ нужно представить как 3^{-1};

В) $5^{x^2-3x} = 5^{3x-8}$,

где нужно решить квадратное уравнение.

В следующем параграфе учебника переходят к изучению показательных неравенств. Сначала вводится определение показательного неравенства и рассматривают два случая, когда $a > 1$ и $0 < a < 1$, тем самым эти два случая являются доказательством теоремы: показательное неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству того же смысла $f(x) > g(x)$ если $a > 1$; показательное неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству противоположного смысла $f(x) < g(x)$ если $0 < a < 1$. Далее приведены примеры решения показательного неравенства этим способом и представлен метод решения показательного неравенства методом введения новой переменной.

Учебник выпускается в двух частях. В первой части мы можем познакомиться с теорией, а во второй части уже приступить к решению задач.

В каждом параграфе представлено большое количества заданий. Упражнения сконцентрированы по двум блокам. Первый блок содержит задания базового и среднего уровня сложности, второй блок включает задания среднего и повышенного уровня.

По данной теме предлагаются задания:

- решить уравнения;
- решить систему уравнений;
- решить неравенство;

- сколько натуральных чисел являются решениями неравенства;

- найдите наибольшее целочисленное решение неравенства.

Следует отметить, что учебник «Алгебры и начала анализа10-11 классы» используется в обычном классе. Для профильных классов есть другой учебник этого автора.

Учебник «Алгебры и начала анализа» А.Н. Колмогорова является самым распространенным учебником алгебры в 10-11 классах. Теоретический материал иллюстрируется большим количеством примеров. Задания для учащихся делаться на две части. Первая часть заданий обязательный минимум для учеников, который они должны уметь решать. В следующей части задания чуть сложнее. Также в конце каждой темы можно увидеть задания и вопросы на повторение, что помогает к подготовки к контрольной работе.

В учебники хорошо изложен дополнительный материал, интересные факты, биография ученных, происхождение терминов. Это позволяет развить интерес к предмету и окружающему миру.

Содержание учебника Колмогорова мы сначала изучаем главу функции, в которой изучаем показательную функцию. Затем в следующей главе, переходим к решению показательных уравнений и неравенств. Однако, четкого определения показательного уравнения и неравенства в учебнике нет.

В учебнике представлены следующие задания:

- решите уравнения;

- решите систему уравнений;

- решите неравенства;

- решите графически неравенства.

В учебнике рассмотрены: методы уравнивания показателей, методы введения новой переменной и метод вынесения общего множителя за скобку при решении показательного неравенства. А также указывается на свойства возрастания и убывания функций при решении показательных неравенств. Далее рассматривается решение системы показательных уравнений.

Учебник «Алгебра и начала математического анализа» Ш.В. Алимова пользуется меньшей популярностью среди учебников алгебры. Изложение учебника уже близко подходит к математическому анализу. В учебнике очень много разобранных примеров, графических иллюстраций к решению задач.

Задания, предоставляемые в параграфе, разделены на два уровня: средний и высокий. В конце учебника к каждому параграфу есть дополнительные задачи, которые помогают подготовиться к контрольной работе.

Прежде чем перейти к решению показательных уравнений и неравенств автор предлагает сначала познакомиться с показательной функцией, ее графиком и свойствами. В учебнике представлены методы: метод уравнивания показателей, вынесения общего множителя за скобки, метод введения новой переменной. При решении показательных неравенств, также автор предлагает обратить внимание на возрастание и убывание функции. В учебнике предлагается пример решения показательного неравенства графическим методом. После изучения методов решения показательных уравнений и неравенств, сразу дается решение систем, содержащих показательные уравнения и неравенств.

Задания, представленные в учебнике:

- решить уравнения;

- доказать, что уравнение имеет один корень при фиксированном значении x;

- решить неравенства;

- решить графически уравнения;

- найти целые значения неравенства на отрезке;

- решить графически неравенства;

- решить систему.

