ЗАДАЧИ
студенческой олимпиады им. Н. И. Лобачевского
30 ноября 2025 г.

1. Последовательность задана рекуррентным соотношением $a_{n+1} = a_n - \dfrac{b}{(a_n)^2}$. При каких значениях a_1 и b она ограничена?

2. Найти общие касательные параболы $y = x^2$ и окружности $x^2 + (y+5)^2 = 1$.

3. Найдите минимальное значение выражения $\sqrt{x^2+u^2+1} + \sqrt{y^2+v^2+9} + \sqrt{z^2+w^2+100}$ при условиях $x+y+z=2$, $u+v+w=5$.

4. В линейном пространстве вещественных квадратных матриц порядка 3 найти размерность подпространства матриц, у которых сумма элементов по всем горизонталям, вертикалям и диагоналям одинакова (3 балла). Выписать базис этого подпространства, каждый элемент которого является симметричной или кососимметричной матрицей с элементами $0, \pm 1$ (4 балла).

5. Настольная игра состоит из поля с упорядоченным набором позиций $0, 1, 2, \ldots, 25$, фишки и игральной кости с числами на гранях от 1 до 6. Изначально фишка находится в позиции 0. Игра состоит в последовательном бросании игральной кости и передвижении фишки вперед на соответствующее число позиций до тех пор, пока фишка не выйдет за пределы поля. До начала игры Петя отмечает одну позицию с номером $n \geqslant 1$. Петя считается победителем в игре, если фишка окажется на отмеченной позиции после какого-нибудь броска кости. Какой номер n следует выбрать Пете, чтобы максимизировать свои шансы на победу?

6. При всех $n \in \mathbb{N}$ сравнить значения $S_1(n) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n!}$ и $S_2(n) = \frac{F_n}{F_{n+1}}$, где F_n – n-е число Фибоначчи.

7. а) Найти все такие $a \in \mathbb{C}$, для которых существуют комплексные 5×5 матрицы X, Y такие, что $XY = aYX$ и $XY \neq 0$ (2 балла).
б) Решить эту же задачу при дополнительном требовании невырожденности матриц X и Y (5 баллов).

8. Доказать, что любое $c \in \mathbb{Z}$ можно представить в виде $c = 2026a + b$, где $a, b \in \mathbb{Z}$ и $b^{1013} - b$ делится на 2026^2.

9. Гиперповерхность второго порядка $\Phi = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 | x^2 + y^2 + z^2 - w^2 = 1\}$ в пространстве $\mathbb{R}^4$ рассматривается как топологическое пространство с индуцированной топологией. Доказать, что пространство Φ гомеоморфно некоторому открытому связному подмножеству в $\mathbb{R}^3$.

10. Покупатель выбирал себе две дыни из пяти имеющихся, причём суммарный вес этих пяти дынь составлял 17 кг. Взвесив пять различных пар дынь (одна дыня может входить в несколько пар), покупатель получил веса в 3, 5, 7, 9 и 11 кг. Какой вес мог быть у каждой из пяти дынь в отдельности? Найти все возможные решения в положительных вещественных числах.

11. Пусть A', B' и C' – внутренние точки сторон BC, CA и AB треугольника ABC соответственно. Доказать, что эллипс, касающийся сторон треугольника ABC в точках A', B' и C' существует тогда и только тогда, когда прямые AA', BB' и CC' пересекаются в одной точке.