

Краткое сообщение

И.Р. КАЮМОВ, Д.В. МАКЛАКОВ

**О МИНИМИЗАЦИИ КАВИТАЦИОННОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ
ГИДРОПРОФИЛЯ**

Аннотация. В работе для профилей, обтекаемых по схеме Гельмгольца–Кирхгофа, с бесконечной каверной исследуются предельные значения коэффициентов подъемной силы и сопротивления, отнесенные к длине омываемой части профиля. При заданном значении коэффициента подъемной силы и дополнительных ограничениях сверху и снизу на распределение скорости по поверхности профиля найден глобальный минимум коэффициента сопротивления.

Ключевые слова: экстремальная проблема, идеальная жидкость, схема Гельмгольца–Кирхгофа, кавитационное обтекание.

УДК: 532.5

Данная работа является продолжением статей, опубликованных авторами в [1], [2]. Предположим, что имеется профиль, обтекаемый установившимся безвихревым потоком идеальной несжимаемой жидкости со скоростью v_0 на бесконечности по схеме Гельмгольца–Кирхгофа (рис. 1).

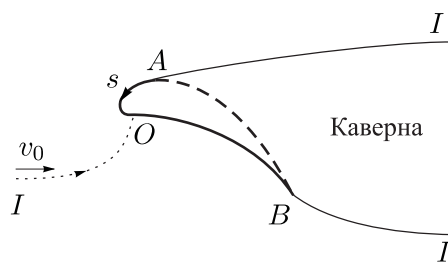


Рис. 1. Профиль, обтекаемый по схеме Гельмгольца–Кирхгофа

Согласно этой модели течения поток отделяется от поверхности профиля в точках отрыва A и B , за профилем образуется бесконечная каверна с постоянным давлением, равным давлению в набегающем потоке, скорость на свободных поверхностях AI и BI постоянна и равна скорости на бесконечности v_0 . Точку разделения потока обозначим через O . Дуговую абсциссу отсчитываем от точки A .

Поступила 01.04.2015

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-01-06029-а), а также при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Правительства Республики Татарстан (проект № 15-41-02433).

Формулы для подъемной силы L и сопротивления D профиля были получены недавно в работах [3], [4]:

$$L = \rho v_0 \int_0^l (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}) \log \frac{v_0}{v} ds, \quad D = \frac{\rho v_0}{4\pi} \left(\int_0^l \frac{v}{\sqrt{\varphi}} \log \frac{v_0}{v} ds \right)^2, \quad (1)$$

где l — длина дуги AOB омываемой части профиля, $\varphi = \varphi(s)$ — распределение потенциала скорости вдоль AOB :

$$\varphi = \int_s^{l_1} v(s) ds \quad \text{при } 0 \leq s \leq l_1, \quad \varphi = \int_{l_1}^s v(s) ds \quad \text{при } l_1 \leq s \leq l,$$

l_1 — дуговая абсцисса точки разделения потока O .

Введем отнесенные к l коэффициенты подъемной силы $C_L = 2L/(\rho v_0^2 l)$ и сопротивления $C_D = 2D/(\rho v_0^2 l)$. В работе [2] была решена задача об определении распределения скорости на поверхности кавитирующего профиля, которое при заданной подъемной силе L (заданном C_L) обеспечивает минимальное сопротивление D (минимальное значение C_D). С точки зрения физической реализуемости профиля большой интерес представляет аналогичная задача с ограничением снизу на скорость обтекания.

Пусть $l_2 = l - l_1$ — длина дуги OB . Введем две безразмерные функции $u_1(\sigma)$ и $u_2(\sigma)$, $0 \leq \sigma \leq 1$, такие, что

$$\frac{v}{v_0} = \begin{cases} u_1\left(\frac{l_1-s}{l_1}\right) & \text{на } OA, \\ u_2\left(\frac{s-l_1}{l_2}\right) & \text{на } OB. \end{cases} \quad (2)$$

