УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 152, кн. 4 Физико-математические науки *2010*

УДК 519.63+517.958:532

ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ФИЛЬТРАЦИИ В МНОГОСЛОЙНЫХ ПЛАСТАХ ПРИ НАЛИЧИИ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА

И.Б. Бадриев, Б.Я. Фанюк

Аннотация

Работа посвящена решению стационарных задач фильтрации несжимаемой жидкости, следующей нелинейному многозначному закону фильтрации с предельным градиентом в многослойном пласте при наличии точечного источника. Задача фильтрации сформулирована в виде смешанного вариационного неравенства с обратно сильно монотонным оператором в гильбертовом пространстве. Для решения вариационного неравенства предлагается использовать итерационный метод расщепления. В отличие от ранее рассматривавшихся предложенный метод позволяет находить не только приближенные значения давления жидкости, но и скорости фильтрации, в частности, на множествах, соответствующих точкам многозначности в законе фильтрации. Исследована сходимость метода.

Ключевые слова: теория подземной фильтрации, многослойный пласт, точечный источник, обратно сильно монотонный оператор, итерационный процесс.

1. Введение

В работе рассматривается установившийся процесс фильтрации несжимаемой жидкости с эффективным многозначным законом в многослойном пласте при наличии точечного источника, моделирующего скважину. Требуется определить поля давления и скорости фильтрации, удовлетворяющие уравнению неразрывности и смешанным граничным условиям. Предполагается, что функция, определяющая закон фильтрации, имеет линейный рост на бесконечности.

Обобщенная постановка задачи фильтрации сформулирована в виде вариационного неравенства относительно давления – функции из $\overset{\circ}{W}{}_1^{(1)}(\Omega)$, где Ω – область фильтрации. Затем введена вспомогательная задача с правой частью, задаваемой дельта-функцией. Для вспомогательной задачи известно решение в явном виде. Благодаря этому обобщенная постановка свелась к нахождению решения смешанного вариационного неравенства с обратно сильно монотонным оператором [1] в гильбертовом пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(\Omega)$. Функционал, входящий в это вариационное неравенство, является суммой нескольких полунепрерывных снизу, выпуклых, собственных, вообще говоря, недифференцируемых функционалов. Установлены свойства оператора, входящего в это уравнение: обратная сильная монотонность, коэрцитивность, что дало возможность применить для доказательства теоремы существования известные результаты теории монотонных операторов (см., например, [2]).

Отметим, что исходная задача сформулирована относительно полей давления и скорости фильтрации, в то время как обобщенная задача – относительно поля давления. Тем не менее установлено существование поля скоростей фильтрации, построенного согласно многозначному закону по решению вариационного

неравенства, удовлетворяющего уравнению неразрывности. При этом остается открытым вопрос о построении указанного поля скоростей фильтрации на множествах, соответствующих точкам многозначности в законе фильтрации.

Для решения вариационного неравенства предложен итерационный метод расщепления, не требующий обращения исходного оператора. Ранее (см. [3, 4]) для решения вариационных неравенств второго рода предлагался метод расщепления. Основная трудность при его реализации состояла в решении возникающей на каждом шаге метода задачи минимизации. В случае однослойного пласта (когда в вариационном неравенстве присутствует лишь один недифференцируемый функционал) эта задача минимизации была решена в [4] в явном виде благодаря тому, что удалось вычислить субдифференциал функционала, сопряженного к минимизируемому. Этот прием был применен и для рассматриваемой в настоящей работе задачи. При этом каждый шаг итерационного процесса сводится фактически к обращению оператора Лапласа.

Исследование сходимости итерационного процесса удалось провести благодаря сведению его к методу последовательных приближений для отыскания неподвижной точки некоторого оператора (оператора перехода). Получена связь решения исходного вариационного неравенства с компонентами неподвижной точки этого оператора перехода. Доказано, что оператор перехода является нерастягивающим, сверх того получено неравенство, более сильное, чем неравенство нерастягиваемости. Установлено также, что оператор перехода является асимптотически регулярным. Это и позволило доказать слабую сходимость последовательных приближений.

Следует отметить, что предложенный метод позволяет находить приближенные значения не только самого решения, но и его характеристик, для задач фильтрации – это приближенные значения градиента решения, а также приближенные значения скоростей фильтрации на множествах, соответствующих точкам многозначности в законе фильтрации, что весьма полезно с практической точки зрения.

Отметим, что к рассматриваемой задаче фильтрации сводится задача об определении границ целиков остаточной вязкопластичной нефти в многослойных пластах (см., например, [5]).

2. Постановка задачи

Рассматривается установившийся процесс фильтрации несжимаемой жидкости в пористой среде. Фильтрация происходит в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, с липшиц-непрерывной границей $\Gamma = \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2$ $(\Gamma_1 \bigcap \Gamma_2 = \emptyset,\ \operatorname{mes}\Gamma_1 > 0)$ при наличии точечного источника интенсивности q в точке $x^* \in \Omega$ и прочих внешних источников, плотность которых характеризуется функцией $\widetilde{f}$. Считаем, что на Γ_1 давление равно нулю, на Γ_2 задано условие непротекания.

Необходимо найти стационарные поля давления u и скорости v жидкости, удовлетворяющие уравнению неразрывности

$$\operatorname{div} v(x) = q\,\delta(x - x^*) + \widetilde{f}(x), \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

где δ – дельта-функция Дирака, и граничным условиям

$$u(x) = 0, \quad x \in \Gamma_1, \quad (v, \mathbf{n}) = 0, \quad x \in \Gamma_2. \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{n}$ – единичный вектор внешней нормали к Γ_2, в предположении, что жидкость подчиняется многозначному закону фильтрации (см., например, [6, 7])

$$-v(x) \in \frac{g(|\nabla u(x)|)}{|\nabla u(x)|}\,\nabla u(x), \quad x \in \Omega. \tag{3}$$

Считаем, что многозначная функция g может быть представлена в виде

$$g(\xi) = g_0(\xi) + \sum_{j=1}^{m} \vartheta_j H(\xi - \beta_j), \quad \xi \in \mathbb{R}^1,$$

где β_j (предельный градиент) и ϑ_j – заданные неотрицательные константы, g_0 – однозначная функция такая, что

$$g_0(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi < \beta, \\ g^*(\xi - \beta), & \xi \geqslant \beta, \end{cases} \tag{4}$$

g^* – непрерывная неубывающая функция, H – функция Хевисайда:

$$H(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi < 0; \\ [\,0, 1\,], & \xi = 0; \\ 1, & \xi > 0. \end{cases} \tag{5}$$

Введем функцию μ по формуле

$$\mu(\zeta) = \begin{cases} 0, & \zeta < 0; \\ \zeta, & \zeta \geqslant 0. \end{cases} \tag{6}$$

