ВЫЧИСЛИМО ОТДЕЛИМЫЕ АЛГЕБРЫ

Н.Х. Касымов

профессор Национального университета Узбекистана им. М. Улугбека

Казанский Федеральный университет, Казань, 16 ноября 2022 г.

Аннотация: *Отделимые нумерации групп, колец и полей. Теорема об эффективной вложимости колец в поля. Вычислимо отделимые линейные порядки. Определимость порядков над негативными эквивалентностями. Вычислимо необратимые автоморфизмы негативных линейных порядков.*

Негативность отделимых нумераций тел

Фундаментальные алгебраические понятия тела и области целостности являются классическими объектами исследования как в алгебре, так и в математической логике, которая, в частности, занимается описанием алгоритмических свойств колец, заданных теми или иными нумерациями. Важнейшими среди нумераций (представлений) этих объектов являются вычислимые, т.е. изоморфные кольцам, носителями которых являются вычислимые подмножества множества натуральных чисел, а операции сложения и умножения представлены подходящими вычислимыми операциями.
Напомним важные определения.
Унарная термальная операция с фиксированными элементами алгебры в качестве параметров называется трансляцией.

Определение 1

Универсальная алгебра называется трансляционно полной, если всякая пара различных ее элементов переводится в любую другую пару различных элементов подходящей трансляцией.

Очевидно, что всякая трансляционно полная алгебра является простой. Обратное неверно. Например, пусть $\langle A; f \rangle$ трехэлементный унар, на котором f действует как цикл дины 3. Очевидно, что любая трансляция этой простой алгебры имеет вид $f^n(x)$ (при $n = 0$ имеем тождественную функцию) и действует на $A = \{a_0, a_1, a_2\}$ скажем так: $f(a_0) = a_1, f(a_1) = a_2, f(a_2) = a_0$. Ясно, что любая соседняя пара элементов (т.е. вида $\langle a_i, a_{i+1} \rangle$ для $i \in \{0, 1\}$) переводится любой трансляцией в соседнюю же (с учетом ориентации) пару, поэтому пара $\langle a_0, a_1 \rangle$ не переводится никакой трансляцией в пару $\langle a_0, a_2 \rangle$.
Приведем простейший пример когруэнц-простого кольца, не являющегося трансляционно полным. Пусть Z_3 – группа вычетов по модулю 3 аддитивной группы целых чисел $\langle Z; + \rangle$. Примем ее за аддитивную группу кольца, умножение в котором определим как нулевое. Легко убедиться в том, что построенное кольцо не имеет нетривиальных идеалов и не является трансляционно полным (сравнить с предыдущим примером трехэлементного унара). Детали опускаем.

Негативность отделимых нумераций тел

Предложение 1

Всякое тело является трансляционно полным.

emphДоказательство. Пусть даны два произвольных различных элемента a, b тела F. Зафиксируем произвольную пару различных элементов c и d. Покажем, что существует такая трансляция $\lambda x[t(x)]$ (символ λ служит для стандартного λ-обозначения) тела F, которая переводит элемент a в c, а элемент b в d. Для этого определим следующее множество трансляций $T(a)$, имеющих очень простой вид линейных многочленов: $T(a) = \{\lambda x[f(x-a)+c] | f \in F\}$. Очевидно, что всякая трансляция $\lambda x[t(x)]$ из $T(a)$ переводит элемент a в c. В то же время, для любого $b \neq a$ найдется единственная трансляция $\lambda x[f_0(x-a)+c] \in T(a)$, которая переводит элемент b в d. Ясно, что этой трансляцией будет $\lambda x[f_0(x-a)+c]$ при $f_0 = (d-c)(b-a)^{-1}$. *Предложение доказано.*

Негативность отделимых нумераций тел

Теорема 1

Всякая эффективно невырожденная нумерация любого тела является негативной.

emphДоказательство. Пусть F – тело, ν – его эффективно невырожденная нумерация. По условию, существует нетривиальное ν-замкнутое собственное перечислимое подмножество $\alpha \subseteq \omega$. Зафиксируем элементы тела $c \in \nu(\omega \setminus \alpha)$ и $d \in \nu\alpha$.
Пусть теперь даны два произвольных различных элемента a, b тела F. По предыдущему предложению существует такая трансляция $\lambda x[t(x)]$ тела F, которая переводит элемент a в c, а элемент b в d. Таким образом, для двух элементов a, b, заданных своими номерами m, n соответственно в невырожденном представлении ν тела F с фиксированной перечислимой ν-окрестностью α элемента d тела F, не содержащей c, будем вычислять ν-номера для всех трансляций вида $\nu(k)(\nu(n) - \nu(m)) + \nu(l)$, где l – некоторый ν-номер элемента c.

Негативность отделимых нумераций тел

Далее пытаемся обнаружить все трансляции этого вида во множестве α, заставляя k пробегать множество всех ν-номеров элементов тела F. Если действительно $\nu m \neq \nu n$, то этот факт гарантированно подтвердится через конечное число шагов перечислением в α числа $k_0(n-m)+l$, где k_0 есть некоторый ν-номер элемента, являющегося произведением мультипликативно обратного к $d-c$ и $\nu(n)-\nu(m)$. Последнее и означает негативность ν.
Более формально,

$$\nu m \neq \nu n \Leftrightarrow \exists k(\nu(k)(\nu(n)-\nu(m))+\nu(l) \in \nu(\alpha)).$$

Теорема доказана.

Сделаем три важных замечания, касающихся почти тривиального доказательства Теоремы 1.
Во-первых, хотя в любой конгруэнц-простой алгебре всякая главная (т.е. порожденная парой различных элементов) конгруэнция "склеивает" любую пару других элементов, вовсе не факт, что найдется такая трансляция, которая переводит один из порождающих этой конгруэнции в один из "склеиваемых" элементов, а второй – в другой из "склеиваемых". В общем случае можно лишь утверждать существование конечной цепи значений подходящих трансляций, через которые и "склеиваются" все пары элементов исходной алгебры. В случае тел, по теореме 1, существует полное (очень богатое) семейство трансляций, позволяющее "склеивать" любую пару элементов непосредственнно в качестве значений подходящей трансляции.

Негативность отделимых нумераций тел

Во-вторых, негативность всякой невырожденной нумерации ν любого тела равносильна совершенной нормальности ν-пространства, порожденного ν-замкнутыми вычислимыми подмножествами ω, поэтому в случае нумерованных тел, согласно ранее озвученным результатам, вычислимые и перечислимые топологии совпадают. Очевидно, что в случае произвольных алгебр вычислимая топология вообще говоря слабее перечислимой (простейший пример – упоминавшееся ранее связное двоеточие).

Негативность отделимых нумераций тел

Наконец, в–третьих, использование трансляций содержащих унарную операцию взятия мультипликативно обратного элемента вообще говоря некорректно, т.к. эта операция частична (хотя и непрерывна), и значения некоторых трансляций (образующих коперечислимое множество) при этом оказываются неопределенными (впрочем, за счет усложнения доказательства можно обойти это препятствие).