Так как скорость $v \geq 0$, то функции $u_1(\sigma)$ и $u_2(\sigma)$ являются неотрицательными. При выполнении условия Бриллюэна они удовлетворяют неравенствам

$$u_1(\sigma) \leq 1, \quad u_2(\sigma) \leq 1. \quad (3)$$

С помощью формул (1) выразим C_L и C_D через $u_1(\sigma)$ и $u_2(\sigma)$:

$$C_L = 2\{(1-\varepsilon)I[u_2] - \varepsilon I[u_1]\}, \quad C_D = \frac{1}{2\pi} \left\{ \sqrt{1-\varepsilon} J[u_2] + \sqrt{\varepsilon} J[u_1] \right\}^2, \quad (4)$$

где $\varepsilon = l_1/l$, $I[u]$ и $J[u]$ — нелинейные функционалы от функции $u(\sigma)$, $0 \leq \sigma \leq 1$:

$$I[u] = - \int_0^1 u(\sigma) \log u(\sigma) d\sigma, \quad J[u] = - \int_0^1 \frac{u(\sigma) \log u(\sigma) d\sigma}{\sqrt{\int_0^\sigma u(\sigma_1) d\sigma_1}}. \quad (5)$$

Как видно из (5), при выполнении условия Бриллюэна (3) значения функционалов $I[u]$ и $J[u]$ при $u = u_1(\sigma)$ и $u = u_2(\sigma)$ будут неотрицательными.

Перепишем функционалы $I[u]$ и $J[u]$ в терминах классических функционалов вариационного исчисления. Для этого сделаем замену

$$\lambda(\sigma) = \sqrt{2 \int_0^\sigma u(\sigma_1) d\sigma_1}.$$

Тогда

$$I[\lambda] = - \int_0^1 \lambda \lambda' \log(\lambda \lambda') d\sigma, \quad J[\lambda] = -\sqrt{2} \int_0^1 \lambda' \log(\lambda \lambda') d\sigma.$$

Ясно, что $\lambda(\sigma) \geq 0$. Кроме того, $u(\sigma) = \lambda(\sigma)\lambda'(\sigma)$, поэтому $\lambda'(\sigma) \geq 0$.

Решение основной проблемы определения абсолютного минимума C_D при заданном значении C_L основано на решении следующей вспомогательной вариационной задачи.

Вспомогательная задача. Найти функцию $\lambda(\sigma)$, $\sigma \in [0, 1]$:

$$\lambda(0) = 0, \quad \lambda'(\sigma) \geq 0,$$

доставляющую абсолютный минимум функционалу $J[\lambda]$ при условии, что $I[\lambda] = q$ (q задано), и дополнительном ограничении

$$\frac{1}{d} \leq \lambda(\sigma)\lambda'(\sigma) \leq 1. \quad (6)$$

Без дополнительного ограничения снизу в (6) данная задача была решена в работе [1] (см. также [2]). Для решения использовали технику, развитую ранее в статьях [5]–[9] для исследования экстремальных задач теории струй и кавитации. Эта техника основана на неравенстве Йенсена. Задача с дополнительным ограничением снизу оказалась гораздо более сложной и в этом случае нам не удалось распространить метод, основанный на неравенстве Йенсена.

Через $J_{\min}(q)$ обозначим глобальный максимум функционала $J[\lambda]$ для заданного значения $I[\lambda] = q$. Решение вспомогательной вариационной проблемы получено при помощи алгоритма, который может быть описан следующим образом.

Шаг 1. При помощи перестройки функции под знаком интеграла доказывается, что вариационную проблему можно решать в классе функций таких, что $\lambda\lambda'$ не возрастает на отрезке $[0, 1]$.

Шаг 2. Используя шаг 1 и классическую теорему Хелли о сходимости функций ограниченной вариации, доказываем теорему существования решения вспомогательной задачи.

Шаг 3. Доказываем, что $\lambda\lambda'$ непрерывна, постоянна на двух интервалах, и на оставшемся среднем интервале находим ее вид при помощи интеграла уравнения Эйлера–Лагранжа.

Приступим теперь к реализации этого алгоритма.

