

УДК 539.3

ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ ПО ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ФОРМЕ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ, ПОДКРЕПЛЕННОЙ В ТОРЦЕВЫХ СЕЧЕНИЯХ АБСОЛЮТНО ТВЕРДЫМИ ТЕЛАМИ

И.Б. Бадриев^{1,2}, М.В. Макаров¹, В.Н. Паймушин^{1,2}

¹Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия

²Казанский национальный исследовательский технический университет
имени А.Н. Туполева, г. Казань, 420111, Россия

Аннотация

Рассмотрена геометрически нелинейная задача о продольно-поперечном изгибе по цилиндрической форме трехслойной пластины с трансверсально-мягким наполнителем, подкрепленной в торцевых сечениях абсолютно твердыми телами, предназначенными для обеспечения передачи нагрузки на несущие слои при взаимодействии с другими элементами конструкций. Используются полученные ранее уравнения уточненной геометрически нелинейной теории, позволяющие описать процесс их докритического деформирования и выявить все возможные формы потери устойчивости несущих слоев (синфазные, антифазные, смешанные изгибные и смешанные изгибно-сдвиговые, а также произвольные, включающие в себя все выше перечисленные). Получение указанных уравнений проведено путем введения в рассмотрение в качестве неизвестных контактных усилий взаимодействия внешних слоев с наполнителем, а также внешних слоев и наполнителя с подкрепляющими телами во всех точках поверхностей их сопряжения. Разработан численный метод решения сформулированной задачи. Построение метода проведено путем предварительного сведения задачи к системе интегро-алгебраических уравнений, при решении которой использован метод конечных сумм. Предложена методика изучения докритического геометрически нелинейного поведения пластины при ее торцевом сжатии через подкрепляющее тело. Приведены результаты численных экспериментов. Проведен анализ результатов экспериментов.

Ключевые слова: трехслойная пластина, трансверсально-мягкий наполнитель, контурное подкрепляющее тело, средний изгиб пластины, уточненная модель наполнителя, контактные напряжения, интегро-алгебраические уравнения, метод конечных сумм, геометрически нелинейное деформирование, докритическое поведение

Введение

Трехслойные пластины и оболочки с внешними (несущими) слоями из жестких материалов и наполнителем, относящимся к классу трансверсально-мягких (например, сотовой или складчатой структуры, армированный пенопласт и др.), являются одним из наиболее распространенных элементов конструкций того или иного назначения в строительстве и машиностроении [1–5], судостроении [6–9], авиационной и ракетно-космической промышленности [10–14]. Внешние слои таких элементов на контуре всегда имеют подкрепляющие стержни, обеспечивающие передачу нагрузки на несущие слои при взаимодействии с другими элементами конструкций (рис. 1).

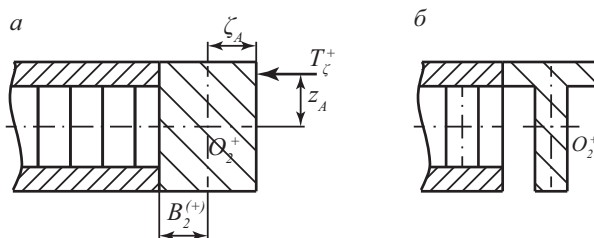


Рис. 1. Трехслойная пластина: схемы нагружения (а) и крепления (б)

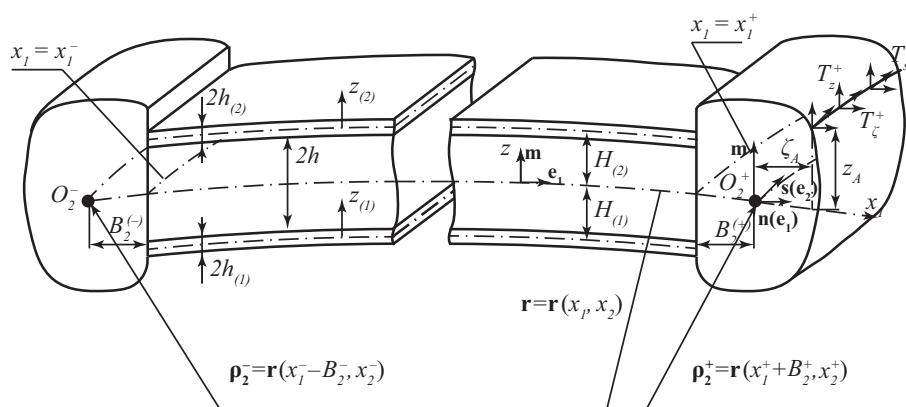


Рис. 2. Трехслойная пластина с контурными подкрепляющими стержнями

Задачам механики деформирования трехслойных конструкций без учета взаимодействия с контурными подкрепляющими стержнями посвящено большое количество работ [15–21]. Особо выделим статьи [22–25], в которых для трехслойных пластин и оболочек с трансверсально-мягким наполнителем при малых деформациях и средних перемещениях была построена уточненная геометрически нелинейная теория, позволяющая описать процесс докритического деформирования трехслойных пластин и выявить все возможные формы потери устойчивости (ФПУ) несущих слоев (синфазные, антифазные, смешанные изгибные и смешанные изгибно-сдвиговые, а также произвольные, включающие в себя все вышеперечисленные). Физически нелинейные задачи изучались в [26–29]. При обобщении результатов этих работ на трехслойные пластины и оболочки с контурными подкрепляющими стержнями в работах [30–32], как и в [19–21], в качестве неизвестных введены в рассмотрение контактные усилия взаимодействия внешних слоев с наполнителем, а также внешних слоев и наполнителя с подкрепляющими стержнями во всех точках поверхностей их сопряжения.

В настоящей работе изучается геометрически нелинейная задача о продольно-поперечном изгибе по цилиндрической форме трехслойной пластины с трансверсально-мягким наполнителем, подкрепленной в торцевых сечениях абсолютно твердыми телами (рис. 2). При выводе уравнений в качестве дополнительных неизвестных рассматриваются контактные усилия взаимодействия внешних слоев с наполнителем, а также внешних слоев и наполнителя с подкрепляющими телами во всех точках поверхностей их сопряжения. Вводятся соответствующие условия сопряжения. Затем сформулированная задача сводится к интегро-алгебраической системе с уравнениями типа Вольтерра второго рода и дополнительными соотношениями

для определения неизвестных констант интегрирования. Проводится аппроксимация интегральных уравнений методом коллокаций по гауссовским узлам. Для решения полученной таким образом проекционной схемы предлагается двухслойный итерационный процесс с опусканием нелинейности на нижний слой с предобуславливателем, являющимся линейной частью оператора задачи. После решения конечномерной задачи решение исходной краевой задачи можно восстановить путем численного интегрирования с использованием построенных интегрирующих матриц. В среде MatLab с целью численной реализации предложенных приближенных методов разработан комплекс программ. С его помощью для модельной задачи проведены численные эксперименты. Дан анализ полученных численных результатов.