Следствие 1

Всякая отделимая нумерация любого конечного тела является вычислимой.

Действительно, в этом случае имеем негативную нумерацию конечного множества, которая является вычислимой.

Следствие 2

Для всякой эффективно невырожденной нумерации любого тела соответствующее перечислимое пространство совершенно нормально и вполне несвязно.

Определение 2

Нумерация алгебры называется локально позитивной (негативной), если хотя бы один смежный класс ядра этой нумерации является перечислимым (коперечислимым).

Отметим, что в то время как позитивность и негативность являются "глобальными" понятиями, подразумевающими наличие единообразной эффективной процедуры порождения нумерационной эквивалентности или, соответственно – ее дополнения, "локальность", вообще говоря, означает отсутствие такой процедуры. При этом, к примеру, число локально позитивных (негативных) эквивалентностей даже с не более чем двухэлементными смежными классами есть континуум, тогда как число позитивных (негативных) эквивалентностей счетно.

Локально позитивные и негативные группы

Очевидно, что всякая эквивалентность с конечными смежными классами является как локально позитивной, так и локально негативной, однако ее алгоритмическая сложность может быть какой угодно. Тем не менее, свойства симметрии в группах и полях позволяют равномерно эффективно переходить от локальной позитивности (негативности) их представлений к глобальной, т.е. алгоритмы позитивности (негативности) оказываются изначально присутствующими в структурах самих этих систем, что проявляется и в свойствах их алгоритмических представлений.

Предложение 2

Для всякой локально позитивной (локально негативной) группы любой смежный класс ее ядра является перечислимым (коперечислимым).

Доказательство. Пусть (G, ν) – локально позитивная (локально негативная) группа и $*$ – есть вычислимая функция, представляющая групповую операцию группы G в нумерации ν. Допустим, что смежный $ker(\nu)$-класс, ν-отображаемый в элемент a группы G по ядру ее нумерационной эквивалентности (т.е $\nu^{-1}(a) = \alpha$) перечислим (коперечислим). Возьмем любой другой элемент группы G, скажем b и обозначим через $\nu^{-1}(b) = \beta$ множество его ν-номеров. Зафиксируем некоторый ν-номер n элемента $b^{-1}a$ группы G, Очевидно, что $x \in \beta \Leftrightarrow x * n \in \alpha$, что показывает перечислимость смежного $ker(\nu)$-класса β. В случае локальной негативности истинность утверждения следует из соотношения $x \in (\omega \setminus \beta) \Leftrightarrow x * n \in (\omega \setminus \alpha)$. *Предложение доказано.*

Предложение 3

Всякая локально позитивная нумерация любой группы является позитивной.

Доказательство. Пусть (G, ν) – локально позитивная группа. Согласно предыдущему предложению множество ν-номеров единицы группы e перечислимо. Обозначим это множество через $\alpha = \nu^{-1}(e)$. Тогда $\nu x = \nu y$ эквивалентно тому, что найдется такое $z \in \omega$, что $x * z \in \alpha \wedge y * z \in \alpha$. *Предложение доказано.*

Следствие 3

Всякая локально позитивная нумерация любого кольца является позитивной.

До сих пор, по умолчанию, мы рассматривали группы в сигнатуре с одной бинарной операцией.

Теорема 2

Всякая локально негативная нумерация любой группы в сигнатуре с бинарной групповой и унарной операцией взятия обратного элемента является негативной.

Доказательство. Пусть $\langle G; *, ^{-1} \rangle$ – группа с бинарной групповой операцией $*$ и унарной $^{-1}$ взятия обратного элемента, ν – локально негативная нумерация группы G, в которой вычислимыми представлениями операций $*$ и $^{-1}$ являются $\times$ и f соответственно. Обозначим через e единицу группы G. По Предложению 1 $\alpha = \nu^{-1}(e)$ коперечислимо. Очевидно,
$\nu x \neq \nu y \Leftrightarrow x \times f(y) \in (\omega \setminus \alpha)$. *Теорема доказана.*

Локально позитивные и негативные группы

На текущий момент неизвестен ответ на вопрос: "всякая ли локально негативная группа в сигнатуре с одной бинарной групповой операцией является негативной?".
Если существуют локально негативные, но не негативные группы (возможно, класс этих объектов пустой), то, в силу ряда причин, их строение должно быть весьма своеобразным и "сверхсимметричным" с алгоритмической точки зрения.

Следствие 4

Всякая локально позитивная нумерация любого тела является вычислимой.

Действительно, из локальной позитивности, а значит, согласно предложению 1, и позитивности тела вытекает его вычислимость (напомним, что всякая позитивная нумерация любой конгруэнц-простой универсальной алгебры эффективной сигнатуры вычислима).

Предложение 4

Всякая локально негативная нумерация любого тела является негативной.

Непосредственно вытекает из Теоремы 1, т.к. локальная негативность тела обеспечивает эффективную невырожденность соответствующего ему перечислимо порожденного пространства.

Критерий эффективной вложимости области целостности в поле

Академиком А.И. Мальцевым построен знаменитый пример ассоциативного кольца без делителей нуля, не вложимого в тело. Более того, мультипликативная полугруппа построенного им кольца не вложима в группу. Эти результаты стимулировали лектора данного курса к изучению вопросов эффективной вложимости колец в поля. Основная часть рассмотренных выше вопросов примыкает именно к этой проблематике.

По-видимому, в литературе по абстрактной вычислимости не уделялось должного внимания тому факту, что процедура вложения коммутативной области целостности в поле своих частных по существу является эффективной.

Критерий эффективной вложимости области целостности в поле

Идея конструкции поля частных для нумерованной области целостности, так же, как и в классическом случае, заключается в построении отношения эквивалентности (идеала кольца) на множествах пар номеров, вторые члены которых ("знаменатели" формальных дробей) могут принимать в качестве значений все элементы перечислимого множества, являющегося дополнением нулевого элемента исходного кольца. К этой идее аппелирует и введенное выше понятие локальной негативности кольца.

Критерий эффективной вложимости области целостности в поле

Теорема 3

Для всякой локально негативной области целостности существует негативное представление поля ее частных, в которое она эффективно вложима.

Доказательство. Пусть $\langle R; +, *\rangle$ ассоциативно-коммутативное кольцо без делителей нуля, ν – его локально негативная нумерация, 0 – нейтральный элемент аддитивной группы кольца R, а $\oplus, \otimes$ – вычислимые представления операций $+, *$ соответственно в нумерации ν. По Предложению 2 множество $\alpha = \nu^{-1}(0)$ коперечислимо. Рассмотрим канторовскую свертку $c(\omega \times (\omega \setminus \alpha))$ перечислимого множества $(\omega \times (\omega \setminus \alpha))$ и назовем два числа x, y из $c(\omega \times (\omega \setminus \alpha))$ находящимися в отношении η, если $\nu(l(x) * r(y)) = \nu(l(y) * r(x))$ (здесь – l, r – вычислимые функции взятия левого, соответственно правого, члена свертки).