Проанализировав учебники, можно сделать вывод о том, что во всех трех учебниках почти одинаковый порядок изучения темы, но методы решения показательных уравнений представлены по-разному. Теоретическое изложение этой темы, задания представленные в учебнике алгебры и начал анализа изложены лучше под редакцией А.Г. Мордковича.

2.3. Методические особенности изучения показательных уравнений и неравенств

При изучении новой темы в школе, учитель должен упираться уже на полученные знания учащихся. Все темы взаимосвязаны между собой и нужно показывать эту связь. Например, решение показательных неравенств основывается на решение показательных уравнений.

При изучении теоретического материала следует обратить внимание на следующие моменты:

- прежде чем перейти к методам решения показательных уравнений и неравенств, нужно напомнить учащимся, что такое показательная функция, ее свойства, график (ученики должны уметь отличать показательную функцию от других);

- при решении показательных уравнений полезно будет вспомнить об основных формулах действия со степенями.

Здесь я хочу предложить разработанный конспект урока по теме: «Решение показательных неравенств». В конспекте используется частично поисковый метод, т.е. ученикам предложены задания, которые они должны решить, используя полученные знания, постепенно приводя их к изучаемой теме. Прежде чем приступить к изучению решений показательных неравенств, в конспекте представлены задания на повторения, помогающие вспомнить свойства показательной функции. На начальном этапе изучения этой темы важно сформировать навык использовать эти свойства. Потому что при решении показательного неравенства общим методом нужно не забывать про возрастания и убывания функции, чтобы придти к правильному ответу.

План-конспект урока по теме: «Решение показательных неравенств»

Класс: 10 класс

Тема: Показательные неравенства.

Учебник: «Алгебра и начала математического анализа» 10-11 класс под редакцией А.Н. Колмогорова.

Тип урока: изучение нового материала.

Оборудование: учебник, доска, презентация

Цели урока:

Образовательные:

- ввести определение показательного неравенства;
- познакомить учащихся с общим методом решения показательных неравенств

Развивающие:

- развивать познавательный интерес к предмету;
- развивать логическое мышление

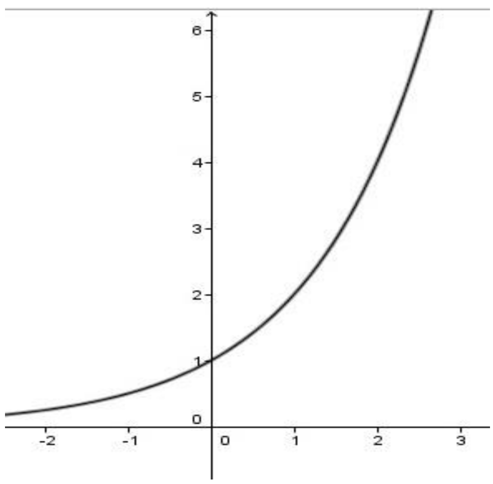
Воспитательные:

- воспитать трудолюбие, аккуратность, культуру общения,
- воспитывать умение работать в коллективе.

№	Этап урока	Время, мин
1.	Организационный момент.	2
2.	Актуализация знаний.	10
3.	Изучение нового материала.	10
4.	Проверка усвоения нового материала.	7
5.	Закрепление изученного.	10
6.	Подведение итогов.	4
7.	Домашнее задание. Прощание.	2

	Всего времени	45

Ход урока

№	Этап урока	Деятельность учителя	Деятельность ученика
1.	Организационный момент	- Здравствуйте, ребята! Тема нашего сегодняшнего урока – это «Решение показательных неравенств».	- Здравствуйте!
2.	Актуализация знаний	**1 этап:** Блиц-опрос (на листочках) 1) Какой график изображен на рисунке?  А) $y = \sin x$; Б) $y = 2^{x}$; В) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$; Г) $y = \frac{1^{x}}{2}$. 2) Как называется эта функция? А) Показательная; Б) Степенная; В) Тригонометрическая;	Ученики решают и записывают ответы на листочках. 1) Ответ: Б 2) Ответ: А