Очевидно, что множество $H(\xi)$ является в точке ξ субдифференциалом функции μ, то есть

$$\mu(\zeta) - \mu(\xi) \geqslant \xi^*(\zeta - \xi) \quad \forall\, \xi^* \in H(\xi), \quad \forall\, \zeta \in \mathbb{R}^1. \tag{7}$$

Относительно функции $g^* : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^1$ предполагаются выполненными условия

$$g^*(0) = 0, \quad g^*(\xi) > g^*(\zeta) \quad \forall\, \xi > \zeta \geqslant 0, \tag{8}$$

существуют такие постоянные $k > 0$, $\xi^* \geqslant 0$, что

$$g^*(\xi^*) \geqslant k\xi^*, \quad g^*(\xi) - g^*(\zeta) \geqslant k(\xi - \zeta) \quad \forall\, \xi \geqslant \zeta \geqslant \xi^*, \tag{9}$$

существует такая постоянная $L > 0$, что

$$|\, g^*(\xi) - g^*(\zeta)\,| \leqslant L\,|\,\xi - \zeta\,| \quad \forall\, \xi, \zeta \geqslant 0. \tag{10}$$

Отметим, что к задаче (1)–(3) сводится задача об определении границ целиков остаточной вязкопластичной нефти в многослойных пластах (см. [5, с. 135])

Определим по функции g оператор $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ следующим образом:

$$G(y) = \begin{cases} \dfrac{g_0(|y|)}{|y|}\, y, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Перейдем теперь к вариационной формулировке задачи (1)–(3). Пусть u и v – решение этой задачи. Соотношение (3) означает, что

$$v(x) = -g_0(|\nabla u(x)|)\, \frac{\nabla u(x)}{|\nabla u(x)|} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\theta_j(x)}{|\nabla u(x)|}\, \nabla u(x) = -G(\nabla u(x)) - \sum_{j=1}^{m} \frac{\theta_j(x)}{|\nabla u(x)|}\, \nabla u(x),$$

где

$$\theta_j(x) \in \vartheta_j\, H(|\nabla u(x)| - \beta_j), \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Пусть

$$C^{\infty}_{\Gamma_1}(\Omega) = \Big\{ \eta \in C^{\infty}(\Omega) : \eta(x) = 0, \quad x \in \Gamma_1 \Big\}.$$

Поскольку

$$-\int\limits_{\Omega} \operatorname{div} v(x)\eta(x)\, dx = \int\limits_{\Omega} \delta(x - x^*)\eta(x)\, dx + \int\limits_{\Omega} \widetilde{f}(x)\, \eta(x)\, dx \; =$$

$$= \; q\, \eta(x^*) + \int\limits_{\Omega} \widetilde{f}(x)\, \eta(x)\, dx \quad \forall\, \eta \in C^{\infty}_{\Gamma_1}(\Omega), \quad (12)$$

то с учетом (2), (11) по аналогии с [8, 9] имеем, что

$$q\, \eta(x^*) + \int\limits_{\Omega} \widetilde{f}(x)\eta(x)\, dx \leqslant \int\limits_{\Omega} \big(G(\nabla u(x)), \nabla\eta(x) \big)\, dx \; +$$

$$+ \; \sum_{j=1}^{m} \vartheta_j \int\limits_{\Omega} \Big[\mu(|\nabla(\eta(x) + u(x))| - \beta_j) - \mu(|\nabla u(x)| - \beta_j) \Big]\, dx \; =$$

$$= \int\limits_{\Omega} \big(G(\nabla u(x)), \nabla\eta(x) \big)\, dx + \sum_{j=1}^{m} F_j(\eta + u) - \sum_{j=1}^{m} F_j(u) \quad \forall\, \eta \in C^{\infty}_{\Gamma_1}(\Omega), \quad (13)$$

где

$$F_j(\eta) = \vartheta_j \int\limits_{\Omega} \mu(|\nabla\eta(x)| - \beta_j)\, dx. \quad (14)$$

Таким образом, мы установили, что если функции u, v удовлетворяют соотношениям (1)–(3), то u удовлетворяет неравенству (13). В связи с этим приведем следующую вариационную формулировку рассматриваемой задачи фильтрации.

Под решением стационарной задачи фильтрации несжимаемой жидкости, подчиняющейся многозначному закону фильтрации с предельным градиентом при наличии точечного источника интенсивности q, будем понимать функцию (поле давления) $u \in V_1 = \Big\{ \eta \in W^{(1)}_1(\Omega) : \eta(x) = 0,\ x \in \Gamma_1 \Big\}$, являющуюся решением вариационного неравенства

$$\int\limits_{\Omega} \big(G(\nabla u(x)), \nabla\eta(x) \big)\, dx + \sum_{j=1}^{m} F_j(\eta + u) - \sum_{j=1}^{m} F_j(u) \; \geqslant$$

$$\geqslant \; q\, \eta(x^*) + \int\limits_{\Omega} \widetilde{f}(x)\, \eta(x)\, dx \quad \forall\, \eta \in C^{\infty}_{\Gamma_1}(\Omega). \quad (15)$$

Ниже будет доказана теорема существования решения u вариационного неравенства (15), а также установлено существование поля скорости v, построенного по u согласно (3) и такого, что при достаточной гладкости v функции u и v являются решением задачи (1), (2).

3. Существование обобщенного решения

При исследовании разрешимости вариационного неравенства (15) нам потребуется следующая вспомогательная задача: найти функцию $w_r \in \overset{\circ}{W}{}_1^{(1)}(B_r)$ такую, что

$$\int\limits_{B_r} \big(G(\nabla w_r(x)), \nabla\eta(x) \big)\, dx = q\,\eta(x^*) \quad \forall\, \eta \in C_0^\infty(B_r), \tag{16}$$

где $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x^*| < r\}$,

Запишем в соответствии с [10, 11] явное выражение для решения задачи (16). Для этого введем обратную к g^* функцию h^*. Из условий (8)–(10) следует, что такая функция существует и является непрерывной. Определим теперь функцию

$$h(\xi) = h^*(\xi) + \xi^*, \tag{17}$$

а также функцию $p_r : (0, r] \to \mathbb{R}^1$ в следующем виде

$$p_r(s) = \int\limits_s^r h\Big(\frac{q}{\sigma_1\, \xi^{n-1}} \Big)\, d\xi, \quad \sigma_1 = \operatorname{mes} S_1, \quad S_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x^*| = 1\}\,. \tag{18}$$

Тогда функция $w_r : B_r \to \mathbb{R}^1$, задаваемая выражением $w_r(x) = p_r(|x - x^*|)$, является решением задачи (16). При этом справедлива оценка

$$|\nabla w_r(x)| \leqslant \frac{q}{\sigma_1 k |x - x^*|^{n-1}} + 2\,\xi^*. \tag{19}$$

Выберем r достаточно большим так, чтобы выполнялось включение $\Omega \subseteq B_r$. Поскольку точка x^* является внутренней для Ω, то найдется такое $\varepsilon > 0$, что $\Gamma \subset \subset B_r \setminus B_\varepsilon$. Из неравенства (19) следует, что $w_r \in W_2^{(1)}(B_r \setminus B_\varepsilon)$, и, таким образом, найдется функция $w_\Gamma \in W_2^{(1)}(\Omega)$, для которой выполнено условие

$$w_\Gamma(x) = -w_r(x), \quad x \in \Gamma_1. \tag{20}$$

Введем пространства $Y = \big[L_2(\Omega)\big]^n$, $V = \Big\{\eta \in W_2^{(1)}(\Omega) : \eta(x) = 0,\, x \in \Gamma_1 \Big\}$.