Критерий эффективной вложимости области целостности в поле

Неформально, правый член ("знаменатель") упорядоченной пары сторящегося поля частных отличен от нуля исходного кольца, а левый член ("числитель")– может быть каким угодно. Из классического результата о вложимости области целостности в поле частных следует, что η – отношение эквивалентности и, более того, η – конгруэнция (идеал), согласованная с операциями $+, *$ кольца R. Вычислимые бинарные операции поля частных обозначим через g, h, где g представляет сложение в поле частных, а h – умножение. Тогда для любых $x, y \in \omega$ и $u, v \in \omega \setminus \alpha$ функции g, h на паре элементов a, b (здесь $g(a, b)$ и $h(a, b)$ обозначают $l(a) = x, r(a) = u; l(b) = y, r(b) = v$) действуют следующим образом:
$g(c(x, u), c(y, v)) = c[(x \otimes v) \oplus (y \otimes u), u \otimes v]$ и
$h(c(x, u), c(y, v)) = c[x \otimes y, u \otimes v]$.

Критерий эффективной вложимости области целостности в поле

При этом, нумерованным полем частных является $(\langle\{c(\omega \times (\omega \setminus \alpha))/\eta\}; g, h\rangle, \mu)$, где μ – проектирующее отображение, т.е. $\mu(x) = \{x\}/\eta$.
Детали, связанные с вычислимым отображением перечислимого множества $(\omega \setminus \alpha) \times \omega$ на ω опускаем.
Локальная негативность нумерации μ поля частных $(\langle\{c(\omega \times (\omega \setminus \alpha))/\eta\}; g, h\rangle, \mu)$ очевидна, т.к. дополнением множества ν-номеров нуля кольца R в поле частных является множество $c((\omega \setminus \alpha) \times (\omega \setminus \alpha))$, которое является собственным μ-перечислимым подмножеством ω. Из локальной негативности поля частных, ввиду эффективной невырожденности нумерации μ, согласно Теореме 1, следует негативность поля частных.

Критерий эффективной вложимости области целостности в поле

Покажем эффективную вложимость области целостности $(\langle R; +, *\rangle, \nu)$ в поле частных $(\langle\{c(\omega \times (\omega \setminus \alpha))/\eta\}; g, h\rangle, \mu)$. Для этого, прежде всего, зафиксируем в кольце R некоторый ν-номер ненулевого элемента, скажем $n \in (\omega \setminus \alpha)$, такой, что $\nu l(n) = \nu r(n)$. Очевидно, что число $m = c(l(n), r(n))$ есть μ-номер смежного η-класса, являющегося мультипликативной единицей поля частных (заметим, что в самом кольце R мультипликативной единицы может и не быть). Вычислимое отображение $\lambda x[f(x) = c(x, n)]$ осуществляет изоморфное вложение (R, ν) в поле его частных $(\langle\{c(\omega \times (\omega \setminus \alpha))/\eta\}; g, h\rangle, \mu)$. Детали, связанные с тем, что μ-номерным множеством поля частных является не ω, а перечислимое множество $\omega \times (\omega \setminus \alpha)$, так же, как и выше, опускаем. *Теорема доказана.*

Критерий эффективной вложимости области целостности в поле

Следствие 5

Всякая локально негативная область целостности негативна.

Следует из эффективной вложимости локально негативной областицелостности в локально негативное (а значит, по Теореме 1, и негативное) поле.

Следствие 6

Нумерованная коммутативная область целостности эффективно вложима в эффективно невырожденное поле тогда и только тогда, когда она негативна.

Критерий эффективной вложимости области целостности в поле

Предложение 5

Существует позитивная область целостности, эффективно не вложимая ни в какое эффективно невырожденное поле.

Приведем набросок доказательства. Пусть R – абсолютно свободное ассоциативно-коммутативное кольцо от свободного вычислимого множества порождающих $X = \{x_n | n \in \omega\}$. Очевидно, что R вычислимо представимо. Положим $x_i = 0$ $(i \in \alpha)$, где 0 – нулевой элемент кольца R и α – перечислимое невычислимое множество. Тогда фактор-кольцо R/I, где I – идеал, порожденный определяющими соотношениями $x_i = 0$ $(i \in \alpha)$, является позитивной невычислимой (а значит и не негативной) областью целостности. Детали опускаем.

Напомним, что структура называется негативно (позитивно) определимой над негативной (позитивной) эквивалентностью η, если существует нумерация этой структуры с η в качестве нумерационной эквивалентности, в которой все основные отношения данной структуры вычислимо коперечислимы (перечислимы). Заметим, что для нестрогих линейных порядков негативность (позитивность) нумерационной эквивалентности η непосредственно следует из негативности (позитивности) самого отношения порядка, поскольку $\langle x, y\rangle \in \eta \Leftrightarrow x/_\eta \leqslant y/_\eta \wedge y/_\eta \leqslant x/_\eta$. В силу этого, в главном определении текущего раздела упоминание свойств эквивалентности можно опустить, и оно будет выглядеть так:

Определение 3

Нестрогий линейный порядок называется негативно (позитивно) определимым над эквивалентностью η, если существует нумерация этого порядка с η в качестве нумерационной эквивалентности, в которой этот порядок вычислимо коперечислим (перечислим).

Далее, если из контекста ясно, о какой определимости (негативной или позитивной) идет речь, соответствующее прилагательное может быть опущено.

Предложение 6

Пусть η — произвольная эквивалентность, над которой определим негативный (позитивный) линейный порядок $\langle\omega/\eta;\leqslant\rangle$. Тогда вычислимость η равносильна вычислимости $\leqslant$.

Доказательство.. Пусть η вычислимо. Поскольку $x/\eta\leqslant y/\eta \Leftrightarrow \langle x,y\rangle\in\eta\vee\neg(y/\eta\leqslant x/\eta)$, перечислимость отношения $\leqslant$ влечёт его коперечислимость и наоборот. Значит, если $\leqslant$ перечислимо или коперечислимо, то оно вычислимо.

Если $\leqslant$ вычислимо, то вычислимость η следует из эквивалентности: $\langle x,y\rangle\in\eta\Leftrightarrow x\leqslant y\wedge y\leqslant x$. *Предложение доказано.*

Следствие

Всякий негативный (позитивный) линейный порядок на ω является вычислимым.

Это следствие даёт дополнительное обоснование целесообразности изучения невычислимых негативных (позитивных) линейных порядков, как порядков, определимых над неразрешимыми эквивалентностями, т.к. над вычислимыми эквивалентностями такие порядки неопределимы.

Как обычно, для линейного порядка $\mathfrak{L} = \langle L; \leqslant \rangle$ обозначим через $<$ индуцированный им строгий порядок, т.е., $< = \leqslant \setminus id; \ L$, а через $>$ — двойственный к нему порядок, т.е., $> = \{\langle x, y \rangle \mid y < x\}$.