1. Постановка задачи

Для вывода основных уравнений равновесия, статических граничных условий для оболочки и подкрепляющих стержней, а также условий кинематического сопряжения внешних слоев с заполнителем, внешних слоев и заполнителя с подкрепляющими стержнями, как и в [31], в работе [30] использовался предложенный ранее обобщенный вариационный принцип Лагранжа [33]. Применительно к рассматриваемой в настоящей статье трехслойной пластине, испытывающей цилиндрический изгиб, выведенные в [30] указанным способом уравнения равновесия будут иметь вид (здесь и далее $k = 1, 2$ – номер внешнего несущего слоя, $\delta_{(1)} = 1$, $\delta_{(2)} = -1$)

$$\frac{dN_1^{(k)}}{dx} + \frac{\delta_{(k)}E_3}{2h} (w^{(2)} - w^{(1)}) + X_3^{(k)} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{dT_{11}^{(k)}}{dx} + \delta_{(k)}q_1 + X_1^{(k)} = 0, \quad (2)$$

$$\mu_1 = u_1^{(1)} - u_1^{(2)} - H_{(1)}\omega^{(1)} - H_{(2)}\omega^{(2)} + \frac{2hq_1}{G_{13}} - \frac{2h^3}{3E_3} \frac{d^2q_1}{dx^2} = 0. \quad (3)$$

В уравнениях (1)–(3) тангенциальные усилия $T_{11}^{(k)}$ и обобщенные перерезывающие силы $N_1^{(k)}$ выражаются через неизвестные осевые перемещения $u_1^{(k)}$, прогибы $w^{(k)}$ срединных поверхностей несущих слоев и касательные напряжения в заполнителе q_1 , постоянные по его толщине, по формулам

$$\begin{aligned} N_1^{(k)} &= Q_1^{(k)} + H_{(k)}q_1, & Q_1^{(k)} &= \frac{dM_{11}^{(k)}}{dx} + \left(T_{11}^{(k)}\omega^{(k)}\right), \\ M_{11}^{(k)} &= -D_{11}^{(k)}\frac{d^2w^{(k)}}{dx^2}, & T_{11}^{(k)} &= B_{11}^{(k)}\left[\frac{du_1^{(k)}}{dx} + \frac{1}{2}\left(\omega^{(k)}\right)^2\right], & \omega^{(k)} &= \frac{dw^{(k)}}{dx}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $B_{11}^{(k)} = 2h_{(k)}E^{(k)} / (1 - \nu_{12}^{(k)}\nu_{21}^{(k)})$ и $D_{11}^{(k)} = B_{11}^{(k)}h_{(k)}^2/3$ – жесткость на растяжение-сжатие и изгибная жесткость k -го слоя, имеющего толщину $2h_{(k)}$ и выполненного из материала с модулем упругости $E^{(k)}$ и коэффициентами Пуассона $\nu_{12}^{(k)}$, $\nu_{21}^{(k)}$; $H_{(k)} = h_{(k)} + h$, $2h$ – толщина заполнителя, имеющего модуль упругости E_3 в поперечном направлении и модуль поперечного сдвига G_{13} ; $M_{11}^{(k)}$ – внутренний изгибающий момент в k -м слое; $X_1^{(k)}$, $X_3^{(k)}$ – компоненты поверхностной нагрузки, приведенной к срединной поверхности k -го слоя, $Q_1^{(k)}$ – перерезывающие силы в k -м несущем слое без учета касательных напряжений в заполнителе.

Если ввести в рассмотрение неизвестные контактные усилия взаимодействия внешних слоев и заполнителя с подкрепляющими стержнями, то решения уравнений (1)–(3) при $x_1 = x_1^\pm$ должны удовлетворять граничным условиям

$$M_{11}^{(k)} = L_{11}^{(k)}, \quad \frac{dM_{11}^{(k)}}{dx} + T_{11}^{(k)}\omega^{(k)} + H_{(k)}q_1 = Q_{13}^{(k)} + h\tau_1, \quad T_{11}^{(k)} = Q_{11}^{(k)}, \quad q_1 = \tau_1, \quad (5)$$

где $Q_{11}^{(k)}$, $Q_{13}^{(k)}$ и $L_{11}^{(k)}$ – неизвестные погонные контактные усилия и изгибающие моменты, τ_1 – поверхностные контактные напряжения, формирующиеся в точках сопряжения подкрепляющего стержня с заполнителем.

Предположим, что при нагружении пластины в ней формируется напряженно-деформированное состояние, являющееся симметричным относительно сечения $x_1 = 0$. Тогда в этом сечении требуется удовлетворить условиям симметрии решений уравнений (1)–(4) следующих видов

$$\omega^{(k)} = 0, \quad N_1^{(k)} = 0, \quad u_1^{(k)} = 0, \quad q_1 = 0. \quad (6)$$

При цилиндрическом изгибе трехслойной пластины стержни, подкрепляющие её в торцевых сечениях $x_1 = x_1^-$, $x_1 = x_1^+$, трансформируются в абсолютно твердые тела. Поэтому уравнения равновесия такого подкрепляющего стержня в сечении $x_1 = x_1^+$ будут иметь следующий вид:

$$f_u^+ = -\left(Q_{11}^{(1)} + Q_{11}^{(2)}\right) + T_\zeta^+ = 0, \quad (7)$$

$$f_w^+ = -\left(Q_{13}^{(1)} + Q_{13}^{(2)} + 2h\tau_1\right) + T_z^+ = 0, \quad (8)$$

$$f_\varphi^+ = -\left[\sum_{k=1}^2 \left(L_{11}^{(k)} - \delta_{(k)}Q_{11}^{(k)}H_{(k)}\right) + B_2^{(+)}\left(Q_{13}^{(1)} + Q_{13}^{(2)} + 2h\tau_1\right)\right] + m_s^+ = 0, \quad (9)$$

где T_ζ^+ , T_z^+ – компоненты внешней погонной нагрузки $\mathbf{T}^+ = T_\zeta^+ \mathbf{n} + T_z^+ \mathbf{m}$, приложенной в точке линии $\mathbf{r}_A = \zeta_A \mathbf{n} + z_A \mathbf{m}$ (рис. 2), $m_s^+ = T_\zeta^+ z_A - T_z^+ \zeta_A$ – погонный изгибающий момент.

Формирующиеся в подкрепляющих стержнях перемещения U , W и угол поворота φ должны удовлетворять кинематическим условиям сопряжения стержней с несущими слоями

$$u_1^{(k)} - (U - \delta_{(k)}H_{(k)}\varphi) = 0 \quad \text{при} \quad \delta Q_{11}^{(k)} \neq 0, \quad (10)$$

$$w^{(k)} - (W + B_2^{(+)}\varphi) = 0 \quad \text{при} \quad \delta Q_{13}^{(k)} \neq 0, \quad (11)$$

$$\omega^{(k)} + \varphi = 0 \quad \text{при} \quad \delta L_{11}^{(k)} \neq 0, \quad (12)$$

к которым необходимо добавить кинематическое условие

$$w^{(1)} + w^{(2)} + \frac{2h^2}{3E_3} \frac{dq_1}{dx} - 2(W + B_2^{(+)}\varphi) = 0, \quad (13)$$

имеющее место при $\delta\tau_1 \neq 0$. Заметим, что в (10)–(13) неизвестные U , W и φ представляют собой смещения точки O_2^+ (рис. 2) и угол поворота поперечного сечения подкрепляющего тела.

При $Q_{11}^{(k)} = Q_{13}^{(k)} = L_{11}^{(k)} = \tau_1 = 0$ (при отсутствии в сечениях $x_1 = x_1^\pm$ подкрепляющих стержней, см. рис. 1, б) для решения краевой задачи (1)–(5)

относительно вектор-функции неизвестных $X_1 = (w^{(1)}, w^{(2)}, u_1^{(1)}, u_1^{(2)}, q_1)$ в [22] был предложен численный метод, основанный на предварительной конечно-разностной аппроксимации задачи с помощью метода сумматорных тождеств [34, 35]. В рассматриваемом же случае для краевой задачи в виде пяти дифференциальных уравнений (1)–(3) с граничными условиями (5), (6) и десяти алгебраических уравнений (7)–(13) требуется определить вектор-функцию неизвестных $X_2 = (w^{(1)}, w^{(2)}, u_1^{(1)}, u_1^{(2)}, q_1, Q_{11}^{(1)}, Q_{11}^{(2)}, Q_{13}^{(1)}, Q_{13}^{(2)}, L_{11}^{(1)}, L_{11}^{(2)}, \tau_1, U, W, \varphi)$.