Решение задачи (15) будем искать в виде $u = w_r + w_\Gamma + w$, где $w \in V$ – неизвестная функция. Поскольку $C^\infty_{\Gamma_1}(\Omega) \subseteq C_0^\infty(B_r)$, то с учетом (16) задача (15) сводится к следующей: найти функцию $w \in V$ такую, что

$$\int\limits_\Omega (G(\nabla(w_r + w_\Gamma + w)) - G(\nabla w_r), \nabla(w + \eta) - \nabla w)\, dx +$$

$$+ \sum_{j=1}^m F_j(w_r + w_\Gamma + w + \eta) - \sum_{j=1}^m F_j(w_r + w_\Gamma + w) \;\geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_\Omega \widetilde{f}(x)\, \eta(x)\, dx \quad \forall\, \eta \in C^\infty_{\Gamma_1}(\Omega). \tag{21}$$

Введем теперь функционал $\Psi_j : V \to \mathbb{R}^1$:

$$\Psi_j(\xi) = \vartheta_j \int\limits_\Omega \mu(|\nabla w_r + \nabla w_\Gamma + \xi| - \beta_j)\, dx, \tag{22}$$

оператор $\Lambda : V \to \big[L_1(\Omega)\big]^n$:

$$\Lambda u = \nabla u, \tag{23}$$

элемент $f \in V$:

$$(f, \eta)_V = \int\limits_\Omega \widetilde{f}(x)\, \eta(x)\, dx \quad \forall\, \eta \in V$$

и форму $a : V \times V \to \mathbb{R}^1$:

$$a(w, \eta) = \int\limits_\Omega (G(\nabla w_r + \nabla w_\Gamma + \nabla w) - G(\nabla w_r), \nabla \eta)\, dx \quad w, \eta \in V. \tag{24}$$

В [11] доказано, что форма a непрерывна и линейна по второму аргументу, следовательно, она порождает оператор $A : V \to V$:

$$(Aw, \eta)_V = a(w, \eta) \quad \forall\, w, \eta \in V. \tag{25}$$

В работе [11] доказана

Лемма 1. *Пусть выполнены условия* (8)–(10). *Тогда оператор A, определенный с помощью* (25), *является обратно сильно монотонным с константой* $1/L > 0$ *и коэрцитивным.*

Задача (21) запишется в виде вариационного неравенства

$$(Aw - f, \eta - w)_V + \sum_{j=1}^m \Psi_j(\Lambda \eta) - \sum_{j=1}^m \Psi_j(\Lambda w) \geqslant 0 \quad \forall\, \eta \in V\,. \tag{26}$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (8)–(10). *Тогда:*
1) *задача* (26) *имеет по крайней мере одно решение* w;
2) *множество решений задачи* (26) *выпукло и замкнуто в* V;

Доказательство. Следуя [8], нетрудно проверить, что функционалы Ψ_j являются липшиц-непрерывными, выпуклыми, а значит, слабо полунепрерывными снизу. Из леммы 1 вытекает монотонность, липшиц-непрерывность, следовательно, псевдомонотонность (см. предложение 2.5 [2, с. 191]) и коэрцитивность оператора T. Поэтому существование решения вариационного неравенства (26) следует из теоремы 8.5 [2, с. 265].

Выпуклость и замкнутость множества решений задачи (26), следовательно, и задачи (21) устанавливаются стандартным образом.

□

Лемма 2. *Пусть даны функции* $\xi, \zeta : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *и* $\varphi : [0; +\infty) \to [0; +\infty)$ *такая, что* $\varphi(x) = 0$ *при* $x \leqslant \alpha$ *и* $\varphi(x)x$ *возрастает при* $x > \alpha$.

Определим функцию $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$H(p, q) = \big(\varphi(|p|)p - \varphi(|q|)q, p - q\big)$$

и пусть $H\big(\xi(x), \zeta(x)\big) = 0$ *при* $x \in \Omega^* \subset \Omega$.

Тогда для любого $\beta \geqslant \alpha$

$$\{x \in \Omega^* : |\xi(x)| > \beta\} = \{x \in \Omega^* : |\zeta(x)| > \beta\}. \tag{27}$$

Доказательство. Используя лемму 1 из [13], имеем:
Если $|\xi(x)| > \beta \geqslant \alpha$, то $\xi(x) = \zeta(x)$. Тогда $|\zeta(x)| = |\xi(x)| > \beta$;
Если $\alpha < |\xi(x)| \leqslant \beta$, то $\xi(x) = \zeta(x)$. Тогда $|\zeta(x)| = |\xi(x)| \leqslant \beta$;
Если $|\xi(x)| \leqslant \alpha$, то $|\zeta(x)| \leqslant \alpha \leqslant \beta$.
Равенство (27) доказано. □

Теорема 2. *Для любых решений w_1, w_2 задачи* (26) *справедливы соотношения*

$$G(\nabla(w_r + w_\Gamma + w_1)) = G(\nabla(w_r + w_\Gamma + w_2)) \text{ почти всюду,} \tag{28}$$

$$\Omega^+{}_j(u_1) = \Omega^+{}_j(u_2) = \Omega^* \quad \text{с точностью до множества нулевой меры,} \tag{29}$$

где

$$\Omega^+{}_j(\eta) = \{x \in \Omega : \ |\nabla\eta(x)| > \beta_j\}, \quad j = 1, 2, \ldots, m;$$
$$u_i = w_r + w_\Gamma + w_i, \quad i = 1, 2.$$

Доказательство. Пусть w_1 и w_2 – два решения задачи (26), то есть

$$(Aw_1 - f, \eta - w_1)_V + \sum_{j=1}^{m} \Psi_j(\Lambda\eta) - \sum_{j=1}^{m} \Psi_j(\Lambda w_1) \geqslant 0 \quad \forall\, \eta \in V,$$

$$(Aw_2 - f, \eta - w_2)_V + \sum_{j=1}^{m} \Psi_j(\Lambda\eta) - \sum_{j=1}^{m} \Psi_j(\Lambda w_2) \geqslant 0 \quad \forall\, \eta \in V.$$

Полагая $\eta = w_2$ в первом из этих неравенств и $\eta = w_1$ во втором, а затем складывая, получаем: $(Aw_2 - Aw_1, w_2 - w_1)_V \leqslant 0$, откуда в силу монотонности оператора A следует, что что $(Aw_2 - Aw_1, w_2 - w_1)_V = 0$.

