СТАТИТСТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ ЧАСТИЦ СО СКАЛЯРНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ В СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНОЙ МЕТРИКЕ

МИФТАХОВ Р.Ф.

Gracos - 17

Казань, 2017

Сферически-симметричное пространство-время

Рассматривается пространство-время со сферически-симметричной метрикой

$$ds^2 = a(\eta)^2 e^{\nu} d\eta^2 - a(\eta)^2 e^{\lambda}[dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)]$$

Работы по данной теме

1. **Yu.G. Ignatyev, R.F. Miftakhov** Statistical systems of particles with scalar interaction in cosmology/ Gravitation and Cosmology - 2006. - Vol.12(3). - P. 179-185.

2. **Ю.Г.Игнатьев, Н. Эльмахи** Динамическая модель сферических возмущений во вселенной Фридмана/ Известия вузов. Физика. - 2008. - № 1. - С. 67-76.

3. **Yu.G. Ignatyev, A.A.Popov** Spherically symmetric perturbation of a ultrarelativistic fluid in a homogeneousand isotropic Universe / Physics Letters - 1996. - Vol.220.

Тензор энергии-импульса

Материя представлена в виде двухкомпонентной системы

Скалярное поле, потенциала Φ

$$\underset{s}{T}^{ik} = \frac{\epsilon_1}{8\pi}\left[2\Phi^{,i}\Phi^{,k} - g^{ik}\Phi_{,j}\Phi^{,j} + \epsilon_2 m^2 g^{ik}\Phi^2\right]$$

$$\underset{s}{T}{}^1_1 = 2m^2\Phi^2 - \frac{\dot{\Phi}^2}{a^2e^\nu} + \frac{\Phi'^2}{a^2e^\lambda}$$

$$\underset{s}{T}{}^2_2 = \underset{s}{T}{}^3_3 = 2m^2\Phi^2 - \frac{\dot{\Phi}^2}{a^2e^\nu} - \frac{\Phi'^2}{a^2e^\lambda}$$

$$\underset{s}{T}{}^4_4 = 2m^2\Phi^2 + \frac{\dot{\Phi}^2}{a^2e^\nu} - \frac{\Phi'^2}{a^2e^\lambda}$$

$$\underset{s}{T}{}^1_4 = -\frac{2\Phi'\dot{\Phi}}{a^2e^\lambda}; \quad \underset{s}{T}{}^4_1 = \frac{2\Phi'\dot{\Phi}}{a^2e^\nu}.$$

$${}^{*}\ \dot{f} \equiv \frac{\partial f}{\partial \eta}; \quad f' \equiv \frac{\partial f}{\partial r}.$$

Случай классического скалярного поля и отталкиванием частиц $\epsilon_2 = 1$, $\epsilon_1 = 1$

Тензор энергии-импульса

Статистическая система скалярно заряженных частиц

$$\underset{p}{T}^{ik} = (\varepsilon + P)u^i u^k - Pg^{ik}$$

Компонент 4-скорости и давление с плотностью энергии

$$\varepsilon = \varepsilon(r,\eta),\ P = P(r,\eta),\ u^i = \left(u^1, 0, 0, u^4\right)$$

$$u^4 = \frac{e^{-\frac{\nu}{2}}}{a\sqrt{1-v^2}},\ u^1 = ve^{-\frac{\lambda}{2}}e^{-\frac{\nu}{2}} \cdot u^4.$$

Компонент ТЭИ

$$\underset{p}{T}{}^1_1 = \frac{v^2}{1-v^2}(\varepsilon + P) - P$$

$$\underset{p}{T}{}^2_2 = \underset{p}{T}{}^3_3 = -P.$$

$$\underset{p}{T}{}^1_4 = \frac{ve^{\frac{\lambda-\nu}{2}}}{1-v^2}(\varepsilon + P)$$

$$\underset{p}{T}{}^4_4 = -\frac{\varepsilon + v^2 P}{1-v^2};$$

Уравнения Эйнштейна

Статистическая система скалярно заряженных частиц

$$\binom{1}{1}: \ \frac{1}{a^2}e^{-\nu}\left(-\frac{3}{4}\dot{\lambda}^2+\frac{1}{2}\dot{\lambda}\dot{\nu}-\ddot{\lambda}-\frac{2\dot{a}}{a}\dot{\lambda}+\frac{\dot{a}}{a}\dot{\nu}-\frac{2\ddot{a}}{a}+\frac{\dot{a}^2}{a^2}\right)+\frac{1}{a^2}e^{-\lambda}\left(\frac{1}{4}\lambda'^2+\frac{1}{2}\lambda'\nu'+\frac{1}{r}(\lambda'+\nu')\right)=$$