2. Сведение краевой задачи к интегро-алгебраическому виду

Сформулированную краевую задачу (1)–(13) об определении функции $X_2(x)$ сведем к интегро-алгебраической системе с уравнениями типа Вольтерра второго рода с дополнительными соотношениями для определения неизвестных констант интегрирования. Заметим, что в исходную дифференциальную задачу входят производные порядка $2n$ от искомой функции, в то время как интегральные уравнения будут содержать лишь n -е производные. Такое сведение проводится путем интегрирования уравнений (1)–(3), удовлетворения условиям (5), (6) и использования следующих соотношений

$$u_1^{(k)}(x) = \int_0^x \frac{du_1^{(k)}}{ds} ds, \quad q_1(x) = \int_0^x \frac{dq_1}{ds} ds,$$

$$\frac{dw^{(k)}}{dx} = \int_0^x \frac{d^2w^{(k)}}{ds^2} ds, \quad w^{(k)}(x) = w_a^{(k)} - \iint_{x_0}^a \frac{d^2w^{(k)}}{ds^2} ds d\xi,$$

где $w_a^{(k)} = w|_{x_1=x_1^+}$. В результате относительно вектор-функции

$$X(x) = (w_{11}^{(1)}, w_{11}^{(2)}, u_{1,1}^{(1)}, u_{1,1}^{(2)}, q_{1,1}, w_a^{(1)}, w_a^{(2)}, Q_{11}^{(1)}, Q_{11}^{(2)}, Q_{13}^{(1)}, Q_{13}^{(2)}, L_{11}^{(1)}, L_{11}^{(2)}, \tau_1, U_A, \varphi),$$

$x \in [0, x_1^+] = [0, a]$, где введены обозначения $w_{11}^{(k)} = \frac{d^2w^{(k)}}{dx^2}$, $u_{1,1}^{(k)} = \frac{du^{(k)}}{dx}$, $q_{1,1} = \frac{dq_1}{dx}$, приходим к следующей системе интегро-алгебраических уравнений:

$$L_{11}^{(k)} + \delta_{(k)} \frac{E_3}{2h} \iint_{x_0}^a \int_0^\xi \left[w_a^{(2)} - w_a^{(1)} - \iint_{s_0}^a \int_0^\eta \left(\frac{d^2w^{(2)}}{ds^2} - \frac{d^2w^{(1)}}{ds^2} \right) dy d\eta \right] ds d\xi +$$

$$+ D_{11}^{(k)} \frac{d^2w^{(k)}}{dx^2} + \int_x^a T_{11}^{(k)} \int_0^\xi \frac{d^2w^{(k)}}{ds^2} ds d\xi + H_{(k)} \iint_{x_0}^a \int_0^\xi \frac{dq_1}{ds^2} ds d\xi = - \iint_{x_0}^a X_3^{(k)} ds d\xi, \quad (14)$$

$$Q_{11}^{(k)} - B_{11}^{(k)} \left(\frac{du_1^{(k)}}{dx} + \frac{1}{2} \left(\int_0^x \frac{d^2w^{(k)}}{ds^2} ds \right)^2 \right) + \delta_{(k)} \iint_{x_0}^a \int_0^\xi \frac{dq_1}{ds} ds d\xi = 0, \quad (15)$$

$$\frac{2h^3}{3E_3} \frac{dq_1}{dx} + \frac{2h}{G_{13}} \iint_{x_0}^a \int_0^\xi \frac{dq_1}{ds} ds d\xi + \iint_{x_0}^a \sum_{k=1}^2 \left(\delta_{(k)} \frac{du_1^{(k)}}{ds} - H_{(k)} \frac{d^2w^{(k)}}{ds^2} \right) ds d\xi = 0, \quad (16)$$

$$\int_0^a \frac{dq_1}{dx} dx - \tau_1 = 0, \quad (17)$$

$$\frac{\delta_{(k)}}{2h} \int_0^a \left\{ E_3 \sum_{k=1}^2 \delta_{(k)} \left[-w_a^{(k)} + \int_{x_0}^a \frac{d^2 w^{(k)}}{ds^2} ds d\xi \right] \right\} dx + Q_{13}^{(k)} + h\tau_1 = - \int_0^a X_3^{(k)} dx, \quad (18)$$

которую необходимо дополнить алгебраическими уравнениями равновесия стержня (7)–(9).

Если у точки приложения силы T_ζ^+ перемещение W_A в направлении оси z равно нулю, а перемещение в направлении оси ζ равно U_A , то в силу равенств

$$u_1^{(k)} \Big|_{x=a} = \int_0^a \frac{du_1^{(k)}}{dx} dx, \quad W = \zeta_A \varphi, \quad U = U_A - z_A \varphi$$

условия сопряжения (10)–(13) принимают вид

$$\int_0^a \frac{du_1^{(k)}}{dx} dx - U_A + (z_A + \delta_{(k)} H_{(k)}) \varphi = 0, \quad (19)$$

$$w_a^{(k)} - (\zeta_A + B_2^{(+)}) \varphi = 0, \quad (20)$$

$$\int_0^a \frac{d^2 w^{(k)}}{dx} dx + \varphi = 0. \quad (21)$$

Таким образом, для определения введенных в рассмотрение шестнадцати неизвестных из $X \in H^{\times 5} \times R^{\times 11}$ составлена разрешающая система шестнадцати интегро-алгебраических уравнений (14)–(21) и уравнений равновесия стержня (7)–(9), где $H = L_2(0, a)$, a – полудлина пластины.

3. Аппроксимация интегральных уравнений методом коллокаций по гауссовским узлам

Для аппроксимации полученных интегральных уравнений типа Вольтерра будем использовать предложенный в [36, 37] метод коллокаций по гауссовским узлам и способ построения интегрирующих матриц. Введем в рассмотрение интегральные операторы по формулам

$$\mathcal{J}(f) = \int_0^x f(\xi) d\xi, \quad \mathcal{J}^*(f) = \int_x^a f(\xi) d\xi, \quad \mathcal{J}_3(f) = \int_0^a f(\xi) d\xi,$$

которые аппроксимируем конечномерными аналогами в виде интегрирующих матриц J_1, J_2, J_3 соответственно.

С этой целью на отрезке $[0, a]$ введем сетку $\omega = \{x_i, i = 1, 2, \dots, N\}$, соответствующую квадратурной формуле Гаусса

$$J_3(f) = \sum_{i=1}^N d_i f(x_i),$$

где $\{d_i\}, \{x_i\}$ – соответственно веса и узлы коллокаций, связанные с корнями полинома Лежандра степени N .

Обозначим через f_i значение f в узле $x_i : f_i = f(x_i)$ и приблизим f на отрезке $[0, a]$ посредством интерполирующей функции $f(x) \approx \sum_{i=1}^N f_i l_i(x)$. В качестве

интерполирующей функции выбраны базисные функции Лагранжа $\{l_i\}$ по узлам $\{x_i\}$. Таким образом, раскладывая функции l_i по полиномам Лежандра, строятся интегрирующие матрицы J_1, J_2 .