Лемма 1. Пусть функция λ такова, что $\lambda(0) = 0$, $\lambda\lambda'(\sigma)$ измерима на $[0, 1]$ и удовлетворяет неравенствам

$$\frac{1}{e} \leq \frac{1}{d} \leq \lambda\lambda'(\sigma) \leq 1.$$

Тогда найдется монотонная функция h такая, что $h(0) = 0$, hh' не возрастает на $[0, 1]$ и удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} \int_0^1 \lambda' \lambda \ln(\lambda\lambda') d\sigma &= \int_0^1 hh' \ln(hh') d\sigma, \\ \int_0^1 \lambda' \ln(\lambda\lambda') d\sigma &\leq \int_0^1 h' \ln(hh') d\sigma, \\ \frac{1}{d} &\leq \lambda\lambda'(\sigma) \leq 1. \end{aligned}$$

Лемма 2. Пусть $k < 0$. Тогда решение экстремальной задачи

$$P[\lambda] = - \int_0^1 \lambda'(\lambda + k) \log(\lambda\lambda') d\sigma \rightarrow \max$$

в классе функций, удовлетворяющих условиям

$$\lambda(0) = 0, \quad \frac{1}{d} \leq \lambda(\sigma)\lambda'(\sigma) \leq 1 \quad (7)$$

существует и может быть выбрано таким образом, что функция $\lambda\lambda'(\sigma)$ не возрастает на отрезке $[0, 1]$.

Доказательство. В нашей работе [2] было показано, что функционал $P[\lambda]$ ограничен в более широком классе функций, в котором отсутствует ограничение снизу на $\lambda\lambda'$. Это означает, что существует $\sup P[\lambda] = S$ в классе функций, удовлетворяющих (7). Поэтому найдется последовательность функций g_n , удовлетворяющих (7), таких, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P[g_n] = S.$$

Каждую функцию g_n перестроим в соответствии с леммой 1. Получим последовательность функций h_n , удовлетворяющих условиям (7), причем $P[h_n] \geq P[g_n]$. Поскольку $h_n h'_n$ монотонна, то $h_n h'_n$ имеет ограниченную вариацию. Поэтому по теореме Хелли ([10], с. 422) из последовательности $h_n h'_n$ можно извлечь всюду сходящуюся подпоследовательность. Предел такой последовательности обозначим $\lambda\lambda'$. Очевидно, что $\lambda\lambda'$ не возрастает. Далее по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла

$$P[\lambda] = - \int_0^1 \lambda'(\lambda + k) \ln(\lambda\lambda') d\sigma = - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 h'_n(h_n + k) \ln(h_n h'_n) d\sigma \geq S.$$

Следовательно, $P[\lambda] = S$. В силу построения λ условия (7) выполнены. \square

Лемма 3. Пусть $k < 0$. Тогда решение экстремальной задачи

$$P[\lambda] = - \int_0^1 \lambda'(\lambda + k) \log(\lambda\lambda') d\sigma \rightarrow \max$$

в классе функций, удовлетворяющих условиям (7), можно искать в классе непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих условиям

$$\lambda(\sigma) = \sqrt{2\sigma}, \quad \sigma \in [0, \gamma_1], \quad \lambda'(\sigma)(\lambda(\sigma) + k) = c, \quad \sigma \in [\gamma_1, \gamma_2], \quad \lambda'(\sigma)\lambda(\sigma) = 1/d, \quad \sigma \in [\gamma_2, 1].$$

Теорема 1. Функция $J_{\min}(q)$ задается параметрическими уравнениями

$$2qd = k^2 cd \frac{d-1}{(1-c)(cd-1)} + \left(2 - dk^2 + \frac{k^2(d-1)}{(c-1)(cd-1)} \right) \ln d - k^2 \ln \frac{c-1}{cd-1}, \quad (8)$$

$$J_{\min}(q) = \frac{2\sqrt{2}}{k}(c-q), \quad (9)$$

где

$$k = k(c) = -(cd - \ln d) \sqrt{\frac{2(c-1)(cd-1)}{c^2 d^2 (d-1) - 2cd(d-1) \ln d + (cd(1+d) - 1 - c^2 d^2) \ln^2 d}},$$

причем $c \in [0, \ln d/d]$.