Элемент x линейного порядка $\mathfrak{L} = \langle L; \leqslant \rangle$ называется *непосредственным предшественником (последователем)* элемента y, если $x < y \wedge \neg\exists z(x < z < y)$ (соответственно $x > y \wedge \neg\exists z(x > z > y)$).

Линейные порядки над негативными эквивалентностями

Линейный порядок назовём *дискретным*, если всякий его неминимальный элемент имеет непосредственного предшественника, а всякий его немаксимальный элемент —непосредственного последователя.

Элемент x линейного порядка $\mathfrak{L} = \langle L; \leqslant \rangle$ назовём его *правой (левой) предельной точкой*, если x не минимален и не имеет непосредственного предшественника (если x не максимален и не имеет непосредственного последователя). Назовем x *предельной точкой* линейного порядка, если x является его правой или левой предельной точкой. Предельная точка негативного (позитивного) линейного порядка называется *эффективно предельной*, если она является пределом некоторой вычислимой строго возрастающей или строго убывающей последовательности элементов.

Далее будет показано, что всякая предельная точка негативного линейного порядка является эффективно предельной. В то же время, существуют позитивные линейные порядки, обладающие предельными но не эффективно предельными точками.

Прежде, чем доказывать следующее утверждение, заметим, что для произвольного $\alpha \subseteq \omega$ эквивалентность $\eta(\alpha)$ позитивна (негативна) тогда и только тогда, когда множество α перечислимо (коперечислимо).

Предложение 7

Пусть $\alpha \subseteq \omega$. Если над эквивалентностью $\eta(\alpha)$ можно определить негативный или позитивный дискретный порядок, то множество α вычислимо.

Доказательство. Докажем предложение для случая, когда α не является ни минимальным ни максимальным элементом.
Пусть порядок $\mathfrak{L} = \langle L; \leqslant \rangle$ определим над эквивалентностью $\eta(\alpha)$, и смежный класс α имеет непосредственного предшественника l/η и непосредственного последователя r/η. Если это определение негативно, то тогда множество $\alpha = \{x \mid \neg(x/\eta \leqslant l/\eta) \wedge \neg(r/\eta \leqslant x/\eta)\}$ вычислимо перечислимо.

С другой стороны, в силу негативности определения оно коперечислимо, откуда следует его вычислимость.
Если же это представление позитивно, то α — перечислимое множество, и в предыдущих обозначениях, мы получаем разбиение множества ω на три попарно непересекающихся множества:

$$\omega = \{x \in \omega \mid x/\eta \leqslant l/\eta\} \cup \alpha \cup \{x \in \omega \mid r/\eta \leqslant x/\eta\},$$

причём первый и последний члены объединения, очевидно, вычислимо перечислимы. Следовательно, α вычислимо.
Случаи, когда α — наибольший или наименьший элемент, рассматриваются аналогично. *Предложение доказано.*

Следствие

Для вычислимости произвольного множество α необходимо и достаточно, чтобы над $\eta(\alpha)$ был определим негативный (позитивный) дискретный линейный порядок.

Необходимость очевидна, достаточность вытекает из Предложения 7.

В частности, отсюда следует, что над неразрешимыми позитивными и негативными эквивалентностями вида $\eta(\alpha)$ нельзя определить ни порядок ω ни двойственный ему тип ω^*, ни порядок типа Z естественного упорядочения целых чисел.
В связи с Предложением 7 возникает вопрос о принципиальной возможности определения дискретных линейных порядков над неразрешимыми негативными (позитивными) эквивалентностями.
Приведем простейший пример положительного решения этого вопроса.

Пусть $\alpha = \{a_0 < a_1 < \cdots\}$ — бесконечное подмножество ω, и $0 \in \alpha$ $(a_0 = 0)$.Обозначим через $\eta^*(\alpha)$ эквивалентность, классами которой являются множества $[a_i, a_{i+1}) = \{x \in \omega \mid a_i \leqslant x < a_{i+1}\}$, $i \in \omega$. Ясно, что каждый класс этой эквивалентности конечен, тривиальность класса $x/\eta^*(\alpha)$ равносильна условию $x \in \alpha \wedge x+1 \in \alpha$, и множество α есть характеристическая трансверсаль $\eta^*(\alpha)$, т.е., $\alpha = \{x \mid \forall y\, (x = y(\bmod\ \eta^*(\alpha)) \to x \leqslant y)\}$. Естественный порядок на ω согласован с порядком, индуцированным на классах $\eta^*(\alpha)$–эквивалентности. В частности, если $y \in \alpha$, то множество $\{x \mid x < y\}$ является $\eta^*(\alpha)$–замкнутым (т.е. вместе с каждым числом содержит и все ему $\eta^*(\alpha)$–эквивалентные). Ясно, что $\eta^*(\alpha)$ негативна (позитивна) тогда и только тогда, когда α вычислимо перечислимо (коперечислимо).

Предложение 8

Пусть α – бесконечное подмножество ω, и $0 \in \alpha$. Тогда

(а) *если α вычислимо перечислимо, то над $\eta^*(\alpha)$ определимы негативные порядковые типы ω, ω^*, и $\omega^* + \omega$;*

(б) *если α вычислимо коперечислимо, то над $\eta^*(\alpha)$ определимы позитивные порядковые типы ω и ω^*;*

(в) *если α вычислимо коперечислимо и не иммунно, то над $\eta^*(\alpha)$ определим позитивный порядок по типу $\omega^* + \omega$;*

(г) *если α сжато, то порядок по типу $\omega^* + \omega$ не имеет позитивного представления над $\eta^*(\alpha)$.*

Доказательство. Пусть α вычислимо перечислимо. Определим на $\omega/\eta^*(\alpha)$ следующий линейный порядок $\leqslant_\alpha$:

$$x/\eta^*(\alpha) \leqslant_\alpha y/\eta^*(\alpha) \overset{df}{\Leftrightarrow} \langle x, y\rangle \in \eta^*(\alpha) \vee x \leqslant y,$$

т.е., по существу, порядок $\leqslant_\alpha$ индуцирован на классах $\eta^*(\alpha)$ естественным порядком на натуральных числах. Очевидно, что $\langle \omega/\eta^*(\alpha); \leqslant\rangle \cong \langle\langle \omega; \leqslant$.
Пара $\langle x, y\rangle$ лежит в дополнении порядка $\leqslant_\alpha$ если и только если $y < x$ и $x \in \alpha$ или между x и y есть элемент из α, что является перечислимым условием.
Доказательство для ω^* получается аналогичным образом.
Чуть сложнее определяется негативный порядок по типу Z над $\eta^*(\alpha)$. Пусть $a_0 < b_0 < a_1 < b_1 < \ldots$ — строго возрастающий пересчёт вычислимого подмножества множества α. Определим два множества $\gamma^* = \{x \mid \exists k\,(a_k \leqslant x < b_k)\}$ и $\gamma = \{x \mid \exists k\,(b_k \leqslant x < a_{k+1})\}$, которые, очевидно, вычислимы и рекурсивно изоморфны порядку $\langle \omega; \leqslant\rangle$.