Следуя [12], нетрудно проверить, что при выполнении условий (8)–(10) оператор G, определенный формулой (11), удовлетворяет условию

$$|Gy - Gz|^2 \leqslant L\,(Gy - Gz, y - z) \quad \forall\, y, z \in \mathbb{R}^n. \tag{30}$$

С учетом (30) имеем, что

$$0 = \int\limits_\Omega \Big(G(\nabla w_r + \nabla w_\Gamma + \nabla w_2) - G(\nabla w_r + \nabla w_\Gamma + \nabla w_1), \nabla w_2 - \nabla w_1\Big)\, dx \ \geqslant$$
$$\geqslant \ \frac{1}{L} \int\limits_\Omega \Big|\, G(\nabla(w_r + w_\Gamma + w_2)) - G(\nabla(w_r + w_\Gamma + w_1))\,\Big|^2 dx, \tag{31}$$

откуда немедленно следует (28).

В силу первой части леммы 1 [13]

$$\Big(G(\nabla w_r + \nabla w_\Gamma + \nabla w_2) - G(\nabla w_r + \nabla w_\Gamma + \nabla w_1), \nabla w_2 - \nabla w_1\Big) \geqslant 0.$$

С учетом (31) получаем, что почти всюду

$$\Big(G(\nabla w_r + \nabla w_\Gamma + \nabla w_2) - G(\nabla w_r + \nabla w_\Gamma + \nabla w_1), \nabla w_2 - \nabla w_1\Big) = 0.$$

В силу леммы 2 получаем (29). □

Теорема 3. *Пусть w – решение задачи* (21), *w_r – решение задачи* (16), *w_Γ – произвольная функция из $W_2^{(1)}(\Omega)$, удовлетворяющая соотношению* (20), *$u = w_r + w_\Gamma + w$. Тогда существует функция v такая, что имеют место соотношения* (3) *и*

$$\int\limits_\Omega \widetilde{f}(x)\,\eta(x)\,dx + q\,\eta(x^*) = \int\limits_\Omega (v(x), \nabla\eta(x))\,dx \quad \forall\,\eta \in C_0^\infty(\Omega).$$

Доказательство. Неравенство (26) эквивалентно включению

$$f - Aw \in \partial \sum_{j=1}^m \big(\Phi_j(\Lambda w)\big).$$

В силу леммы 3 [13] функционал Φ_j всюду непрерывен, значит

$$\partial\big(\Phi_j(\Lambda w)\big) = \Lambda^* \partial\Phi_j(\Lambda w).$$

Пользуясь представлением $\partial\Phi_j$, данным в той же лемме, получаем

$$f - Aw = \sum_{j=1}^m \Lambda^*\left(\frac{\theta_j \nabla u}{|\nabla u|}\right)$$

$$\int\limits_\Omega \widetilde{f}\,\eta\,dx - \int\limits_\Omega \big(G(\nabla w_r + \nabla w_\Gamma + \nabla w - G(\nabla w_r), \nabla\eta\big)\,dx \;=$$

$$= \sum_{j=1}^m \int\limits_\Omega \left(\frac{\theta_j \nabla u}{|\nabla u|}\right) dx \quad \forall\eta \in C_{\Gamma_1}^\infty(\Omega),$$

что с учетом (16) приводит к равенству

$$\int\limits_\Omega \left(\frac{g_0(|\nabla u(x)|) + \sum_{j=1}^m \theta_j(x)}{|\nabla u(x)|}\nabla u(x), \nabla\eta(x)\right) dx \;=$$

$$= \int\limits_\Omega \big(q\delta(x - x^*) + \widetilde{f}(x)\big)\,\eta(x)\,dx \quad \forall\eta \in C_{\Gamma_1}^\infty(\Omega),$$

из которого и следует требуемый результат, причем

$$v(x) = -\frac{g_0(|\nabla u(x)|) + \sum_{j=1}^m \theta_j(x)}{}|\nabla u(x)|\nabla u(x).$$

□

4. Итерационный метод

В настоящем параграфе мы строим итерационный метод для решения абстрактного смешанного вариационного неравенства с обратно сильно монотонным оператором, частным случаем которого является вариационное неравенство (26).

Пусть V, Y – гильбертовы пространства, $\Lambda : V \to Y$ – линейный непрерывный оператор такой, что

$$\Lambda^*\Lambda = Id_V, \tag{32}$$

$P_j : Y \to \mathbb{R}^1$, $j = 1, 2, \ldots, m$, – собственные выпуклые полунепрерывные снизу функционалы, $A : V \to V$ – обратно сильно монотонный оператор, $f \in V$ – заданный элемент.

Ищем решение вариационного неравенства

$$\big(Au - f,\ \eta - u\big)_V + \sum_{j=1}^{m} P_j(\Lambda\eta) - \sum_{j=1}^{m} P_j(\Lambda u) \geqslant 0 \quad \forall\, \eta \in V. \tag{33}$$

Введем пространство $Q = V \times Y^m \times Y^m$. Для его элементов будем использовать запись $(q_1, q_{21}, \ldots, q_{2m}, q_{31}, \ldots, q_{3m})$.

Зададим произвольно набор чисел:

$$\tau > 0, \tag{34}$$

$$r_j > 0. \tag{35}$$

Решение вариационного неравенства (33) будем искать с помощью итерационного процесса. Его оператор перехода $T : Q \to Q$ зададим равенствами:

$$\begin{cases} T_1 q = q_1 - \tau\big(Aq_1 - f + \Lambda^* \sum_{j=1}^m q_{3j} + \sum_{j=1}^m r_j\,(q_1 - \Lambda^* q_{2j})\big); \\ T_{2j}\, q = \mathrm{Prox}_{\{P_j/r_j\}}\left(\Lambda T_1 q + {r_j}^{-1} q_{3j}\right), \quad j = 1, 2, \ldots, m; \\ T_{3j}\, q = q_{3j} + r_j\,(\Lambda T_1 q - T_{2j}\, q)\,, \quad j = 1, 2, \ldots, m. \end{cases}$$

Здесь $\mathrm{Prox}_\Psi : Y \to Y$ – проксимальное отображение ([15, с. 48]), которое ставит в соответствие вектору $p \in Y$ элемент $\mathrm{Prox} = P_\Psi(p)$, являющийся решением вариационного неравенства

$$(w - p, s - w)_Y + \Psi(s) - \Psi(w) \geq 0 \qquad \forall\, s \in Y. \tag{36}$$