Введем в рассмотрение конечномерные операторы

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_1 &= (\mathcal{I}_{1w}^{(1)}, \mathcal{I}_{1w}^{(2)}, \mathcal{I}_{1u}^{(1)}, \mathcal{I}_{1u}^{(2)}, \mathcal{I}_{1q}^{(1)}) : H_h^{\times 5} \times R^{\times 11} \rightarrow H_h^{\times 5} \\ \mathcal{I}_2 &= (\mathcal{I}_{2w}^{(1)}, \mathcal{I}_{2w}^{(2)}, \mathcal{I}_{2u}^{(1)}, \mathcal{I}_{2u}^{(2)}, \Theta^{\times N}) : H_h^{\times 5} \times R^{\times 11} \rightarrow H_h^{\times 5} \\ \Gamma &= (\Gamma_\tau, \Gamma_{wa}^{(1)}, \Gamma_{wa}^{(2)}) : H_h^{\times 5} \times R^{\times 11} \rightarrow R^{\times 3}, \\ \mathcal{Q} &= (\mathcal{Q}_{11}^{(1)}, \mathcal{Q}_{11}^{(2)}, \mathcal{Q}_{13}^{(1)}, \mathcal{Q}_{13}^{(2)}, \mathcal{L}_{11}^{(1)}, \mathcal{L}_{11}^{(2)}) : H_h^{\times 5} \times R^{\times 11} \rightarrow R^{\times 6}, \\ \mathcal{T}_\zeta &= (\mathcal{M}_s, \mathcal{T}_\zeta) : H_h^{\times 5} \times R^{\times 11} \rightarrow R^{\times 2}\end{aligned}$$

по формулам

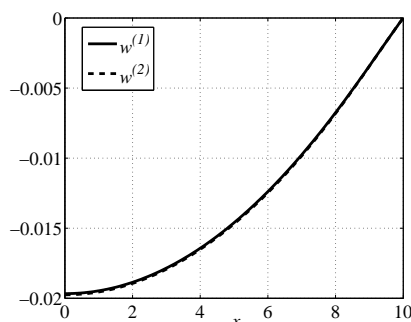
$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{1w}^{(k)} X(x) &= L_{11}^{(k)} + D_{11}^{(k)} w_{,11}^{(k)} + H_{(k)} J_2 J_1 q_{1,1} + \delta_{(k)} J_2 J_1 \frac{E_3}{2h} \left[w_a^{(2)} - w_a^{(1)} - J_2 J_1 (w_{,11}^{(2)} - w_{,11}^{(1)}) \right]; \\ \mathcal{I}_{2w}^{(k)} X(x) &= J_2 T_{11}^{(k)} J_1 w_{,11}^{(k)}; \\ \mathcal{I}_{1u}^{(k)} X(x) &= Q_{11}^{(k)} - B_{11}^{(k)} u_{1,1}^{(k)} + \delta_{(k)} J_2 J_1 q_{1,1}; \\ \mathcal{I}_{2u}^{(k)} X(x) &= -\frac{B_{11}^{(k)}}{2} \left(J_1 w_{,11}^{(k)} \right)^2; \\ \mathcal{I}_{1q} X(x) &= \left(\frac{2h^3}{3E_3} + \frac{2h}{G_{13}} J_2 J_1 \right) q_{1,1} + J_2 J_1 \left(u_{1,1}^{(1)} - u_{1,1}^{(2)} - H_{(1)} w_{,11}^{(1)} - H_{(2)} w_{,11}^{(2)} \right); \\ \Gamma_\tau X(x) &= J_3 q_{1,1} - \tau_1; \\ \Gamma_{wa}^{(k)} X(x) &= \frac{\delta_{(k)}}{2h} J_3 \left\{ E_3 \left[w_a^{(2)} - w_a^{(1)} - J_2 J_1 (w_{,11}^{(2)} - w_{,11}^{(1)}) \right] \right\} + Q_{13}^{(k)} + h\tau_1; \\ \mathcal{Q}_{11}^{(k)} X(x) &= J_3 u_{1,1}^{(k)} - U_A + (z_A + \delta_{(k)} H_{(k)}) \varphi; \\ \mathcal{Q}_{13}^{(k)} X(x) &= w_a^{(k)} - \left(\zeta_A + B_2^{(+)} \right) \varphi; \\ \mathcal{L}_{11}^{(k)} X(x) &= J_3 w_{,11}^{(k)} + \varphi; \\ \mathcal{M}_s X(x) &= \left[L_{11}^{(1)} + L_{11}^{(2)} - Q_{11}^{(1)} H_{(1)} + Q_{11}^{(2)} H_{(2)} + B_2^{(+)} \left(Q_{13}^{(1)} + Q_{13}^{(2)} + 2h\tau_1 \right) \right]; \\ \mathcal{T}_\zeta X(x) &= Q_{11}^{(1)} + Q_{11}^{(2)}.\end{aligned}$$

Тогда сформулированная геометрически нелинейная конечномерная задача может быть представлена в виде

$$A_1 X + A_2(X) = F, \quad (22)$$

где $A_1 = (\mathcal{I}_1, \Gamma, \mathcal{Q}, \mathcal{T}) : H_h^{\times 5} \times R^{\times 11} \rightarrow H_h^{\times 5} \times R^{\times 11}$ – линейный оператор, $A_2 = (\mathcal{I}_2, \Theta^{\times 11}) : H_h^{\times 5} \times R^{\times 11} \rightarrow H_h^{\times 5} \times R^{\times 11}$ – нелинейный оператор; в общем случае правая часть $F(T_\zeta^+, T_z^+, m_s^+, X_3^{(k)})$ принадлежит $H^{\times 5} \times R^{\times 11}$. Для задачи о продольно-поперечном изгибе пластины компоненту внешней погонной нагрузки T_z^+ и погонного момента m_s^+ , приложенных к стержню, и поперечную распределенную нагрузку на пластину $X_3^{(k)}$ положим равными нулю: $T_z^+ = m_s^+ = X_3^{(k)} = 0$. При этом $F = (\Theta^{\times (5N+10)}, T_\zeta^+)$.

Таким образом, для функций, входящих в систему дифференциальных уравнений (1)–(3) со старшей производной порядка $2n$, построена конечномерная схема (22) относительно n -й производной решения краевой задачи. После решения конечномерной задачи (22) решение исходной краевой задачи восстанавливается численным интегрированием при помощи полученных ранее интегрирующих матриц.

Рис. 3. Прогибы срединных поверхностей несущих слоев $w^{(k)}$, см

4. Итерационный метод и численные эксперименты

Для решения задачи (22) будем использовать следующий двухслойный итерационный процесс с опусканием нелинейности на нижний слой [22, 25, 38–41] с предобуславливателем, являющимся линейной частью оператора задачи (22)

$$A_1 \frac{X^{(n+1)} - X^{(n)}}{\tau} + (A_1 + A_2) X^{(n)} = F, \quad (23)$$

где $X^{(0)}$ – заданное начальное приближение, $\tau > 0$ – итерационный параметр.

Для численной реализации итерационного метода (23) задачи (22) о продольно-поперечном изгибе пластины разработан комплекс программ. Численные расчеты проводились при следующих значениях геометрических и жесткостных параметров трехслойной пластины: $2a = 20$ см, $2h_{(1)} = 2h_{(2)} = 0.1$ см, $h = 1$ см, $G_{13} = 25$ МПа, $E_3 = 50$ МПа, $E^{(k)} = 133 \cdot 10^3$ МПа, $\nu_{12}^{(k)} = \nu_{21}^{(k)} = 0.3$, $k = 1, 2$. При проведении расчетов для геометрического параметра стержня принято равенство $z_A = \zeta_A = B_2^{(+)} = h + h_1$ (см. рис. 2), число точек сетки $N = 512$. Вычисления согласно (23) проводились до тех пор, пока норма невязки $\|F - (A_1 + A_2) X^{(n)}\|$ оставалась больше заданной точности $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-8}$. В качестве нормы вектора $g = (g_1, g_2, \dots, g_m)$ выбиралась величина $\|g\| = \max\{|g_1|, |g_2|, \dots, |g_m|\}$. Итерационный параметр подбирался эмпирически. На рис. 3–8 приведены результаты численных экспериментов, направленных на определение параметров напряженно-деформированного состояния пластины при заданном значении погонной нагрузки $T_\zeta^+ = -100$ кН/м. При действии такой нагрузки в торцевом сечении пластины и подкрепляющем стержне формируются параметры напряженно-деформированного состояния, имеющие значения $Q_{11}^{(1)} = 0.062019$ кН/м, $Q_{11}^{(2)} = -100.062$ кН/м, $Q_{13}^{(1)} = 0.11091$ кН/м, $Q_{13}^{(2)} = -0.23413$ кН/м, $L_{11}^{(1)} = 0.63506$ Н, $L_{11}^{(2)} = 0.066734$ Н, $\tau_1 = 0.006161$ МПа, $U_A = -0.0069075$ см, $\varphi = -0.0032962$.