На $\gamma^*/\eta^*(\alpha)$ зададим негативную структуру $\langle\gamma^*/\eta^*(\alpha); \leqslant_\alpha\rangle$, изоморфную $\langle\omega^*$, а на $\gamma/\eta^*(\alpha)$ — негативную структуру $\langle\gamma/\eta^*(\alpha); \leqslant_\alpha\rangle$, изоморфную порядку ω. (Очевидно, что это можно сделать, т.к. ограничения $\eta^*(\alpha)$ как на γ^*, так и на γ суть негативные эквивалентности). Далее, для всех $x \in \gamma^*$ и $y \in \gamma$ положим $x/\eta^*(\alpha) \leqslant_\alpha y/\eta^*(\alpha)$. Легко видеть, что $\langle\gamma^*/\eta^*(\alpha) \cup \gamma/\eta^*(\alpha); \leqslant_\alpha\rangle \cong \omega^* + \omega$. Негативность отношения $\leqslant_\alpha$ следует из негативности его ограничений на γ^* и γ, а также вычислимости отношения $\{\langle x, y\rangle \mid x \in \gamma^* \wedge y \in \gamma\}$.

(б) Доказывается аналогично п. (а).

(в) Поскольку α не иммунно, то определим γ^* и γ, точно так же, как в доказательстве п. (а) текущего предложения, после чего на $\gamma^*/\eta^*(\alpha)$ зададим структуру $\langle\gamma^*/\eta^*(\alpha); \leqslant_\alpha\rangle$, изоморфную ω^*, а на $\gamma/\eta^*(\alpha)$ — структуру $\langle\gamma/\eta^*(\alpha); \leqslant_\alpha\rangle$, изоморфную ω. Далее, для всех $x \in \gamma^*$ и $y \in \gamma$ положим $x/\eta^*(\alpha) \leqslant_\alpha y/\eta^*(\alpha)$. Позитивность отношения $\leqslant_\alpha$ следует из позитивности его ограничений на γ^* и γ а также вычислимости отношения $\{\langle x, y\rangle \mid x \in \gamma^* \wedge y \in \gamma\}$.

(г) Допустим, что α сжато и Z имеет позитивное представление над $\eta^*(\alpha)$, т.е. $\langle Z; \leqslant_\alpha /\eta^*(\alpha)\rangle \cong \langle Z; \leqslant\rangle$, где $\leqslant_\alpha$ — некоторое вычислимо перечислимое отношение. Определим множество $\beta_0 = \{x \mid x/\eta^*(\alpha) \leqslant_\alpha 0/\eta^*(\alpha)\}$, которое, очевидно, вычислимо перечислимо. Поскольку, как слева (в смысле $\leqslant_\alpha$), так и справа от 0 находится бесконечное число классов $\eta^*(\alpha)$ и α является характеристической трансверсалью для $\eta^*(\alpha)$, то вычислимо перечислимое множество β_0 делит сжатое множество α на две бесконечные части, что невозможно. *Предложение доказано.*

Линейные порядки над негативными эквивалентностями

Из Предложения 7 следует, если α — коперечислимое невычислимое множество, то любой негативно определимый над $\eta(\alpha)$ линейный порядок будет вычислимо представимым и недискретным, т.е., содержать предельную точку. Оказывается, это свойство является также и достаточным, что сразу даёт нам критерий представимости:

Теорема 4

Пусть α – коперечислимое, но не вычислимое множество, а $\mathfrak{L} = \langle L; \leqslant_L$ — произвольный линейный порядок. Тогда следующие условия эквивалентны:

(1) *$\mathfrak{L}$ имеет негативное представление над $\eta(\alpha)$;*

(2) *$\mathfrak{L}$ вычислимо представим и содержит хотя бы одну предельную точку.*

Доказательство. (1)$\Rightarrow$(2). Пусть порядок $\mathfrak{L}$ имеет негативное представление над $\eta(\alpha)$, т.е., существует коперечислимое отношение $\preccurlyeq \subseteq \omega^2$ такое, что $\eta(\alpha)$ — конгруэнция на $\langle\omega; \preccurlyeq\rangle$ и $\mathfrak{L}^* = \langle\omega; \preccurlyeq\rangle/\eta(\alpha) \cong \mathfrak{L}$. Если бы порядок $\mathfrak{L}$ не имел предельной точки, т.е. являлся бы дискретным, то, согласно Предложению 7, α было бы вычислимым, что противоречит предположению.

Покажем, что $\mathfrak{L}$ имеет вычислимое представление. Действительно, возьмём произвольный элемент $c_0 \in \alpha$ и рассмотрим отношение $x \vartriangleright y \leftrightarrow \neg(x \preccurlyeq y)$ на вычислимо перечислимом множестве $\beta = \overline{\alpha} \cup \{c_0\}$. По предположению, это отношение вычислимо перечислимо, а поскольку оно является строгим порядком, то его дополнение $\trianglelefteq$ также будет вычислимо перечислимым. Как легко заметить, $\langle\beta; \trianglelefteq\rangle \cong \mathfrak{L}$, откуда следует вычислимая представимость порядка $\mathfrak{L}$.

(2)$\Rightarrow$(1). Докажем теорему для случая правой предельной точки. Ситуация с левой предельной точкой рассматривается аналогично. Мы можем без ограничения общности предполагать, что $\mathfrak{L} = \langle \omega; \leqslant_L \rangle$ — вычислимый линейный порядок с правой предельной точкой 0. Нам понадобится эффективная предельность этой точки, которую мы получим из более общего факта:

Лемма 1

Всякая предельная точка негативного линейного порядка является эффективно предельной. Более того, для любой его правой (левой) предельной точки всегда существует сходящаяся к ней вычислимая последовательность, которая строго возрастает в смысле обычного порядка на ω и строго возрастает (убывает) относительно этого порядка.

Доказательство. Рассмотрим случай правой предельной точки. Случай левой предельной точки рассматривается аналогично.

Линейные порядки над негативными эквивалентностями

Пусть $\langle\omega;\preccurlyeq\rangle/\eta$ — произвольный негативный линейный порядок. Пусть q/η –– правая предельная точка этого порядка и $W=\{x \mid x \prec q\}$. Очевидно, что W — бесконечное вычислимо перечислимое множество. Зафиксируем его некоторое эффективное перечисление $W=\{w_0,w_1,w_2,\ldots\}$. Определим последовательность $m_0<m_1<\ldots$ по индукции. Положим $m_0=\min W$. Если число m_s уже определено, то мы по шагам перечисляем W и отношение $\prec$ до тех пор, пока не встретится $x\in W$ такое, что

$$(m_s<x)\wedge(m_s\prec^t x)\wedge\left(\bigwedge_{i\leqslant s}(w_i<x\wedge w_i\prec^t x)\right),$$

где $\prec^t$ — конечная часть $\prec$, перечисленная к текущему шагу t. Среди всех таких x выбираем $x=w_s$ с наименьшим номером s и объявляем его искомым элементом m_{s+1}. Выбор такого m_{s+1} всегда возможен ввиду предельности q/η. Очевидно, что последовательность $m_0,m_1,\ldots$ вычислима.