Нетрудно проверить, что (ср. с Предложением 2.1 [16, с. 285]) проксимальное отображение является жестко нерастягивающим, то есть

$$\|\,\mathrm{Prox}_\Psi(p) - \mathrm{Prox}_\Psi(s)\,\|_Y^2 \leq (\,\mathrm{Prox}_\Psi(p) - \mathrm{Prox}_\Psi(s)\,, p - s\,)_Y \qquad \forall\, p, s \in Y. \tag{37}$$

Теорема 4. *Точка $q = (u, y_j, \lambda_j)$ является неподвижной точкой оператора T тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

$$Au - f + \Lambda^* \sum_{j=1}^{m} \lambda_j = 0; \tag{38}$$

$$\lambda_j \in \partial P_j(\Lambda u), \quad j = 1, 2, \ldots, m; \tag{39}$$

$$y_j = \Lambda u, \quad j = 1, 2, \ldots, m. \tag{40}$$

Доказательство. Пусть $q = (u, y_1, \ldots, y_m, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ – неподвижная точка оператора T, то есть:

$$u = u - \tau\big(Au - f + \Lambda^* \sum_{j=1}^{m} \lambda_j + \sum_{j=1}^{m} r_j\,(u - \Lambda^* y_j)\big); \tag{41}$$

$$y_j = \mathrm{Prox}_{\{P_j/r_j\}}\left(\Lambda u + {r_j}^{-1}\lambda_j\right), \quad j = 1, 2, \ldots, m; \tag{42}$$

$$\lambda_j = \lambda_j + r_j\,(\Lambda u - y_j)\,, \quad j = 1, 2, \ldots, m. \tag{43}$$

Равенство (43) в силу (35) эквивалентно (40).

Равенство (41) в силу (34) преобразуется сначала к виду

$$Au - f + \Lambda^* \sum_{j=1}^{m} \lambda_j + \sum_{j=1}^{m} r_j \left(u - \Lambda^* y_j\right) = 0,$$

затем в силу (32) к виду

$$Au - f + \Lambda^* \Big(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j + \sum_{j=1}^{m} r_j \left(\Lambda u - y_j\right) \Big) = 0,$$

откуда с учетом (40) получим (38), значит, (41) эквивалентно (38).

Равенства (42) запишем в виде вариационных неравенств:

$$\big(y_j - \Lambda u - {r_j}^{-1} \lambda_j,\ z - y_j\big)_Y + {r_j}^{-1} \left(P_j(z) - P_j(y_j)\right) \geqslant 0 \quad \forall\, z \in Y,$$

откуда, применив (40) и умножив на r_j, получим

$$\big(-\lambda_j,\ z - \Lambda u\big)_Y + P_j(z) - P_j(\Lambda u) \geqslant 0 \quad \forall\, z \in Y,$$

что в терминах субдифференциального исчисления записывается в виде (39).

Таким образом, (42) эквивалентно (39). □

Следствие 1. *Если точка* $q = (u, y_1, \ldots, y_m, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ *является неподвижной точкой оператора* T, *то компонента* u *есть решение вариационного неравенства* (33).

Доказательство. В силу теоремы 4 имеем, что справедливы соотношения (38), (39). Из (38), очевидно, следует, что

$$\big(Au - f + \Lambda^* \sum_{j=1}^{m} \lambda_j,\ \eta - u\big)_Y = 0 \quad \forall\, \eta \in Y. \tag{44}$$

Положив в (39) $z = \Lambda\eta$, получим

$$\big(-\lambda_j,\ L\eta - \Lambda u\big)_Y + P_j(\Lambda\eta) - P_j(\Lambda u) \geqslant 0 \quad \forall\, \eta \in Y.$$

К первому слагаемому правой части применим определение сопряженного оператора:

$$\big(-\Lambda^* \lambda_j,\ \eta - u\big)_Y + \left(P_j(\Lambda\eta) - P_j(\Lambda u)\right) \geqslant 0 \quad \forall\, \eta \in Y. \tag{45}$$

Складывая (44), (45), получим, что u удовлетворяет неравенству (33). □

Следствие 2. *Пусть существует решение вариационного неравенства* (33) *и выполнено условие:*

$$\exists\, \widetilde{y} \in \bigcap_{k=1}^{m} \operatorname{dom} G_k : \quad \lim_{y \to \widetilde{y}} P_j(y) = P_j(\widetilde{y}), \quad j = 1, 2, \ldots, m. \tag{46}$$

Тогда существует неподвижная точка оператора T.

Доказательство. Пусть u – решение (33). Неравенство (33) можно записать в виде включения:

$$f - Au \in \partial\Big(\sum_{j=1}^{m} P_j\, \Lambda \Big)(u).$$

В силу (46) выполнены условия теорем о субдифференцировании сложной функции и суммы функций [15, с. 35–37, предложения 5.6, 5.7], следовательно,

$$\partial\Big(\sum_{j=1}^{m} P_j\,\Lambda\Big)(u) = \sum_{j=1}^{m} \partial\,(P_j\,\Lambda)\,(u) = \sum_{j=1}^{m} \Lambda^*\partial P_j\,(\Lambda u) = \Lambda^* \sum_{j=1}^{m} \partial P_j\,(\Lambda u).$$

Итак, найдутся $\lambda_j \in \partial P_j\,(\Lambda u)$ такие, что

$$f - Au = \Lambda^* \sum_{j=1}^{m} \lambda_j,$$

следовательно, выполнены условия (38), (39).

Определим y_j по формуле (40).

По теореме 4 получаем, что точка $(u, y_1, \ldots, y_m, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ есть неподвижная точка оператора T. □

Теорема 5. *Пусть $A : V \to V$ – обратно сильно монотонный оператор с константой $\sigma > 0$:*

$$\big(Au - Av,\, u - v\big)_V \geqslant \big\|Au - Av\big\|_V^2 \quad \forall\, u, v \in V. \tag{47}$$

Тогда выполняется следующее неравенство:

$$\begin{aligned}
&\big(\tau^{-1} - \sum_{j=1}^{m} r_j\big)\big\|T_1 q - T_1 p\big\|^2 + \sum_{j=1}^{m} r_j \big\|T_{2j}\, q - T_{2j}\, p\big\|^2 + \sum_{j=1}^{m} {r_j}^{-1} \big\|T_{3j}\, q - T_{3j}\, p\big\|^2 + \\
&\quad + \ \delta\,(Aq_1 - Ap_1,\ q_1 - p_1) + \frac{1}{\tau\varepsilon}\big\|(Sq_1 - Sp_1) - \varepsilon\,(T_1 q - T_1 p)\big\|^2 + \\
&1mm] + \ \sum_{j=1}^{m} r_j \big\|(q_{2j} - \Lambda T_1 q) - (p_{2j} - \Lambda T_1 p)\big\|^2 \leqslant \big(\tau^{-1} - \sum_{j=1}^{m} r_j\big)\big\|q_1 - p_1\big\|^2 + \\
&\qquad + \ \sum_{j=1}^{m} r_j \big\|q_{2j} - p_{2j}\big\|^2 + \sum_{j=1}^{m} {r_j}^{-1} \big\|q_{3j} - p_{3j}\big\|^2.
\end{aligned} \tag{48}$$