На рис. 3 показаны зависимости функций прогибов точек срединных поверхностей несущих слоев пластины от длины. Видно, что они практически совпадают в силу малости деформаций поперечного обжатия заполнителя в докритическом состоянии пластины. На рис. 4 изображены функции осевых перемещений точек срединных поверхностей несущих слоев. Заметим, что у нижнего слоя они практически равны нулю, а у верхнего слоя изменяются по длине пластины практически по линейному закону.

Из рис. 5 следует, что пластина находится в моментном состоянии ввиду действия на неё сжимающей нагрузки с эксцентриситетом, причем формирующееся

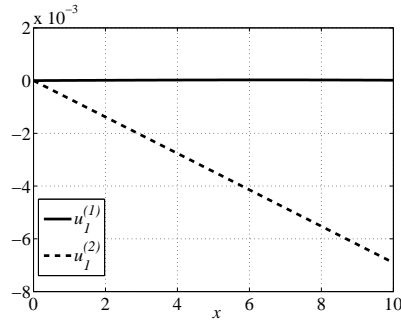


Рис. 4. Осевые перемещения срединных поверхностей несущих слоев $u_1^{(k)}$, см

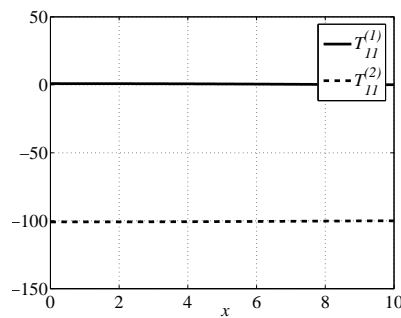


Рис. 5. Мембранные усилия несущих слоев $T_{11}^{(k)}$, кН/м

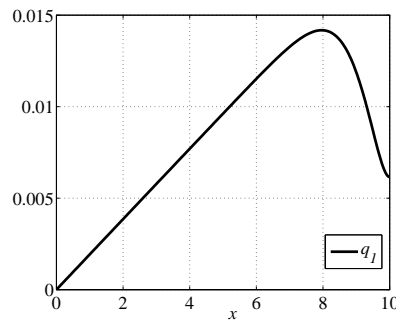
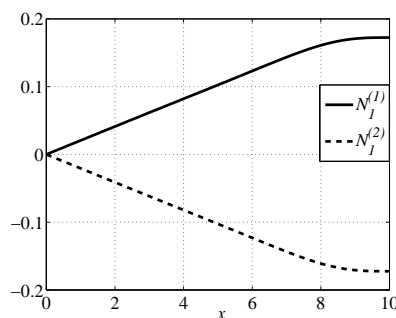
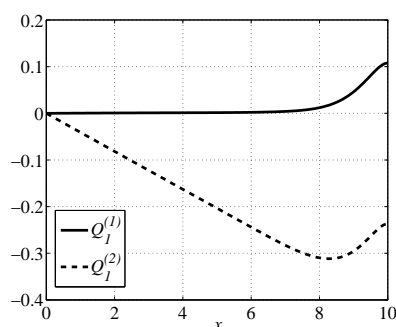


Рис. 6. Поперечные касательные напряжения в заполнителе q_1 , МПа

в первом слое тангенциальное усилие является фактически нулевым, а усилие $T_{11}^{(2)}$ по длине пластины существенно не изменяется.

На рис. 6 показано изменение касательных напряжений в заполнителе по длине пластины. Видно, что в силу действия на стержень сжимающего усилия с эксцентриситетом они не равны нулю по всей длине пластины (в точках соединения заполнителя с подкрепляющим стержнем они должны принимать нулевое значение в случае отсутствия адгезионного слоя) и достигают максимального значения в окрестности торцевого сечения.

На рис. 7 и 8 показаны функции обобщенных перерезывающих сил и перерезывающих сил в несущих слоях. По характеру приведенных кривых можно судить о включении в работу заполнителя и его вкладе в восприятии поперечных касательных напряжений.

Рис. 7. Обобщенные перерезывающие силы несущих слоев $N_I^{(k)}$, кН/мРис. 8. Перерезывающие силы несущих слоев $Q_I^{(k)}$, кН/м

Следует отметить, что описанные выше результаты численных решений сформулированной краевой задачи и задачи, рассмотренной в работах [22–25] для пластины без контурного подкрепляющего стержня, согласуются между собой. Последняя описывается лишь системой пяти дифференциальных уравнений (1)–(3) с постановкой на краях несущих слоев пластины условий шарнирного опирания на абсолютно жесткие в поперечном направлении диафрагмы. Сжатию одного из несущих слоев при этом соответствуют неоднородные граничные условия для тангенциальных усилий, а присутствию на кромках заполнителя диафрагм – однородные граничные условия для касательных напряжений в заполнителе второго рода

$$T_{11}^{(1)} = T_{\zeta}^+ = -100 \frac{\text{кН}}{\text{м}}, \quad T_{11}^{(2)} = w^{(k)} = \frac{d^2 w^{(k)}}{dx^2} = 0, \quad \frac{dq_1}{dx} = 0 \quad \text{при} \quad x_1 = x_1^{\pm}. \quad (24)$$

Введем в рассмотрение вектор-функции перемещений точек срединных поверхностей пластины $U = (w^{(1)}, w^{(2)}, u_1^{(1)}, u_1^{(2)})$, $\tilde{U} = (w^{(1)}, w^{(2)}, u_1^{(1)}, u_1^{(2)})$ по формуле $\mathbf{U}^{(k)} = u_1^{(k)} \mathbf{e}_1 + w^{(k)} \mathbf{m}$, где U – решение задачи с подкрепляющим стержнем (22), а \tilde{U} – решение задачи без подкрепляющего стержня (1)–(3), (24). Для этих двух задач при заданной нагрузке T_{ζ}^+ были получены следующие оценки для приближенных решений: $\Psi = \frac{1}{2} \left\| \frac{U}{\|U\|_h} - \frac{\tilde{U}}{\|\tilde{U}\|_h} \right\|_h = 0.0052$, где в качестве нормы вектора $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ выбиралась величина $\|y\|_h = \max \{|y_1|, |y_2|, \dots, |y_m|\}$. Заметим, что для касательных напряжений в заполнителе такие хорошие оценки решений не получаются. Это обусловлено тем, что при постановке первой задачи для пластины с подкрепляющим стержнем решение последнего уравнения системы (1)–(3) подчиняется граничному условию (13), а при постановке второй задачи для

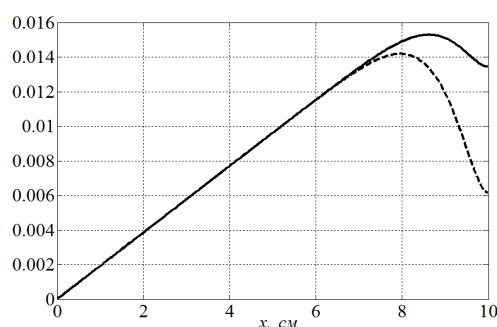


Рис. 9. Поперечные касательные напряжения в заполнителе q_1 , МПа, для двух задач

пластины, имеющей на кромке жесткую и соединенную с заполнителем диафрагму, удовлетворяет последнему граничному условию в (24). На рис. 9 показаны касательные напряжения в заполнителе при постановке двух описанных выше краевых задач: для пластин с подкрепляющим стержнем (пунктирная линия) и без подкрепляющего стержня (сплошная линия). Видно, что у реальных трехслойных пластин наличие подкрепляющего стержня приводит к снижению уровня касательных напряжений в зоне их максимального значения.