		Г) Логарифмическая. 3) Найдите корень уравнения: $3^{-x+2} = \frac{1}{9}$ А) 0; Б) 4; В) -4; Г) нет решений. 4) Каким методом можно решить уравнение: $2 \cdot 3^{2x} + 3^x - 2 = 0$? А) Графическим методом; Б) Методом сведения к одному основанию; В) Методом группировки; Г) Методом введения новой переменной. 5) Какова область определения функции: $y = \frac{1}{\sqrt{3^x}}$ А) $(-\infty; 0)$; Б) $(-\infty; +\infty)$; В) $(0;\ +\infty)$ Г) $[-1; 1]$. Ответы: 1. Б; 2. А; 3. Б; 4. Г; 5. В. **2 этап:** работа у доски. Решите уравнение: $\frac{1}{2}^x = 3 + x$ Каким способом можно решить уравнение?	3) $3^{-x+2} = \frac{1}{9}$ $3^{-x+2} = 3^{-2}$ $-x + 2 = -2$ $x = 4$ Ответ: Б Ответ: Г Ответ: В Решение: графическим методом. Построим графики

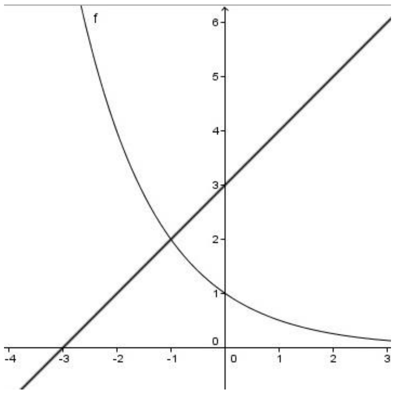
функций

$y = \frac{1}{2}^{x}$

x	-1	1	2
y	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$y = 3 + x$

x	0	-3
y	3	0



Построим график по заданным таблицам. Координата x точки пересечения двух функций будет решение уравнения.

Ответ: - 1.

3 этап: (работа в тетрадях, проверка у доски)

1) Решите уравнение: $5^{x+1} - 5^{x-1} = 24$

1) Решение.

Перепишем уравнение в виде

$5 \cdot 5^{x} - \frac{1}{5} \cdot 5^{x} = 24$

Теперь в левой части уравнения вынесем за

			скобки общий множитель 5^x. Получим $5^x \cdot \left(5 - \frac{1}{5}\right) = 5^x \cdot \frac{24}{5} = 24$ откуда $5^x = 5$ $x = 1$ Ответ: 1.
		2) Запишите общий вид показательной функции.	2) $y = a^x$.
		3) Какими ограничениями обладает показательная функция?	3) $a > 0, a \neq 1$.
		4) Сколько существует вариантов графиков показательной функции?	4) 2 варианта.
		5) От чего зависит вид?	5) $a > 0, 0 < a < 1$.
3.	Изучение нового материала	Сегодня на уроке мы познакомимся с решением показательных неравенств. Мы уже знаем, что такое показательное уравнение и методы их решения. Можете ли сформулировать определение показательного неравенства?	(Внимательно слушают, записывают свойства показательной функции, при решении примеров, проговаривают эти свойства.) - Показательное неравенство – это неравенство,

			содержащее неизвестную переменную в показателе степени.
		Простейшее показательное неравенство: $a^x < b, a^x > b,$ где $a > 0, a \neq 1, x$ – неизвестное.	
		От чего зависит возрастание показательной функции? И как?	- От значений a. При $a^x > 1$ функция монотонно возрастает. При $0 < a < 1$ функция монотонно убывает.
		При решении показательных уравнений и неравенств мы будем пользоваться этими свойствами показательной функции: 1) $a > 1$ В этом случае, как мы уже говорили, показательная функция монотонно возрастает. Поэтому неравенство $a^x > a^b$ будет выполнено для всех $x > b$. 2) $0 < a < 1$ В этом случае, как мы уже говорили, показательная	