Непосредственно из построения вытекают следующие свойства:

$$m_0 < m_1 < m_2 < \dots, \quad \text{и} \quad m_0 \prec m_1 \prec m_2 \prec \dots .$$

Покажем, что последовательность $(m_i/\eta)_{i\in\omega}$ обладает требуемыми свойствами. Предположим, что существует число $w_n \in W$ такое, что для всех $i \in \omega$ выполнено $m_i \prec w_n$. Но по выбору m_{n+1} мы получим $w_n \prec m_{n+1}$. Противоречие. *Лемма доказана.*

Вернёмся к доказательству теоремы. В нашем вычислимом порядке $\mathfrak{L}$ зафиксируем произвольную вычислимую строго возрастающую последовательность $M = \{m_0 < m_1 < \dots\}$, сходящуюся к $0/\eta$ относительно порядка $\leqslant_L$. Заметим, что множество M вычислимо. Множество ω можно представить в виде дизъюнктного объединения $\omega = S_L \cup M \cup \{0\} \cup S_R$, где

$$S_L = \{x \in \omega \mid x <_L 0 \wedge x \notin M\}, \qquad (1)$$
$$S_R = \{x \in \omega \mid x >_L 0\}. \qquad (2)$$

Зафиксируем частичную вычислимую биекцию g из перечислимого множества $\overline{\alpha}$ на $\omega \setminus \{0\} = M \cup S_L \cup S_R$ такую, что множества $g^{-1}(S_L)$ и $g^{-1}(S_R)$ вычислимы. Ввиду вычислимости множеств S_L и S_R такая функция g, очевидно, существует. Теперь определим нумерацию порядка $\mathfrak{L}$ следующим образом: $\nu(x) = g(x) =$, если $x \in (\omega \setminus \alpha)$ и $\nu(x) = 0$, в противном случае. Заметим, что нумерационная эквивалентность для ν совпадает с $\eta(\alpha)$. Для завершения доказательства осталось проверить негативность отношения $\nu(x) \leqslant_L \nu(y)$.

Для этого достаточно проверить перечислимость его дополнения. Если $\nu(x) <_L \nu(y)$, то возможны следующие (не обязательно взаимоисключающие) случаи:

1. $x, y \in \overline{\alpha} \wedge g(x) <_L g(y)$
2. $x \notin g^{-1}(S_R) \wedge y \in g^{-1}(S_R)$
3. $x \in g^{-1}(S_L) \cup g^{-1}(M) \wedge y \notin g^{-1}(S_L)$, и для минимального s такого, что $m_s > g(x)$, выполнено $y \notin \{g^{-1}(m_0), \ldots, g^{-1}(m_{s-1})\}$.

Каждое из этих условий вычислимо перечислимо. Легко также убедиться, что любое из вышеперечисленных условий влечёт $\nu(x) <_L \nu(y)$. Таким образом, условие $\nu(x) <_L \nu(y)$ эквивалентно дизъюнкции этих трёх условий, откуда следует его перечислимость. *Теорема доказана.*

Следствие

Если α — подмножество ω с вычислимо перечислимым бесконечным дополнением, то над $\eta(\alpha)$ определимы порядки $\omega + 1$ и $1 + \omega^*$.

Для невычислимых α это следует из Теоремы 4, а для вычислимых очевидно.

Таким образом, линейный порядок $\omega + 1$ в определённом смысле является простейшим порядком, негативно определимым над $\eta(\alpha)$ для произвольного невычислимого α с вычислимо перечислимым дополнением.

Для позитивных эквивалентностей ситуация совершенно иная, как показывает

Предложение 9

Пусть α — вычислимо перечислимое невычислимое множество. Тогда:

(а) *если $\overline{\alpha}$ не иммунно, то над $\eta(\alpha)$ не определимы позитивные порядки типов $\omega+1$ и $1+\omega^*$;*

(б) *если $\overline{\alpha}$ регрессивно, то над $\eta(\alpha)$ определимы позитивные порядки типов $\omega+1$ и $1+\omega^*$.*

Доказательство. (а) Допустим, что над позитивной эквивалентностью $\eta(\alpha)$ определим порядок по типу $\omega+1$. Через $\leqslant_\alpha$ обозначим перечислимое бинарное отношение, представляющее его в нумерации, с нумерационнной эквивалентностью $\eta(\alpha)$. Из доказательства Предложения 7 следует, что класс α эквивалентности $\eta(\alpha)$, должен быть предельным и, следовательно, наибольшим элементом нашего порядка.

Предположим, что β — бесконечное вычислимо перечислимое подмножество $\overline{\alpha}$. Тогда, очевидно, $\overline{\alpha} = \{x \mid \exists y(y \in \beta \wedge x \leqslant_\alpha y)\}$, откуда следует перечислимость $\overline{\alpha}$. Стало быть α вычислимо. Противоречие.
Случай $1 + \omega^*$ рассматривается аналогично.
(б) Мы докажем утверждение для $\omega + 1$. Позитивный порядок типа $1 + \omega^*$ получится из построенного нами порядка простым обращением. Пусть $\overline{\alpha}$ регрессивно, $a_0, a_1, \ldots$ — его фиксированный пересчёт без повторений, и f –– частично рекурсивная функция такие, что область определения f содержит $\overline{\alpha}$, $f(a_0) = a_0$, и $f(a_{n+1}) = a_n$, для всех $n \in \omega$. Определим на $\omega/\eta(\alpha)$ порядок $\leqslant_\alpha$ по типу $\omega + 1$ следующим образом:

$$\{a_0\} \leqslant_\alpha \{a_1\} \leqslant_\alpha \{a_2\} \leqslant_\alpha \ldots \leqslant_\alpha \alpha.$$

Как нетрудно заметить, для любых $x, y \in \omega$ выполнена эквивалентность

$$x/\eta(\alpha) \leqslant_\alpha y/\eta(\alpha) \leftrightarrow y \in \alpha \vee \exists m \left(f^m(y) = x\right),$$

откуда непосредственно следует перечислимость отношения $x/\eta(\alpha) \leqslant_\alpha y/\eta(\alpha)$. *Предложение доказано.*

Следствие

Существует позитивный линейный порядок с предельной точкой, не являющейся эффективно предельной.

Доказательство. Таковым будет, например, порядок, существующий в силу приведенных выше замечаний, для любого простого множества α.

На самом деле верно и более сильное утверждение.

Теорема 5

Существует позитивный линейный порядок по типу рациональных чисел η, никакой элемент которого не является эффективно предельным.