Благодарности. Результаты исследований получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России № 9.5762.2017/ВУ, проект № 9.1395.2017/ПЧ (постановка задачи, проведение численных экспериментов и анализ их результатов) и частично за счет гранта Российского научного фонда, проект № 16-11-10299 (разработка численного метода).

Литература

1. *Кобелев В.Н.* Расчет трехслойных конструкций. – М.: Машиностроение, 1984. – 303 с.
2. *Bank L.C.* Composites for Construction: Structural Design with FRP Materials. – New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 2006. – 552 p.
3. *Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N.* On the interaction of composite plate having a vibration-absorbing covering with incident acoustic wave // Russ. Math. – 2015. – V. 59, No 3. – P. 66–71. – doi: 10.3103/S1066369X1503007X.
4. *Frostig Y.* Elastica of sandwich panels with a transversely flexible core – A high-order theory approach // Int. J. Solids Struct. – 2009. – V. 46. – P. 2043–2059. – doi: 10.1016/j.ijsolstr.2008.05.007.
5. *Hollaway L.C.* Polymers, fibres, composites and the civil engineering environment: A personal experience // Adv. Struct. Eng. – 2010. – V. 13, No 5. – P. 927–960. – doi: 10.1260/1369-4332.13.5.927.
6. *Дятченко С.В., Иванов А.П.* Технология изготовления корпусов судов из полимерных композиционных материалов. – Калининград : Изд-во Калинингр. гос. техн. ун-та, 2007. – 156 с.
7. *Прохоров Б.Ф., Кобелев В.Н.* Трехслойные конструкции в судостроении. – Л.: Судостроение, 1972. – 344 с.
8. *Raiciu A.* The advantages of the composite materials used in shipbuilding and marine structure // J. Marine Technol. Environ. – 2012. – V. 1. – P. 99–102.
9. Marine Applications of Advanced Fibre-reinforced Composites / Ed. by J. Graham-Jones, J. Summerscales. – Woodhead Publ., 2015. – 360 p.

10. *Васильев В.В., Добряков А.А., Дудченко А. А.* Основы проектирования и изготовления конструкций летательных аппаратов из композиционных материалов. – М.: МАИ, 1985. – 218 с.
11. *Крысин В.Н.* Слоистые клееные конструкции в самолётостроении. – М.: Машиностроение, 1980. – 232 с.
12. *Павлов Н.А.* Конструкция ракет и космических аппаратов. – М: Машиностроение, 1993. – 148 с.
13. *Mangalgiri P.D.* Composite materials for aerospace applications // Bull. Mater. Sci. – 1999. – V. 22, No 3. – P. 657–664. – doi: 10.1007/BF02749982.
14. *Bowwet C.* Mechanics of Aeronautical Composite Materials. – N. Y.: John Wiley & Sons, Inc., 2017. – 309 p.
15. *Григолюк Э.И., Чулков П.П.* Устойчивость и колебания трехслойных оболочек. – М: Машиностроение, 1973. – 168 с.
16. *Болотин В.В., Новичков Ю.Н.* Механика многослойных конструкций. – М: Машиностроение, 1980. – 375 с.
17. *Григолюк Э.И., Коган Ф.А.* Современное состояние теории многослойных оболочек // Прикл. механика. – 1972. – Т. 8, № 6. – С. 5–17.
18. *Noor A. K., Burton W.S., Bert Ch.W.* Computational models for sandwich panels and shells // Appl. Mech. Rev. – 1996. – V. 49. – P. 155–199.
19. *Паймушин В.Н.* Нелинейная теория среднего изгиба трехслойных оболочек с дефектами в виде участков непрочлея // Прикл. механика. – 1987. – № 11. – С. 32–38.
20. *Иванов В.А., Паймушин В.Н.* Уточненная теория устойчивости трехслойных конструкций (нелинейные уравнения докритического равновесия оболочек с трансверсально-мягким наполнителем) // Изв. вузов. Матем. – 1994. – № 11. – С. 29–42.
21. *Paimushin V.N., Bobrov S.N.* Refined geometric nonlinear theory of sandwich shells with a transversely soft core of medium thickness for investigation of mixed buckling forms // Mech. Compos. Mater. – 2000. – V. 36, No 1. – P. 59–66.
22. *Badriev I.B., Banderov V.V., Makarov M.V., Paimushin V.N.* Determination of stress-strain state of geometrically nonlinear sandwich plate // Appl. Math. Sci. – 2015. – V. 9, No 78. – P. 3887–3895. – doi: 10.12988/ams.2015.54354.
23. *Badriev I.B., Banderov V.V., Garipova G.Z., Makarov M.V., Shagidullin R.R.* On the solvability of geometrically nonlinear problem of sandwich plate theory // Appl. Math. Sci. – 2015. – V. 9, No 82. – P. 4095–4102. – doi: 10.12988/ams.2015.54358.
24. *Badriev I.B., Garipova G.Z., Makarov M.V., Paimushin V.N.* Numerical solution of the issue about geometrically nonlinear behavior of sandwich plate with transversal soft filler // Res. J. Appl. Sci. – 2015. – V. 10, N. 8. – P. 428–435. – doi: 10.3923/rjasci.2015.428.435.
25. *Бадриев И.Б., Макаров М.В., Паймушин В.Н.* Геометрически нелинейная задача о продольно-поперечном изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким наполнителем // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2016. – Т. 158, кн. 4. – С. 453–468.
26. *Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N.* Solvability of physically and geometrically nonlinear problem of the theory of sandwich plates with transversally-soft core // Russ. Math. – 2015. – V. 59, No 10. – P. 57–60. – doi: 10.3103/S1066369X15100072.
27. *Badriev I.B., Garipova G.Z., Makarov M.V., Paimushin V.N., Khabibullin R.F.* Solving physically nonlinear equilibrium problems for sandwich plates with a transversally soft core // Lobachevskii J. Math. – 2015. – V. 369, No 4. – P. 474–481. – doi: 10.1134/S1995080215040216.