Здесь константы ε, δ и оператор $S : V \to V$ определяются по формулам:

$$\varepsilon = 1 - \tau \sum_{j=1}^{m} r_j, \tag{49}$$

$$\delta = 2 - \frac{\tau}{\sigma\big(1 - \tau \sum_{j=1}^{m} r_j\big)}, \tag{50}$$

$$S\eta = \Big(1 - \tau \sum_{j=1}^{m} r_j\Big)\eta - \tau\,(A\eta - f)\,. \tag{51}$$

Доказательство. Оператор T_1 можно записать в виде:

$$T_1 q = Sq_1 - \tau\Lambda^*\Big(\sum_{j=1}^{m} (q_{3j} - r_j\, q_{2j})\Big).$$

Используя неравенство (47), получим:

$$\|Sq_1 - Sp_1\|^2 = \Big(1 - \tau\sum_{j=1}^{m} r_j\Big)^2 \| q_1 - p_1 \|^2 - 2\tau\Big(1 - \tau\sum_{j=1}^{m} r_j\Big)\big(Aq_1 - Ap_1,\ q_1 - p_1\big) +$$

$$+\ \tau^2\|Aq_1 - Ap_1\|^2 \leqslant \Big(1 - \tau\sum_{j=1}^{m} r_j\Big)^2 \| q_1 - p_1 \|^2 -$$

$$-\ \tau\Big(2 - 2\tau\sum_{j=1}^{m} r_j - \frac{\tau}{\sigma}\Big)\big(Aq_1 - Ap_1,\ q_1 - p_1\big). \quad (52)$$

Нетрудно проверить, что справедливо тождество

$$\big(a, b\big)_V = \frac{1}{2\varepsilon}\|a\|_V^2 - \frac{1}{2\varepsilon}\|a - \varepsilon b\|_V^2 + \frac{\varepsilon}{2}\|b\|_V^2, \quad a,\, b \in V, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}. \quad (53)$$

Используя тождество (53) и оценку (52), получим:

$$\big(T_1q - T_1p,\ Sq_1 - Sp_1\big) = \frac{1}{2\varepsilon}\| Sq_1 - Sp_1 \|^2 + \frac{\varepsilon}{2}\| T_1q - T_1p \|^2 -$$

$$-\ \frac{1}{2\varepsilon}\|(Sq_1 - Sp_1) - \varepsilon\,(T_1q - T_1p)\|^2 \leqslant \frac{1}{2\varepsilon}\Big(1 - \tau\sum_{j=1}^{m} r_j\Big)^2 \| q_1 - p_1 \|^2 -$$

$$-\ \frac{\tau}{2\varepsilon}\Big(2 - 2\tau\sum_{j=1}^{m} r_j - \frac{\tau}{\sigma}\Big)\,(Aq_1 - Ap_1, q_1 - p_1)\ +$$

$$+\ \frac{\varepsilon}{2}\| T_1q - T_1p \|^2 - \frac{1}{2\varepsilon}\|(Sq_1 - Sp_1) - \varepsilon\,(T_1q - T_1p)\|^2\ =$$

$$=\ \frac{1}{2}\big(1 - \tau\sum_{j=1}^{m} r_j\big)\| q_1 - p_1 \|^2 - \frac{\tau\delta}{2}\big(Aq_1 - Ap_1,\, q_1 - p_1\big) +$$

$$+\frac{1}{2}\big(1 - \tau\sum_{j=1}^{m} r_j\big)\| T_1q - T_1p \|^2 - \frac{1}{2\varepsilon}\|(Sq_1 - Sp_1) - \varepsilon\,(T_1q - T_1p)\|^2,$$

откуда имеем:

$$\| T_1q - T_1p \|^2 = \Big(T_1q - T_1p,\, (Sq_1 - Sp_1) - \tau\Lambda^*\big(\sum_{j=1}^{m}(q_{3j} - p_{3j}) - \sum_{j=1}^{m} r_j\,(q_{2j} - p_{2j})\big)\Big)\ =$$

$$=\ (T_1q - T_1p, Sq_1 - Sp_1) - \tau\sum_{j=1}^{m}\left(\Lambda\left(T_1q - T_1p\right), q_{3j} - p_{3j}\right)\ +$$

$$+\ \tau\sum_{j=1}^{m} r_j\left(\Lambda\left(T_1q - T_1p\right), q_{2j} - p_{2j}\right)\ \leqslant$$

$$\leqslant\ \frac{1}{2}\Big(1 - \tau\sum_{j=1}^{m} r_j\Big)\| q_1 - p_1 \|^2 - \frac{\tau\delta}{2}\,(Aq_1 - Ap_1, q_1 - p_1)\ +$$

$$+\ \frac{1}{2}\Big(1 - \tau\sum_{j=1}^{m} r_j\Big)\| T_1q - T_1p \|^2 - \frac{1}{2\varepsilon}\|(Sq_1 - Sp_1) - \varepsilon\,(T_1q - T_1p)\|^2\ -$$

$$- \quad \tau \sum_{j=1}^{m} \left(\Lambda \left(T_1 q - T_1 p\right), q_{3j} - p_{3j}\right) \quad + \quad \tau \sum_{j=1}^{m} r_j \left(\Lambda \left(T_1 q - T_1 p\right), q_{2j} - p_{2j}\right).$$

Умножим это неравенство на $2/\tau$ и применим (53) с $\varepsilon = 1$, $a = q_2 - p_2$, $b = \Lambda\left(T_1 q - T_1 p\right)$:

$$\frac{2}{\tau}\left\|T_1 q - T_1 p\right\|^2 \leqslant \Big(\frac{1}{\tau} - \sum_{j=1}^{m} r_j\Big)\left\|q_1 - p_1\right\|^2 - \delta\left(Aq_1 - Ap_1, q_1 - p_1\right) +$$

$$+ \Big(\frac{1}{\tau} - \sum_{j=1}^{m} r_j\Big)\left\|T_1 q - T_1 p\right\|^2 - \frac{1}{\tau\varepsilon}\left\|(Sq_1 - Sp_1) - \varepsilon\left(T_1 q - T_1 p\right)\right\|^2 -$$

$$- \; 2\sum_{j=1}^{m}\left(L\left(T_1 q - T_1 p\right), q_{3j} - p_{3j}\right) + 2\sum_{j=1}^{m} r_j\left(L\left(T_1 q - T_1 p\right), q_{2j} - p_{2j}\right) =$$