Доказательство. Мы предполагаем зафиксированной некоторую разнозначную нумерацию ν множества $\mathbb{Q}$ рациональных чисел такую, что по любому $n \in \omega$ эффективно находится представление $\nu(n)$ в виде $\frac{k}{l}$, и по любому представлению рационального числа в виде $\frac{k}{l}$ эффективно находится $n \in \omega$ со свойством $\nu(n) = \frac{k}{l}$. Посредством этой нумерации ν мы будем естественным образом отождествлять рациональные и натуральные числа.

Нам понадобится следующая

Лемма

([a]) *Существует позитивная эквивалентность θ на $\mathbb{Q}$ такая, что*

1. *все её смежные классы выпуклы, открыты и ограничены;*
2. *если A – произвольное вычислимое множество рациональных чисел, являющееся объединением некоторого множества классов эквивалентности θ, то либо $A = \varnothing$ либо $A = \mathbb{Q}$.*

[a] A.S. Morozov, J.K. Truss. On Computable Automorphisms of the Rational Numbers // Journal of Symbolic Logic, 66, No. 3, 1458–1470.

В силу выпуклости смежных классов, и позитивности θ, отношение $\leqslant_\theta^*$, определённое, как

$$x \leqslant_\theta^* y \overset{df}{\Leftrightarrow} \exists x' \exists y' \left(\langle x, x' \rangle, \langle y, y' \rangle \in \theta \wedge x' \leqslant y' \right)$$

позитивно, θ будет конгруэнцией на $\langle \mathbb{Q}; \leqslant_\theta^* \rangle$, и фактор $\langle \mathbb{Q}; \leqslant_\theta^* \rangle / \theta$ будет линейным порядком, который мы будем обозначать на классах символом $\leqslant_\theta$. Покажем, что этот порядок изоморфен $\langle \mathbb{Q}; \leqslant$, для чего достаточно проверить его счётность, плотность и отсутствие концевых элементов.

Его счётность и отсутствие концевых элементов достаточно очевидны.

Докажем плотность этого порядка. Предположим, что $a/\theta <_\theta b/\theta$ и строго между a/θ и b/θ элементы отсутствуют. Тогда следующие непустые вычислимо перечислимые множества:

$$A = \{x \mid x/\theta \leqslant_\theta a/\theta\}, \text{ и} \quad (3)$$

$$B = \{x \mid b/\theta \leqslant_\theta x/\theta\}, \quad (4)$$

являются объединениями классов эквивалентности θ и образуют нетривиальное разбиение всего $\mathbb{Q}$ на два вычислимых множества, что противоречит п.2 сформулированной выше леммы.

Покажем, что никакая точка порядка $\langle \mathbb{Q}/\theta; \leqslant_\theta \rangle$ не может быть правой эффективно предельной. На самом деле нам проще будет доказать даже большее, а именно, что не существует перечислимого множества $M \subseteq \mathbb{Q}$ и элемента $m \in \mathbb{Q}$ со свойствами $M/\theta <_\theta m/\theta$ и $\sup M/\theta = m/\theta$.

Действительно, если бы такие M и m существовали, то тогда множество $\{x \in \mathbb{Q} \mid x/\theta <_\theta m/\theta\}$ можно было определить условием $\exists y \in M(x \leqslant^*_\theta y)$, гарантирующим его перечислимость, а его дополнение в $\mathbb{Q}$ — условием $m \leqslant^*_\theta x$, также гарантирующим его перечислимость. В результате мы бы получили разбиение $\mathbb{Q}$ на два непустых вычислимых множества, являющихся объединениями классов эквивалентности, что противоречит п. 2 леммы.

Случай левой эффективно предельной точки рассматривается аналогичо. *Теорема доказана.*

Вычислимые автоморфизмы негативных порядков

Наряду с решётками конгруэнций и подалгебр, важным инструментом исследования структурных свойств алгебраических систем являются группы их автоморфизмов. В теории вычислимости особую роль играют вычислимые автоморфизмы, которые в случае вычислимых систем образуют группы. Заметим, что вычислимые автоморфизмы любой нумерованной системы образуют полугруппу с единицей. Укажем некоторые, почти очевидные, условия, достаточные для того, чтобы эта полугруппа была группой.

Предложение 10

Пусть $(\mathfrak{R}, \nu)$ -– нумерованная система, удовлетворяющая хотя бы одному из следующих условий:

(а) ν — *позитивная нумерация;*

(б) *группа абстрактных автоморфизмов системы $\mathfrak{R}$ периодическая.*

Тогда вычислимые автоморфизмы нумерованной системы $(\mathfrak{R}, \nu)$ образуют группу.

Доказательство. П. (а) очевидно. Для доказательства п. (б) заметим, что если автоморфизм φ системы $\mathfrak{R}$ вычислим в нумерации ν, $\varphi^n = 1$, и f – вычислимая функция, представляющая его на ν-номерах, то φ^{n-1} есть обратный к φ, и f^{n-1} – вычислимая функция, представляющая φ^{n-1} на ν-номерах. *Предложение доказано.*

Стандартные диагональные рассуждения приводят к выводу о

существовании нумерованных систем, полугруппы вычислимых автоморфизмов которых не являются группами [?], в связи с чем возникает естественный и принципиальный вопрос о минимально возможной сложности нумерованной системы, обладающей этим свойством.

Автоморфизм (неважно, вычислимый или нет) нумерованной системы будем называть *вычислимо необратимым*, если обратный для него автоморфизм не является вычислимым.

Следующая теорема показывает, что такие эффекты возможны уже для негативных представлений фундаментальных систем, к которым, безусловно, относятся и линейные порядки. Таким образом, уже на уровне Π^0_1 иерархии Клини–Мостовского существуют представления систем с вычислимо необратимыми автоморфизмами, и, следовательно, эта оценка неулучшаема. Сначала мы приведём результат для негативной эквивалентности вида $\eta(\alpha)$.

Теорема 6

Существует негативный линейный порядок вида $\langle\omega/\eta(\alpha);\preccurlyeq\rangle$ по типу $(\omega^* + \omega) \times \omega + 1$, обладающий вычислимым вычислимо необратимым автоморфизмом, т.е., полугруппа вычислимых автоморфизмов этого порядка не является группой.

Доказательство. Зафиксируем некоторое разбиение натурального ряда на бесконечные попарно непересекающиеся множества γ_i, $i \in \mathbb{Z}$ и вычислимую функцию f такие, что отношение $x \in \gamma_i$ вычислимо, f взаимно однозначно и монотонно отображает γ_i на γ_{i+1} при всех $i \in \mathbb{Z}$ кроме $i = 0$ и взаимно–однозначно отображает γ_0 на невычислимое подмножество $\sigma \subseteq \gamma_1$.
Множество α определим заданием его дополнения:

$$\overline{\alpha} = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} f^m(\gamma_0).$$

Из определения видно, что α коперечислимо.
Сначала дадим неформальное определение порядка $\preccurlyeq$ на $\omega/\eta(\alpha)$. Множество α будет в нём максимальным элементом. На его дополнении каждый элемент образует одноэлементный класс эквивалентности $\eta(\alpha)$, а отображение f является перестановкой на $\overline{\alpha}$, все орбиты которой бесконечны.