		функция монотонно убывает. Поэтому неравенство $a^x > a^b$ будет выполнено для всех $x < b$. Рассмотрим неравенства: **Пример 1.** $0{,}5^{7-3x} < 4$ т.к. $4 = 0{,}5^{-2}$, перепишем неравенство в виде: $0{,}5^{7-3x} < 0{,}5^{-2}$ Далее следует отметить, что $0{,}5 < 1$, следовательно, показательная функция $y = 0{,}5^x$ убывает. Поэтому данное неравенство равносильно: $7 - 3x > -2$, откуда $x < 3$. Ответ: $x \in (-\infty; 3)$ **Пример 2.** $6^{x^2+2x} \geq 6^3$ $6 > 1$, следовательно, показательная функция возрастает. Отсюда наше неравенство равносильно $x^2 + 2x \geq 3$ решая неравенство, получим: $x \in (-\infty; -3]$ *и* $[1; +\infty)$ Ответ: $x \in (-\infty; -3]$ *и* $[1; +\infty)$	

4.	Проверка усвоенного материала	Найди ошибку (ответ аргументируйте). 1) $2^x \geq 8$ $2^x \geq 2^3$ $x \leq 3$ 2) $0{,}5^x \leq 0{,}125$ $0{,}5^x \leq 0{,}5^3$ $x \leq 3$ 3) $3^x > 9$ $3^x > 3^2$ $x > 2$ 4) $(\frac{2}{3})^x \leq \frac{4}{9}$ $(\frac{2}{3})^x \leq \left(\frac{2}{3}\right)^2$ $x \leq 2$ 5) $25^{-x+3} \geq (\frac{1}{5})^{3x-1}$	Решение: 1) $2^x \geq 8$ $2^x \geq 2^3$ $x \leq 3$ - не верно, т.к. $2 > 1$, знак не меняется, следовательно, $x \geq 3$ Ответ: $x \in [3; +\infty)$ 2) $0{,}5^x \leq 0{,}125$ $0{,}5^x \leq 0{,}5^3$ $x \leq 3$ – не верно, т.к. $0{,}5 < 1$, знак меняется, следовательно, $x \geq 3$ Ответ: $x \in [3; +\infty)$ 3) $3^x > 9$ $3^x > 3^2$ $x > 2$ - верно Ответ: $x \in (2; +\infty)$ 4) $(\frac{2}{3})^x \leq \frac{4}{9}$ $(\frac{2}{3})^x \leq \left(\frac{2}{3}\right)^2$ $x \leq 2$ - не верно, т.к. $\frac{2}{3} < 1$, знак меняется, следовательно, $x \geq 2$ Ответ: $x \geq\in (2; +\infty)$ 5) $25^{-x+3} \geq (\frac{1}{5})^{3x-1}$

		$(5^2)^{-x+3} \geq (5^{-1})^{3x-1}$ $5^{-2x+6} \geq 5^{-3x+1}$ $-2x + 6 \geq -3x + 1$ $x \geq -5$	$(5^2)^{-x+3} \geq (5^{-1})^{3x-1}$ $5^{-2x+6} \geq 5^{-3x+1}$ $-2x + 6 \geq -3x + 1$ $x \geq -5$ – верно.
5.	Закрепление изученного материала	Для закрепления изученного, откроем страницу 231 в учебнике. № 466(б, г) № 467(б,г)	№ 466 Б) $0{,}2^x \leq \frac{1}{25}$ т.к. $0{,}2 = \frac{1}{5}$ и $\frac{1}{25} = (\frac{1}{5})^2$, то $(\frac{1}{5})^x \leq (\frac{1}{5})^2$, $\frac{1}{5} < 1$, следовательно функция монотонно убывает, знак меняется на противоположный $x \geq 2$ Г) $(1{,}5)^x < 2{,}25$ $(1{,}5)^x < 1{,}5^2$ $1{,}5 > 1$, следовательно, функция монотонно возрастает, знак не меняется $x < 2$ №467 Б) $0{,}3^{7+4x} > 0{,}027$ $0{,}3^{7+4x} > 0{,}3^3$ $0{,}3 < 1$, следовательно, функция монотонно убывает, знак меняется на противоположный