Доказательство. Рассмотрим функционал

$$I[\lambda] + \frac{k}{\sqrt{2}} J[\lambda] = q + \frac{k}{\sqrt{2}} J[\lambda].$$

При фиксированном отрицательном k , как было замечено выше, он имеет единственную точку глобального максимума, которому соответствует единственное значение параметра c , а следовательно, при этих же значениях параметра c обязан получаться глобальный минимум функционала J при фиксированном q .

Положим $a = \frac{k}{c-1}$, $b = \frac{k}{cd-1}$. Прямые вычисления показывают, что

$$q = - \int_0^1 \lambda\lambda' \log(\lambda\lambda') d\sigma = \frac{1}{2d} \left[k(b-a)d - k^2 \ln \frac{b}{a} + (2 + ab(d-1) - k^2 d) \ln d \right],$$

$$\frac{J_{\min}(q)}{\sqrt{2}} = k \ln \frac{b}{a} + \left(k + \sqrt{\frac{2}{d} + \frac{ab(d-1)}{d}} \right) \ln d,$$

откуда после несложных преобразований вытекает (9). \square

Еще раз подчеркнем, что теорема 1 является нетривиальным обобщением теоремы 1 из статьи [2]. Важное отличие состоит в том, что без ограничения снизу важную роль играл параметр $b = \lambda(1)$, в новой же задаче решение параметризуется при помощи параметра c , причем в частном случае $d = e$ возможна перепараметризация в терминах b .

Для решения основной задачи доказывается

Лемма 4. *Функция $J_{\min}(q)$ строго возрастает на отрезке $[0, q_{\max}]$.*

Доказательство. Используя (8), (9) получаем уравнение

$$\frac{dJ_{\min}(q)}{dq} = \frac{dJ_{\min}(q)}{dc} \bigg/ \frac{dq}{dc} = -\frac{\sqrt{2}}{k}.$$

Для функции $J_{\min}(q)$ параметр k всегда отрицателен (см. теорему 1). \square

Рассмотрим теперь первое уравнение в (4). Полагая $\varepsilon = l_1/l \in [0, 1]$, заключаем

$$C_L = 2 \{ (1 - \varepsilon)I[u_2] - \varepsilon I[u_1] \} \leq 2I[u_2].$$

Поскольку максимум функционала $I[u] = q_{\max} = \log d/d$, коэффициент подъемной силы $C_L \in (0, 2 \log g/d)$.

Теорема 2. *Для данного значения коэффициента подъемной силы $C_L \in (0, 2 \log d/d]$ глобальный минимум коэффициента сопротивления $C_{D \min} = \frac{1}{2\pi} J_{\min}^2(C_L/2)$.*

Доказательство. Положим $q_1 = I[u_1]$, $q_2 = I[u_2]$. Ясно, что

$$\varepsilon \in [0, 1), \quad 0 \leq q_1, q_2 \leq q_{\max}, \quad (1 - \varepsilon)q_2 - \varepsilon q_1 = C_L/2 \in (0, q_{\max}], \quad (10)$$

$$C_{D \min} = \min_{\varepsilon, q_1, q_2} \frac{1}{2\pi} \{ \sqrt{1 - \varepsilon} J_{\min}(q_2) + \sqrt{\varepsilon} J_{\min}(q_1) \}^2.$$

Следует отметить, что $\varepsilon \neq 1$, поскольку для $\varepsilon = 1$ ограничения (10) не выполняются. Выражая q_2 через q_1 в (10), получаем

$$C_{D \min} = \min_{\varepsilon, q_1} \left\{ \sqrt{1 - \varepsilon} J_{\min} \left(\frac{C_L/2}{1 - \varepsilon} + \frac{\varepsilon q_1}{1 - \varepsilon} \right) + \sqrt{\varepsilon} J_{\min}(q_1) \right\}^2.$$

В силу леммы 4 минимизируемая функция строго возрастает по q_1 . Следовательно, минимум достигается в точке $q_1 = 0$, т. е.