28. *Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N.* Numerical investigation of physically nonlinear problem of sandwich plate bending // Proc. Eng. – 2016. – V. 150. – P. 1050–1055. – doi: 10.1016/j.proeng.2016.07.213.
29. *Бадриев И.Б., Макаров М.В., Паймушин В.Н.* Численное исследование физически нелинейной задачи о продольном изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким наполнителем // Вестн. Перм. нац. исслед. политехн. ун-та. Механика. – 2017. – № 1. – С. 39–51. – doi: 10.15593/perm.mech/2017.1.03.
30. *Paimushin V.N.* Theory of moderately large deflections of sandwich shells having a transversely soft core and reinforced along their contour // Mech. Compos. Mater. – 2017. – V. 53, No 1. – P. 1–16. – doi: 10.1007/s11029-017-9636-1.
31. *Paimushin V.N.* Contact formulation of non-linear problems in the mechanics of shells with their end sections connected by a plane curvilinear rod // J. Appl. Math. Mech. – 2014. – V. 78, No 1. – P. 84–89. – doi: 10.1016/j.jappmathmech.2014.05.010.
32. *Lukankin S.A., Paimushin V.N., Kholmogorov S.A.* Non-classical forms of loss stability of cylindrical shells joined by a stiffening ring for certain forms of loading // J. Appl. Math. Mech. – 2014. – V. 78, No 4. – P. 395–408. – doi: 10.1016/j.jappmathmech.2014.12.011.
33. *Паймушин В.Н.* К вариационным методам решения пространственных задач сопряжения деформируемых тел // Докл. АН СССР. – 1983. – Т. 273, № 5. – С. 1083–1086.
34. *Карчевский М.М., Ляшко А.Д.* Разностные схемы для нелинейных задач математической физики. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1976. – 156 с.
35. *Samarskii A.A.* The theory of difference schemes. – N. Y.; Basel: Marcel Dekker, Inc, 2001. – 761 p.
36. *Даутов Р.З., Паймушин В.Н.* О методе интегрирующих матриц решения краевых задач для обыкновенных уравнений четвертого порядка // Изв. вузов. Матем. – 1996. – № 10. – С. 13–25.
37. *Даутов Р.З., Карчевский М.М., Паймушин В.Н.* К методу интегрирующих матриц для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Изв. вузов. Матем. – 2003. – № 7. – С. 18–26.
38. *Карчевский М.М.* Итерационные схемы для уравнений с монотонными операторами // Изв. вузов. Матем. – 1971. – № 5. – С. 32–37.
39. *Badriev I.B., Karchevskii M.M.* Convergence of an iterative process in a Banach space // J. Math. Sci. – 1994. – V. 71, No 6. – P. 2727–2735. – doi: 10.1007/BF02110578.
40. *Макаров М.В., Бадриев И.Б., Паймушин В.Н.* Нелинейные задачи о смешанных формах потери устойчивости трехслойных пластин при продольно-поперечном изгибе // Вестн. Тамб. ун-та. Сер. Естеств. и техн. науки. – 2015. – Т. 20, № 5. – С. 1275–1278.
41. *Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Макаров М.В., Паймушин В.Н.* Решение нелинейных задач теории многослойных оболочек с трансверсально-мягким наполнителем // Сеточные методы для краевых задач и приложения: Материалы Десятой Междунар. конф. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2014. – С. 103–107.

Поступила в редакцию
24.03.17

Бадриев Ильдар Бурханович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной математики

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: ildar.badriev1@mail.ru

Макаров Максим Викторович, ассистент кафедры анализа данных и исследования операций

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: *makarovmaksim@mail.ru*

Паймушин Виталий Николаевич, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник; профессор кафедры прочности конструкций

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
Казанский национальный исследовательский технический университет имени А.Н. Туполева
ул. К. Маркса, д. 10, г. Казань, 420111, Россия
E-mail: *vpajmushin@mail.ru*

ISSN 2541-7746 (Print)

ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2017, vol. 159, no. 2, pp. 174–190

**Longitudinal and Transverse Bending
on the Cylindrical Shape of a Sandwich Plate Reinforced
with Absolutely Rigid Bodies in the Front Sections**

I.B. Badriev^{a}, M.V. Makarov^{a**}, V.N. Paimushin^{b***}*

^a*Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia*

^b*Tupolev Kazan National Research Technical University, Kazan, 420111 Russia*

E-mail: **ildar.badriev1@mail.ru,*

***makarovmaksim@mail.ru, ***vpajmushin@mail.ru*

Received April 11, 2016

Abstract

A geometrically nonlinear problem of longitudinal and transverse bending on the cylindrical shape of a sandwich plate with transversally soft core reinforced in the front sections by absolutely rigid bodies intended to ensure the transfer of load to the carrier layers when they interact with other structural elements has been considered. The equations of the refined geometrically nonlinear theory, which allow one to describe the process of their precritical deformation and to reveal all possible buckling forms of the carrier layers (in-phase, antiphase, mixed bending and mixed bending-shear, and also arbitrary, including all of the above) have been used. These equations have been derived by introducing the contact forces of the interaction of the outer layers with the filler, as well as those of the outer layers and the filler with the reinforcing bodies at all points of the surfaces of their conjugation, as unknown parameters. A numerical method for solving the formulated problem has been developed. The method has been constructed by preliminary reduction of the problem to a system of integro-algebraic equations solved with the help of the finite-sum method. A method has been developed for studying the precritical geometrically nonlinear behavior of the plate as a result of its front compression through a reinforcing body. The results of the numerical experiments have been presented and analyzed.

Keywords: sandwich plate, transversely soft core, contour reinforcing body, middle plate bending, refined model of core, contact stresses, integro-algebraic equations, finite sums method, geometrically nonlinear deformation, precritical behavior

Acknowledgments. The study was performed as part of the state task of the Ministry of Education of the Russian Federation (task no. 9.5762.2017/VU, project no. 9.1395.2017/PCh (setting objectives, performing numerical experiments and analyzing their results) and partially supported by the Russian Science Foundation (project no. 16-11-10299 (numerical method development)).

Figure Captions

- Fig. 1. Sandwich plate: loading (a) and fixing (b) schemes.
 Fig. 2. Sandwich plate with contour reinforcing beams.
 Fig. 3. Deflections of the middle surfaces of the carrier layers $w^{(k)}$, cm.
 Fig. 4. Axial displacements of the middle surfaces of the carrier layers $u_1^{(k)}$, cm.
 Fig. 5. Membrane forces of the carrier layers $T_{11}^{(k)}$, kN/m.
 Fig. 6. Transverse tangential stresses in the core q_1 , MPa.
 Fig. 7. Generalized shear forces of the carrier layers $N_1^{(k)}$, kN/m.
 Fig. 8. Shear forces of the carrier layers $Q_1^{(k)}$, kN/m.
 Fig. 9. Transverse tangential stresses in the core q_1 , MPa, for two problems.

References

1. Kobelev V.N. Calculation of Sandwich Structures. Moscow, Mashinostroenie, 1984. 303 p. (In Russian)
2. Bank L.C. Composites for Construction: Structural Design with FRP Materials. New Jersey, John Wiley & Sons, Inc., 2006. 552 p.
3. Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N. On the interaction of composite plate having a vibration-absorbing covering with incident acoustic wave. *Russ. Math.*, 2015, vol. 59, no. 3, pp. 66–71. doi: 10.3103/S1066369X1503007X.
4. Frostig Y. Elastica of sandwich panels with a transversely flexible core – A high-order theory approach. *Int. J. Solids Struct.*, 2009, vol. 46, pp. 2043–2059. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2008.05.007.
5. Hollaway L.C. Polymers, fibres, composites and the civil engineering environment: A personal experience. *Adv. Struct. Eng.*, 2010, vol. 13, no. 5, pp. 927–960. doi: 10.1260/1369-4332.13.5.927.
6. Dyatchenko S.V., Ivanov A.P. A Technology for Manufacturing Ship Hulls out of Polymer Composites. Kaliningrad, Izd. Kaliningr. Tekh. Univ., 2007. 156 p. (In Russian)
7. Prokhorov B.F., Kobelev V.N. Sandwich Constructions in Shipbuilding. Leningrad, Sudostroenie, 1972. 344 p. (In Russian)
8. Raicu A. The advantages of the composite materials used in shipbuilding and marine structure. *J. Mar. Technol. Environ.*, 2012, vol. 1, pp. 99–102.
9. Marine Applications of Advanced Fibre-Reinforced Composites. Graham-Jones J., Summerscales J. (Eds.). Woodhead Publ., 2015. 360 p.
10. Vasil'ev V.V., Dobryakov A.A., Dudchenko A.A. Fundamentals of the Planning and Production of Aircraft Structures Made of Composite Materials. Moscow, MAI, 1985. 218 p. (In Russian)