			$7 + 4x < 3$ $4x < -4$ $x < -1$ Г) $3^{2-x} < 27$ $3^{2-x} < 3^3$ $3 > 1$, следовательно, функция монотонно возрастает, знак не меняется $2 - x < 3$ $-x < 1$ $x > -1$
6.	Подведение итогов	Итак, ребята, мы с вами познакомились с общим методом решения показательных неравенств, но это не единственный метод решения показательных неравенств. - В чем суть этого метода?	- Показательное неравенство представляется так, чтобы в правой и левой части неравенства были степени с одинаковыми основаниями. Далее следует обратить внимание на возрастание и убывание

		- В каких случаях у нас меняется знак на противоположный? - А в каких случаях знак в показательном неравенстве не измениться? На следующем уроке мы с вами приступим к решению показательных неравенств другими методами.	функции, поменять знак, если требуется. И решить неравенство. - Знак меняется, если показательная функция монотонно убывает, т.е. $0 < a < 1$. - (Знак не меняется, если показательная функция монотонно возрастает, т.е. $a > 1$).
7.	Домашняя работа. Прощание.	- читать п.36; - выучить правила; - №№ 466(а, в), 467(а, в).	

Заключение

Подводя итоги данного исследования, можно сделать следующие выводы:

1. Показательные уравнения и неравенства представляют интерес для учащихся. При решении показательных уравнений и неравенств развиваются навыки систематизации, логического мышления при выборе правильного метода решения, повышает творческие и умственные способности. Их изучение очень важно в курсах школьной математики и элементарной математики в вузе, т.к. примеры, содержащие показательные уравнение и неравенства, встречаются в заданиях ЕГЭ, не только в составе показательных уравнений и неравенств, но и в системах и смешанных уравнениях.

2. Для каждого вида уравнений и неравенств в работе представлен наиболее удобный способ его решения. Трудности могут возникнуть при решение систем, содержащие одно или два показательных уравнения, т.к. нужно правильно определить метод решения.

3. Учителям на уроках алгебры нужно показать доступность этой темы для учеников, интересующихся математикой при помощи различных презентаций, наглядных пособий, тестов, самостоятельных работ и срезов.

В школьном курсе алгебры и начал анализа, в заданиях ЕГЭ часто встречаются показательные уравнения и неравенства. На уроках на изучение этой темы уделяется мало времени, в учебниках показаны не все методы решения показательных уравнений и неравенств, в учебниках приведено мало примеров для самостоятельного решения. На изучение темы «Показательные уравнения» по плану выделено 6-8 часов, а на изучение темы «Показательные неравенства» всего 2 часа. По нашему мнению, на уроках математики следует больше уделять времени решению показательных уравнений и неравенств на уроках алгебры, либо на элективных курсах или факультативах, т.к. это поможет учащимся успешно сдать ЕГЭ, а значит поступить в вуз.

В ходе исследования были решены следующие задачи:

- подробно рассмотрен теоретический материал и различные методы решения показательных уравнений, неравенств и их систем (методы уравнивания показателей, введения новой переменной, функционально-графический, почленного деления, вынесения общего множителя за скобки, группировки);

- проанализированы учебники по алгебре и начал анализа;

- систематизированы задания ЕГЭ за 2007-2014 года.

Нами были разработан конспект урока и рассмотрены методические рекомендации по данной теме.

Цель данной дипломной работы выполнена. Материал, приведенный в данной работе, может служить методическим пособием для учителя в работе с учащимися на уроках и факультативах, а так же справочным материалом для учеников при самостоятельной подготовки к экзаменам.

