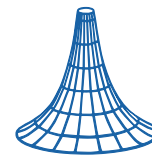




**ЗАДАЧИ**  
**студенческой олимпиады им. Н. И. Лобачевского**  
*30 ноября 2025 г.*



1. Последовательность задана рекуррентным соотношением  $a_{n+1} = a_n - \frac{b}{(a_n)^2}$ . При каких значениях  $a_1$  и  $b$  она ограничена?
2. Найти общие касательные параболы  $y = x^2$  и окружности  $x^2 + (y + 5)^2 = 1$ .
3. Найдите минимальное значение выражения  $\sqrt{x^2 + u^2 + 1} + \sqrt{y^2 + v^2 + 9} + \sqrt{z^2 + w^2 + 100}$  при условиях  $x + y + z = 2$ ,  $u + v + w = 5$ .
4. В линейном пространстве вещественных квадратных матриц порядка 3 найти размерность подпространства матриц, у которых сумма элементов по всем горизонталям, вертикалям и диагоналям одинакова (3 балла). Выписать базис этого подпространства, каждый элемент которого является симметричной или кососимметричной матрицей с элементами  $0, \pm 1$  (4 балла).
5. Настольная игра состоит из поля с упорядоченным набором позиций  $0, 1, 2, \dots, 25$ , фишки и игровой кости с числами на гранях от 1 до 6. Изначально фишка находится в позиции 0. Игра состоит в последовательном бросании игровой кости и передвижении фишки вперед на соответствующее число позиций до тех пор, пока фишка не выйдет за пределы поля. До начала игры Петя отмечает одну позицию с номером  $n \geq 1$ . Петя считается победителем в игре, если фишка окажется на отмеченной позиции после какого-нибудь броска кости. Какой номер  $n$  следует выбрать Пете, чтобы максимизировать свои шансы на победу?
6. При всех  $n \in \mathbb{N}$  сравнить значения  $S_1(n) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n!}$  и  $S_2(n) = \frac{F_n}{F_{n+1}}$ , где  $F_n$  –  $n$ -е число Фибоначчи.
7. а) Найти все такие  $a \in \mathbb{C}$ , для которых существуют комплексные  $5 \times 5$  матрицы  $X, Y$  такие, что  $XY = aYX$  и  $XY \neq 0$  (2 балла).  
б) Решить эту же задачу при дополнительном требовании невырожденности матриц  $X$  и  $Y$  (5 баллов).
8. Доказать, что любое  $c \in \mathbb{Z}$  можно представить в виде  $c = 2026a + b$ , где  $a, b \in \mathbb{Z}$  и  $b^{1013} - b$  делится на  $2026^2$ .
9. Гиперповерхность второго порядка  $\Phi = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 | x^2 + y^2 + z^2 - w^2 = 1\}$  в пространстве  $\mathbb{R}^4$  рассматривается как топологическое пространство с индуцированной топологией. Доказать, что пространство  $\Phi$  гомеоморфно некоторому открытому связному подмножеству в  $\mathbb{R}^3$ .
10. Покупатель выбирал себе две дыни из пяти имеющихся, причём суммарный вес этих пяти дынь составлял 17 кг. Взвесив пять различных пар дынь (одна дыня может входить в несколько пар), покупатель получил веса в 3, 5, 7, 9 и 11 кг. Какой вес мог быть у каждой из пяти дынь в отдельности? Найти все возможные решения в положительных вещественных числах.
11. Пусть  $A', B'$  и  $C'$  – внутренние точки сторон  $BC, CA$  и  $AB$  треугольника  $ABC$  соответственно. Доказать, что эллипс, касающийся сторон треугольника  $ABC$  в точках  $A', B'$  и  $C'$  существует тогда и только тогда, когда прямые  $AA', BB'$  и  $CC'$  пересекаются в одной точке.