Зададим порядок $\preccurlyeq$ сначала на одноэлементных классах внутри одной орбиты следующим образом:

$$f^m(x)/\eta(\alpha) \preccurlyeq f^n(x)/\eta(\alpha) \overset{df}{\Leftrightarrow} m \leqslant n, \quad \text{для всех } m, n \in \mathbb{Z}, \ x \in \overline{\alpha}.$$

Между элементами разных орбит установим следующее отношение порядка: если $A, B \subseteq \overline{\alpha}$ — f–орбиты, $A \cap \gamma_0 = \{a\}$, $B \cap \gamma_0 = \{b\}$, и $a < b$, то все элементы $A/\eta(\alpha)$ будут строго меньше всех элементов из $B/\eta(\alpha)$ относительно $\preccurlyeq$. Корректность этого определения легко проверяется.
Очевидно, что порядок $\preccurlyeq$ имеет тип $(\omega^* + \omega) \times \omega + 1$. Докажем негативность этого порядка. Для этого достаточно убедиться в том, что его дополнение, а именно, отношение $y/\eta(\alpha) \succ x/\eta(\alpha)$, вычислимо перечислимо.

Проверим следующую равносильность, из которой это будет следовать:

$$\begin{aligned} y/\eta(\alpha) \succ x/\eta(\alpha) \quad \Leftrightarrow \quad & \exists n \in \mathbb{Z} \exists z \in \gamma_0 \Big[x = f^n(z) \wedge & (5)\\ & \Big(\exists m > 0 \, (f^m(x) = y) \vee & (6)\\ & \exists i, k \in \mathbb{Z} \big(f^i(z), y \in \gamma_k \wedge y \notin f^i(\gamma_0 \cap \{0, \dots z\}) \big) \Big) \Big] & (7) \end{aligned}$$

Прежде, чем заняться проверкой, стоит особо отметить, что для любых $i \in \mathbb{Z}$ и $t \in \gamma_0$ значение $f^i(t)$ будет всегда определено, откуда мы получаем, что условие $f^i(\gamma_0 \cap \{0, \dots z\})$ будет равномерно вычислимым по i и z.

Предположим, что $y/\eta(\alpha) \succ x/\eta(\alpha)$. Поскольку $x/\eta(\alpha)$ не является наибольшим, $x \notin \alpha$, откуда следует существование n и z в (5) Далее возможен либо случай, когда y получается из x несколькими применениями f, что соответствует (6), либо x находится в орбите, порождаемой элементом $z \in \gamma_0$, и y не находится в орбитах, порождённых $\gamma_0 \cap \{0, \dots z\}$, что соответствует (7).

В обратную сторону доказательство очевидно. Итак, построенный нами порядок негативен.

Теперь остаётся заметить, что отображение $x/\eta(\alpha) \mapsto f(x)/\eta(\alpha)$ является вычислимым автоморфизмом, обратный к которому уже не является вычислимым, поскольку если бы он вычислялся посредством вычислимой функции h, имело бы место равенство $h^{-1}(\gamma_0) = \sigma$, откуда в свою очередь следовала бы вычислимость множества σ.

Теорема доказана.

Вычислимые автоморфизмы негативных порядков

Назовём два элемента *близкими*, если они либо совпадают, либо строго между ними нет других элементов. Подмножество $\mathcal{R}$ фактор–множества ω/η назовём *вычислимым*, если таковым является объединение классов эквивалентности η, образующих $\mathcal{R}$.

Предложение 11

Пусть $\mathfrak{L} = \langle \omega/\eta; \leqslant \rangle$ – негативный линейный порядок и $\mathfrak{L}_Z$ – его вычислимое выпуклое подмножество типа $\omega^* + \omega$ с вычислимо перечислимым отношением близости S на нём. Тогда полугруппа вычислимых автоморфизмов линейного порядка $\mathfrak{L}$ имеет бесконечную подгруппу.

Доказательство. Пусть β — вычислимое объединение всех η–классов из $\mathfrak{L}_Z$. Зафиксируем некоторое перечисление для отношения $R = \{\langle x, y \rangle \mid x/\eta < y/\eta\} \cap S$.

Вычислимые автоморфизмы негативных порядков

Вычислимую функцию f_0, выдающую по любому $x \in \beta$ такое $y = f_0(x)$, что y/η – последователь x/η, можно получить как результат униформизации отношения R или просто определить следующим образом:

> *перечисляем R пока не встретим пару вида $\langle x, y\rangle$ и тогда выдадим её правую координату y в качестве $f_0(x)$.*

Положим $f = f_0 \cup id_{\overline{\beta}}$. Вычислимая функция f, как легко заметить, индуцирует вычислимый автоморфизм φ структуры $\mathfrak{L}$, сдвигающий все элементы $\mathfrak{L}_Z$ на одну позицию вправо и оставляющий на месте все остальные элементы. Легко убедиться, что обратный к нему автоморфизм также является вычислимым и, таким образом, φ порождает бесконечную циклическую группу. *Предложение доказано.*

Следствие

Полугруппа вычислимых автоморфизмов негативного линейного порядка $\langle \omega/\eta(\alpha); \leqslant\rangle$ из Теоремы 6 имеет бесконечную подгруппу.

Используя похожие идеи и негативные эквивалентности вида, отличного от $\eta(\alpha)$, можно также получить порядок с бесконечным числом вычислимых автоморфизмов, среди которых только тривиальный имеет вычислимый обратный:

Теорема 7

Существует негативный линейный порядок $\langle \omega/\eta; \preccurlyeq \rangle$ порядкового типа $\omega \times (\omega^* + \omega)$, имеющий бесконечно много вычислимых автоморфизмов, но при этом любой вычислимый автоморфизм, обладающий вычислимым обратным, тривиален. Таким образом, полугруппа вычислимых автоморфизмов этого порядка бесконечна, но не имеет нетривиальных подгрупп.

Литература

1. Биркгоф Г. Теория решеток. М.: Наука, 1984, 568 с.
2. Гончаров С. С., Ершов Ю. Л. Конструктивные модели. Новосибирск: Научная книга, 1999, 360 с.
3. Ершов Ю. Л. Теория нумераций. М.: Наука, 1977, 416 с.
4. Ершов Ю. Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. М.: Наука, 1980, 415 с.
5. Кейслер Г., Чэн Ч. Ч. Теория моделей. М.: Мир, 1977, 614 с.
6. Кон П. М. Универсальная алгебра. М.: Мир, 1968, 352 с.
7. Мальцев А. И. Алгебраические системы. М.: Наука, 1970, 392 с.
8. Мартин-Леф П. Очерки по конструктивной математике. М.: Мир, 1975, 136 с.
9. Соар И. Р. Вычислимо перечислимые множества и степени. Казань: Казанское математическое общество. Под редакцией М.М. Арсланова, 2000, 576 с.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!!!