Литература

1. Алгебра и начала анализа: Учебник для общеобразовательных учреждений 10-11 классы:/ А. Г. Мордкович. – М.: Мнемозина, 2001. – 335 с.
2. ЕГЭ 2009. Математика. Справочник / А. М. Титаренко, И. В. Третьяк, Т. М. Виноградова. – М: Эксмо, 2008. – 448 с.
3. Алгебра и начала анализа: Учеб. для 10–11 кл. общеобразоват. учреждений /А.Н. Колмогоров, А.М. Абрамов, Ю.П. Дудницын и др.; Под. ред. А.Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 2004. – 384 с.
4. Дидактические материалы по алгебре и началам анализа для 11 класса /Б.М. Ивлев, С.М. Саакян, С.И. Шварцбурд. – М.: Просвещение, 2003. – 143 с.
5. Система тренировочных задач и упражнений по математике./ Симонов А.Я., Бакаев Д.С., Эпельман А.Г. и др. – М.: Просвещение, 1991. – 208 с.
6. Мордковича А.Г. Алгебра и начала анализа. 10-11 классы: задачник /А.Г. Мордкович, Т.Н. Мишустина, Е.Е. Тульчинская.-М.: Мнемозина, 2007. – 315 с.
7. Справочник по математике. / Гусев В.А., Мордкович А.Г. - М: Просвещение, 1995. – 448 с.
8. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы: учебник для общеобразовательных учреждений: базовый уровень/ Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева и др., 2012. – 464 с.
9. ЕГЭ – 2012. Математика: типовые экзаменационные варианты: 30 вариантов/ под редакцией А.В. Семенова, И.В. Ященко. – М.: Национальное образование, 2011. – 192 с.
10. Алгебраический тренажер: пособие для школьников и абитуриентов/ под редакцией Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С. – М.: Илекса, 2007. – 320 с.

11. Новейший полный справочник школьника 5-11 классы. Математика. Авторы – составители А.М.Титаренко; А.М. Роганин. Под редакцией Т.И. Максимовой. ООО « Издательство «Эксмо», 2008. – 304 с.

12. Математика. Репетитор. ЕГЭ-2009. Авторы: В.В.Кочагин; М.Н.Кочагина. - М.: Эксмо, 2009. – 272 с.

13. Тригонометрические, показательные и логарифмические уравнения и неравенства: учебное пособие/ Севрюков П.Ф., Смоляков А.Н. М.: Илекса; Народное образование; Ставрополь: Сервисшкола, 2008. – 352 с.

14. Математика для поступающих в вузы: учебное пособие/ И.Ф. Шарыгин. М.: Дрофа, 2006. – 479 с.

15. Математика: интенсивный курс подготовки к экзамену. – М.: Айрис-прес, 2003. – 432 с.

16. Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начал анализа. – М.: Просвещение, 1990. – 416 с.

Ресурсы удаленного доступа

1. Сайт элементарной математики Дмитрия Гущина. Эл. адрес: http://www.mathnet.spb.ru

2. Учительский портал. Эл. адрес: http://www.uchportal.ru/load/25-1-0-23602

3. Сайт учителя математики. Эл. адрес: http://lesavchen.ucoz.ru/publ/10-1-0-149

4. Система индивидуальных работ при обучении математике в старших классах. Эл. адрес: http://www.korolewa-ow.narod.ru/sist_ind.htm

Заключительный лист

Подпись автора________________________

Дата__________________________________

Квалификационная работа допущена к защите

Назначен рецензент: Лаврентьева Е.Е., канд.пед.наук, доцент кафедры информатики и вычислительных технологий Института вычислительной математики и информационных технологий

Заведующий кафедрой _____________________

Дата _____________________________________

Защита в ГАК с оценкой

«_____________________»

Дата _________________

Секретарь ГАК _________