$$C_{D \min} = \min_{\varepsilon} \frac{1}{2\pi} \left\{ \sqrt{1 - \varepsilon} J_{\min} \left(\frac{C_L/2}{1 - \varepsilon} \right) \right\}^2. \quad (11)$$

Чтобы доказать теорему, необходимо установить что минимум достигается в точке $\varepsilon = 0$. Это будет так, если функция, минимизируемая в (11), строго возрастает по ε . Положим

$$q = \frac{C_L/2}{1 - \varepsilon}$$

и рассмотрим функцию $J_{\min}^2(q)/q$. Легко видеть, что эта функция строго возрастает. Действительно, найдя ее производную, можно сделать вывод, что строгое возрастание $J_{\min}^2(q)/q$ равносильно неравенству

$$qJ'_{\min}(q) - \frac{J_{\min}(q)}{2} > 0.$$

Используя лемму 4, после несложных вычислений заключаем

$$qJ'_{\min}(q) - \frac{J_{\min}(q)}{2} = -\frac{\sqrt{2}c}{k}.$$

Последнее выражение положительно, поскольку $k < 0$ и $c > 0$ (см. теорему 1). Строгое возрастание $J^2_{\min}(q)/q$ влечет строгое возрастание функции, минимизируемой в (11). \square

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Маклаков Д.В., Каюмов И.Р. *Об одной нелинейной вариационной проблеме теории кавитирующих профилей*, Изв. вузов. Матем., № 12, 90–96 (2012).
- [2] Maklakov D.V., Kayumov I.R. *Exact bounds for lift-to-drag ratios of profiles in the Helmholtz–Kirchhoff flow*, European J. Appl. Math. **25** (2), 231–254 (2014).
- [3] Маклаков Д.В. *Аналог теоремы Кутта–Жуковского при обтекании профиля с отрывом струй*, Докл. РАН **441** (2), 187–190 (2011).
- [4] Maklakov D.V. *On the lift and drag of cavitating profiles and the maximum lift and drag*, J. Fluid Mech. **687**, 360–375 (2011) doi:10.1017/jfm.2011.358.
- [5] Маклаков Д.В. *О максимуме сопротивления криволинейного препятствия, обтекаемого с отрывом струй*, ДАН СССР **208** (3), 574–577 (1988).
- [6] Maklakov D.V., Uglov A.N. *On the maximum drag of a curved plate in flow with a wake*, European J. Appl. Math. **6** (5), 517–527 (1995).
- [7] Maklakov D.V. *A note on the optimum profile of a sprayless planing surface*, J. Fluid Mech. **384**, 281–292 (1999).
- [8] Maklakov D.V. *Some remarks on the exact solution for an optimal impermeable parachute problem*, J. Comput. and Appl. Math. **166** (2), 591–596 (2004).
- [9] Maklakov D.V. *On deflectors of optimum shape*, J. Fluid Mech. **540**, 175–187 (2005).
- [10] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа* (Наука, М., 1989).

И.Р. Каюмов

доцент, кафедры дифференциальных уравнений,
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

e-mail: ikayumov@gmail.com

Д.В. Маклаков

профессор, кафедры аэрогидромеханики,
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

e-mail: dvmaklakov@mail.ru

I.R. Kayumov and D.V. Maklakov

On minimization of cavitation resistance of hydroprofile

Abstract. In this paper, for profiles flowed according to the Helmholtz–Kirchhoff scheme with infinite cavern, we investigate values of coefficients of levitation force and of resistance related to a length of washed part of the profile. Under given value of coefficient of levitation force and additional restrictions from above and below on a distribution of a speed on a surface of a profile we find global minimum of coefficient of resistance.

Keywords: extremal problem, ideal fluid, Helmholtz–Kirchhoff scheme, cavitation flow.

I.R. Kayumov

*Associate Professor, Chair of Differential Equations,
Kazan (Volga Region) Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,*

e-mail: ikayumov@gmail.com

D.V. Maklakov

*Professor, Chair of Aerohydromechanics,
Kazan (Volga Region) Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,*

e-mail: dvmaklakov@mail.ru