$$= \Big(\frac{1}{\tau} - \sum_{j=1}^{m} r_j\Big)\left\| q_1 - p_1 \right\|^2 - \delta\left(Aq_1 - Ap_1, q_1 - p_1\right) +$$

$$+ \Big(\frac{1}{\tau} - \sum_{j=1}^{m} r_j\Big)\left\| T_1 q - T_1 p \right\|^2 - \frac{1}{\tau\varepsilon}\left\|(Sq_1 - Sp_1) - \varepsilon\left(T_1 q - T_1 p\right)\right\|^2 -$$

$$- \; 2\sum_{j=1}^{m}\left(\Lambda\left(T_1 q - T_1 p\right), q_{3j} - p_{3j}\right) - \sum_{j=1}^{m} r_j\left\|(q_{2j} - \Lambda T_1 q) - (p_{2j} - \Lambda T_1 p)\right\|^2 +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} r_j\left\|q_{2j} - p_{2j}\right\|^2 + \sum_{j=1}^{m} r_j\left\|T_1 q - T_1 p\right\|^2. \quad (54)$$

После несложных преобразований из (4.) получаем, что

$$\frac{1}{\tau}\left\| T_1 q - T_1 p \right\|^2 + \delta\left(Aq_1 - Ap_1, q_1 - p_1\right) + \frac{1}{\tau\varepsilon}\left\|(Sq_1 - Sp_1) - \varepsilon\left(T_1 q - T_1 p\right)\right\|^2 +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} r_j\left\|(q_{2j} - \Lambda T_1 q) - (p_{2j} - \Lambda T_1 p)\right\|^2 \leqslant \Big(\frac{1}{\tau} - \sum_{j=1}^{m} r_j\Big)\left\|q_1 - p_1\right\|^2 + \sum_{j=1}^{m} r_j\left\|(q_{2j} - p_{2j})\right\|^2 -$$

$$- \; 2\sum_{j=1}^{m}\left(\Lambda\left(T_1 q - T_1 p\right), q_{3j} - p_{3j}\right). \quad (55)$$

Проксимальное отображение является жестко нерастягивающим, поэтому:

$$r_j\left\|T_{2j}\, q - T_{2j}\, p\right\|^2 \leqslant r_j\left(\Lambda\left(T_1 q - T_1 p\right), T_{2j}\, q - T_{2j}\, p\right) + \left(q_{3j} - p_{3j}, T_{2j} q - T_{2j} p\right). \quad (56)$$

Наконец, из определения оператора T_{3j} следует, что

$$r_j{}^{-1}\left\|T_{3j} q - T_{3j} p\right\|^2 = r_j{}^{-1}\left\| q_{3j} - p_{3j} \right\|^2 + 2\left(q_{3j} - p_{3j}, \Lambda\left(T_1 q - T_1 p\right)\right) -$$

$$- \; 2\left(q_{3j} - p_{3j}, T_{2j}\, q - T_{2j}\, p\right) + r_j\left\|\Lambda\left(T_1 q - T_1 p\right)\right\|^2 -$$

$$- \; 2r_j\left(\Lambda\left(T_1 q - T_1 p\right), T_{2j}\, q - T_{2j}\, p\right) + \left\| T_{2j}\, q - T_{2j}\, p \right\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \; r_j{}^{-1}\left\| q_{3j} - p_{3j} \right\|^2 + 2\left(q_{3j} - p_{3j}, \Lambda\left(T_1 q - T_1 p\right)\right) -$$

$$- (q_{3j} - p_{3j}, T_{2j}\, q - T_{2j}\, p) + r_j \| T_1 q - T_1 p \|^2 - \\ - \; r_j \left(\Lambda \left(T_1 q - T_1 p\right), T_{2j}\, q - T_{2j}\, p\right). \quad (57)$$

Суммируя теперь (55)–(57), получим (48). □

Пусть теперь $\varepsilon > 0$, где ε задается формулой (49).

Введем в пространстве $Q = V \times Y^n \times Y^n$ скалярное произведение по формуле:

$$\big(q, p\big)_Q = \Big(\frac{1}{\tau} - \sum_{j=1}^{m} r_j\Big)\big(q_1, p_1\big)_V + \sum_{j=1}^{m} r_j \big(q_{2j}, p_{2j}\big)_Y + \sum_{j=1}^{m} r_j^{-1} \big(q_{3j}, p_{3j}\big)_Y.$$

Используя это определение, запишем неравенство (48) в виде:

$$\| Tq - Tp \|_Q^2 + \delta \left(Aq_1 - Ap_1, q_1 - p_1\right)_V + \frac{1}{\tau\varepsilon} \big\| (Sq_1 - Sp_1) - \varepsilon \left(T_1 q - T_1 p\right) \big\|_V^2 + \\ + \sum_{j=1}^{m} r_j \big\| (q_{2j} - \Lambda T_1 q) - (p_{2j} - \Lambda T_1 p) \big\|_Y^2 \leqslant \| q - p \|_Q^2. \quad (58)$$

Следствие 3. *Если в условиях теоремы* 5 *справедливо неравенство* $\delta > 0$, *то оператор* T *является жестко нерастягивающим.*

Теорема 6. *Пусть существует решение вариационного неравенства* (33), *выполнены условия* (46), (47), *а также*

$$\varepsilon > 0, \quad \delta > 0,$$

где ε, δ *определены формулами* (49), (50).

Пусть последовательность $\left\{q^{(k)}\right\}_{k=0}^{\infty}$ *построена по формуле* $q^{(k+1)} = Tq^{(k)}$, *где* $q^{(0)} \in Q$ *– произвольный элемент. Тогда эта последовательность слабо сходится в* Q, *ее предел является неподвижной точкой оператора* T *и справедливы неравенства:*

$$\lim_{k\to\infty} \big\| y^{(k)} - \Lambda u^{(k)} \big\|_Y = 0, \quad (59)$$

$$\lim_{k\to\infty} \big\| q^{(k+1)} - q^{(k)} \big\|_Y = 0. \quad (60)$$

Доказательство. Пусть p – неподвижная точка оператора T, которая существует в силу следствия 2. Тогда $p_1 = Tp$, и в силу теоремы 4 справедливы равенства $p_{2j} - \Lambda Tp = p_{2j} - \Lambda p_1 = 0$. В силу теоремы 5 имеем неравенство (58). Подставив в него $q = q^{(k)}$, получим:

$$\| q^{(k+1)} - p \|_Q^2 + \delta \Big(Au^{(k)} - Ap_1, u^{(k)} - p_1\Big)_V + \\ + \frac{1}{\tau\varepsilon} \big\| \varepsilon\big(u^{(k)} - u^{(k+1)}\big) - \tau\big(Au^{(k)} - Ap_1\big) \big\|_V^2 + \\ + \sum_{j=1}^{m} r_j \| y_j^{(k)} - \Lambda u^{(k+1)} \|_Y^2 \leqslant \| q^{(k)} - p \|_Q^2. \quad (61)$$