11. Krysin V.N. Layered Laminated Constructions in Aircraft Engineering. Moscow, Mashinostroenie, 1980. 232 p. (In Russian)
12. Pavlov N.A. Constructions of Rockets and Space Vehicles. Moscow, Mashinostroenie, 1993. 149 p. (In Russian)
13. Mangalgi P.D. Composite materials for aerospace applications. *Bull. Mater. Sci.*, 1999, vol. 22, no. 3, pp. 657–664. doi: 10.1007/BF02749982.
14. Bouvet C. Mechanics of Aeronautical Composite Materials. New York, John Wiley & Sons, Inc., 2017. 309 p.
15. Grigolyuk E.I., Chulkov P.P. Stability and Vibrations of Sandwich Shells. Moscow, Mashinostroenie, 1973. 168 p. (In Russian)
16. Bolotin V.V., Novichkov Y.N. Mechanics of Multilayered Structures. Moscow, Mashinostroenie, 1980. 375 p. (In Russian)
17. Grigolyuk E.I., Kogan F.A. Present state of the theory of multilayered shells. *Prikl. Mekh.*, 1972, vol. 8, no. 6, pp. 5–17. (In Russian)
18. Noor A.K., Burton W.S., Bert Ch.W. Computational models for sandwich panels and shells. *Appl. Mech. Rev.*, 1996, vol. 49, pp. 155–199.
19. Paimushin V.N. Nonlinear theory of the central bending of three-layer shells with defects in the form of sections of bonding failure. *Sov. Appl. Mech.*, 1987, vol. 23, no. 11, pp. 1038–1043.
20. Ivanov V.A., Paimushin V.N. An improved theory of the stability of three-layer structures (non-linear equations for the subcritical equilibrium of shells with a transversely soft filler). *Russ. Math.*, 1994, vol. 38, no. 11, pp. 26–39.
21. Paimushin V.N., Bobrov S.N. Refined geometric nonlinear theory of sandwich shells with a transversely soft core of medium thickness for investigation of mixed buckling forms. *Mech. Compos. Mater.*, 2000, vol. 36, no. 1, pp. 59–66.
22. Badriev I.B., Banderov V.V., Makarov M.V., Paimushin V.N. Determination of stress-strain state of geometrically nonlinear sandwich plate. *Appl. Math. Sci.*, 2015, vol. 9, no. 78, pp. 3887–3895. doi: 10.12988/ams.2015.54354.
23. Badriev I.B., Banderov V.V., Garipova G.Z., Makarov M.V., Shagidullin R.R. On the solvability of geometrically nonlinear problem of sandwich plate theory. *Appl. Math. Sci.*, 2015, vol. 9, no. 82, pp. 4095–4102. doi: 10.12988/ams.2015.54358.
24. Badriev I.B., Garipova G.Z., Makarov M.V., Paimushin V.N. Numerical solution of the issue about geometrically nonlinear behavior of sandwich plate with transversal soft filler. *Res. J. Appl. Sci.*, 2015, vol. 10, no. 8, pp. 428–435. doi: 10.3923/rjasci.2015.428.435.
25. Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N. Geometrically nonlinear problem of longitudinal and transverse bending of a sandwich plate with transversally soft core. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2016, vol. 158, no. 4, pp. 453–468. (In Russian)
26. Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N. Solvability of physically and geometrically nonlinear problem of the theory of sandwich plates with transversally-soft core. *Russ. Math.*, 2015, vol. 59, no. 10, pp. 57–60. doi: 10.3103/S1066369X15100072.
27. Badriev I.B., Garipova G.Z., Makarov M.V., Paimushin V.N., Khabibullin R.F. Solving physically nonlinear equilibrium problems for sandwich plates with a transversally soft core. *Lobachevskii J. Math.*, 2015, vol. 369, no. 4, pp. 474–481. doi: 10.1134/S1995080215040216.

28. Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N. Numerical investigation of physically non-linear problem of sandwich plate bending. *Proc. Eng.*, 2016, vol. 150, pp. 1050–1055. doi: 10.1016/j.proeng.2016.07.213.
29. Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N. Numerical investigation of a physically nonlinear problem of longitudinal bending of sandwich plate with transversal-soft core. *PNRPU Mech. Bull.*, 2017, no. 1, pp. 39–51. doi: 10.15593/perm.mech/2017.1.03.
30. Paimushin V.N. Theory of moderately large deflections of sandwich shells having a transversely soft core and reinforced along their contour. *Mech. Compos. Mater.*, 2017, vol. 53, no. 1, pp. 1–16. doi: 10.1007/s11029-017-9636-1.
31. Paimushin V.N. Contact formulation of non-linear problems in the mechanics of shells with their end sections connected by a plane curvilinear rod. *J. Appl. Math. Mech.*, 2014, vol. 78, no. 1, pp. 84–89. doi: 10.1016/j.jappmathmech.2014.05.010.
32. Lukankin S.A., Paimushin V.N., Kholmogorov S.A. Non-classical forms of loss stability of cylindrical shells joined by a stiffening ring for certain forms of loading. *J. Appl. Math. Mech.*, 2014, vol. 78, no. 4, pp. 395–408. doi: 10.1016/j.jappmathmech.2014.12.011.
33. Paimushin V.N. Variational methods for solving non-linear spatial problems of the joining of deformable bodies. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1983, vol. 273, no. 5, pp. 1083–1086. (In Russian)
34. Karchevskii M.M., Lyashko A.D. Difference Schemes for Nonlinear Problems of Mathematical Physics. Kazan, Izd. Kazan. Univ., 1976. 156 p. (In Russian)
35. Samarskii A.A. The Theory of Difference Schemes. New York, Basel, Marcel Dekker Inc., 2001. 761 p.
36. Dautov R.Z., Paimushin V.N. On the method of integrating matrices for the solution of boundary value problems for fourth-order ordinary equations. *Russ. Math.*, 1996, vol. 40, no. 10, pp. 11–23.
37. Dautov R.Z., Karchevskii M.M., Paimushin V.N. On the method of integrating matrices for systems of ordinary differential equations. *Russ. Math.*, 2003, vol. 47, no. 7, pp. 16–24.
38. Karchevskii M.M. Iteration schemes for equations with monotone operators, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Mat.*, 1971, no. 5, pp. 32–37. (In Russian)
39. Badriev I.B., Karchevskii M.M. Convergence of an iterative process in a Banach space. *J. Math. Sci.*, 1994, vol. 71, no. 6, pp. 2727–2735. doi: 10.1007/BF02110578.
40. Makarov M.V., Badriev I.B., Paimushin V.N. Nonlinear problems on mixed buckling of sandwich plates under longitudinal and transverse bending. *Vestn. Tambov. Univ., Ser. Est. Tekh. Nauki*, 2015, vol. 20, no. 5, pp. 1275–1278. (In Russian)
41. Badriev I.B., Banderov V.V., Makarov M.V., Paimushin V.N. On the solvability of nonlinear problems within the theory of sandwich shells with a transversely soft filler. *Setochnye metody dlya kraevykh zadach i prilozheniya: Materialy Desyatoi Mezhdunar. konf. [Mesh Methods for Boundary-Value Problems and Applications: Proc. 10th Int. Conf.]*. Kazan, Izd. Kazan. Univ., 2014, pp. 103–107. (In Russian)

⟨ **Для цитирования:** Бадриев И.Б., Макаров М.В., Паймушин В.Н. Продольно-поперечный изгиб по цилиндрической форме трехслойной пластины, подкрепленной в торцевых сечениях абсолютно твердыми телами // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2017. – Т. 159, кн. 2. – С. 174–190. ⟩

⟨ **For citation:** Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N. Longitudinal and transverse bending on the cylindrical shape of a sandwich plate reinforced with absolutely rigid bodies in the front sections. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2017, vol. 159, no. 2, pp. 174–190. (In Russian) ⟩