Последовательность $\Big\{ \| q^{(k)} - p \|_Q \Big\}_{k=1}^{\infty}$ ограничена снизу нулем и в силу (61) не возрастает, поэтому имеет конечный предел, следовательно, из (61) имеем, что

$$\lim_{k\to\infty} \big(Au^{(k)} - Ap_1, u^{(k)} - p_1\big)_V = 0, \quad (62)$$

$$\lim_{k\to\infty}\left\| \varepsilon\big(u^{(k)}-u^{(k+1)}\big)-\tau\big(Au^{(k)}-Ap_1\big)\right\|_V=0, \tag{63}$$

$$\lim_{k\to\infty}\left\| y_j^{(k)}-\Lambda u^{(k+1)}\right\|_Y=0. \tag{64}$$

Из (62), (47) следует:

$$\lim_{k\to\infty}\left\| Au^{(k)}-Ap_1\right\|_V=0. \tag{65}$$

Из (63), (65) получаем, что

$$\lim_{k\to\infty}\left\| u^{(k)}-u^{(k+1)}\right\|_V=0. \tag{66}$$

В силу неравенства треугольника:

$$\left\| y_j^{(k)}-\Lambda u^{(k)}\right\|_Y\leqslant\left\| y_j^{(k)}-\Lambda u^{(k+1)}\right\|_Y+\left\| \Lambda\big(u^{(k)}-u^{(k+1)}\big)\right\|_Y.$$

Из этого неравенства, а также из (64), (66) и (32) получаем (59).

Из (59), (66) с учетом равенства

$$y_j^{(k)}-y_j^{(k+1)}=\big(y_j^{(k)}-\Lambda u^{(k)}\big)+\big(\Lambda u^{(k)}-\Lambda u^{(k+1)}\big)+\big(\Lambda u^{(k+1)}-y_j^{(k+1)}\big)$$

следует, что

$$\lim_{k\to\infty}\left\| y_j^{(k)}-y_j^{(k+1)}\right\|_Y=0. \tag{67}$$

Наконец, используя (59) и определение компоненты T_{3j} оператора T, имеем:

$$\lim_{k\to\infty}\left\| \lambda^{(k+1)}-\lambda^{(k)}\right\|_Y=r\lim_{k\to\infty}\left\| \Lambda u^{(k)}-y_j^{(k)}\right\|_Y=0. \tag{68}$$

Равенства (66)–(68) означают, что выполнено условие (60), и поскольку $q^{(0)}$ – произвольный элемент, то оператор T является асимптотически регулярным. Кроме того, так как в силу следствия 2 оператор T является жестко-нерастягивающим, то в силу теоремы 2 последовательность $\{q^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ слабо сходится в Q и ее предел является неподвижной точкой оператора T. □

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 08-01-00676, 09-01-00814).

Summary

I.B. Badriev, B.Ya. Fanyuk. Iterative Method for Solving Seepage Problems in Multilayer Beds in the Presence of a Point Source.

The paper is devoted to solving the stationary seepage problems of non-compressible fluid following the nonlinear multi-valued filtration law with limiting gradient in multilayer beds in the presence of a point source. This problem is mathematically formulated in the form of mixed variational inequality with inversely strongly monotone operator in Hilbert space. For the solving of the considered variational inequality the iterative splitting method is offered. Unlike the previously considered methods, this one makes it possible to find not only the pressure of the fluid, but also the filtration velocity in the domains corresponding to the multi-valued points in the filtration law. The convergence of the iterative method results is investigated.

Key words: seepage theory, multilayer bed, point source, inversely strongly monotone operator, iterative process.

Литература

1. *Гольштейн Е.Г., Третьяков Н.В.* Модифицированные функции Лагранжа. – М.: Наука, 1989. – 400 с.
2. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 588 с.
3. *Бадриев И.Б., Задворнов О.А.* Методы декомпозиции для решения вариационных неравенств второго рода с обратно сильно монотонными операторами // Дифференц. уравнения. – 2003. – Т. 39, № 7. – С. 888–895.
4. *Бадриев И.Б., Задворнов О.А.* Постановка и исследование нелинейных задач фильтрации при наличии точечных источников // Дифференц. уравнения. – 2008. – Т. 44, № 7. – С. 932–941.
5. *Ентов В.М., Панков В.Н., Панько С.В.* Математическая теория целиков остаточной вязкопластичной нефти. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 1989. – 196 с.
6. *Алишаев М.Г.* О стационарной фильтрации с начальным градиентом // Теория и практика добычи нефти. – М.: Недра, 1968. – С. 202–211.
7. *Карчевский М.М., Бадриев И.Б.* Нелинейные задачи теории фильтрации с разрывными монотонными операторами // Численные методы механики сплошной среды. – Новосибирск: Изд-во ИТПМ СО АН СССР, 1979. – Т. 10, № 5. – С. 63–78.
8. *Бадриев И.Б., Задворнов О.А.* Исследование стационарной задачи фильтрации с многозначным законом при наличии точечного источника // Дифференц. уравнения. – 2005. – Т. 41, № 7. - С. 874–880.
9. *Бадриев И.Б., Задворнов О.А.* Итерационные методы решения задач об определении границ целиков остаточной вязкопластичной нефти в многослойных пластах // Дифференц. уравнения. – 2009. – Т. 45, № 7. – С. 973–979.
10. *Бернандинер М.Г., Ентов В.М.* Гидродинамическая теория фильтрации аномальных жидкостей. – М.: Наука, 1975. – 199 с.
11. *Задворнов О.А.* Исследование нелинейной стационарной задачи фильтрации при наличии точечного источника // Изв. вузов. Матем. – 2005. – № 1. – С. 58–63.
12. *Глушенков В.Д.* Об одном уравнении нелинейной теории фильтрации// Прикладная математика в научно-технических задачах. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1976. – С. 12–21.
13. *Бадриев И.Б., Задворнов О.А., Саддек А.М.* Исследование сходимости итерационных методов решения некоторых вариационных неравенств с псевдомонотонными операторами // Дифференц. уравнения. – 2001. – Т. 37, № 7. – С. 891–898.
14. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. – М.: Наука, 1974. – 480 с.
15. *Экланд И., Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы. – М.: Мир, 1979. – 400 с.
16. Résolution numériques de problèmes aux limites par des méthodes de Lagrangien augmenté / Eds M. Fortin, R. Glowinski. – Paris: Dunod, 1983. – 320 p.

Поступила в редакцию
19.04.10

Бадриев Ильдар Бурханович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной математики Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: *Ildar.Badriev@ksu.ru*

Фанюк Борис Яковлевич – аспирант кафедры вычислительной математики Казанского (Приволжского) федерального университета.