$$=8\pi\left(2m^2\Phi^2-\frac{\dot{\Phi}^2}{a^2e^{\nu}}+\frac{\Phi'^2}{a^2e^{\lambda}}+\frac{v^2}{1-v^2}(\varepsilon+P)-P\right)$$

$$\binom{2}{2}: \ \frac{1}{a^2}e^{-\nu}\left(-\frac{3}{4}\dot{\lambda}^2+\frac{1}{2}\dot{\lambda}\dot{\nu}-\ddot{\lambda}-\frac{2\dot{a}}{a}\dot{\lambda}+\frac{\dot{a}}{a}\dot{\nu}-\frac{2\ddot{a}}{a}+\frac{\dot{a}^2}{a^2}\right)+\frac{1}{a^2}e^{-\lambda}\left(\frac{1}{4}\nu'^2+\frac{1}{2}(\lambda''+\nu'')+\frac{1}{2r}(\lambda'+\nu')\right)=$$

$$=8\pi\left(2m^2\Phi^2-\frac{\dot{\Phi}^2}{a^2e^{\nu}}-\frac{\Phi'^2}{a^2e^{\lambda}}-P\right)$$

$$\binom{4}{4}: \ -\frac{3}{a^2}e^{-\nu}\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2}+\frac{\dot{a}}{a}\dot{\lambda}+\frac{1}{4}\dot{\lambda}^2\right)+\frac{1}{a^2}e^{-\lambda}\left(\frac{1}{4}\lambda'^2+\lambda''+\frac{2}{r}\lambda'\right)=8\pi\left(2m^2\Phi^2+\frac{\dot{\Phi}^2}{a^2e^{\nu}}-\frac{\Phi'^2}{a^2e^{\lambda}}-\frac{\varepsilon+v^2P}{1-v^2}\right)$$

$$\binom{1}{4}: \ -\frac{e^{-\nu}}{a^3}\left(\frac{1}{2}a\nu'\dot{\lambda}-a\dot{\lambda}'+\dot{a}\nu'\right)=8\pi\left(-\frac{2\Phi'\dot{\Phi}}{a^2e^{\lambda}}-\frac{ve^{\frac{-\lambda+\nu}{2}}}{1-v^2}(\varepsilon+P)\right)$$

Сферически-симметричные возмущения

Следствием уравнений Эйнштейна является уравнение

$$\frac{1}{a^2}e^{-\lambda}\left(\frac{1}{4}\lambda'^2-\frac{1}{4}\nu'^2+\frac{1}{2}\lambda'\nu'-\frac{1}{2}(\lambda''+\nu'')+\frac{1}{2r}(\lambda'+\nu')\right)=8\pi\left(\frac{2\Phi'^2}{a^2e^{\lambda}}+\frac{v^2}{1-v^2}(\varepsilon+P)\right)$$

Рассмотрим сферически-симметричные возмущения однородного изотропного космологического решения, полагая:

$$\lambda=\lambda_0+\delta\lambda;\quad \nu=\nu_0+\delta\nu$$
$$\Phi(r,\eta)=\Phi_0(\eta)+\delta\phi(r,\eta)$$
$$P=P_0(\eta);\quad \varepsilon=\varepsilon_0(\eta);\quad v_0=0$$

В нулевом приближении получим

$$\frac{\dot a^2}{a^4}=\frac{8\pi}{3}\varepsilon;$$
$$\frac{2\ddot a}{a^3}-\frac{\dot a^2}{a^4}=8\pi P;$$

Сферически-симметричные возмущения

В первом приближении уравнений Эйнштейна имеют вид

$$\binom{1}{1} - \binom{2}{2}: \quad \frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{2r}(\lambda' + \nu') - \frac{1}{2}(\lambda'' + \nu'')\right) = 0;$$

$$\binom{3}{3}: \quad \frac{1}{a^2}\left(\frac{2\ddot{a}}{a}\nu + \frac{\dot{a}}{a}\dot{\nu} - \frac{2\dot{a}}{a}\dot{\lambda} - \frac{\dot{a}^2}{a^2}\nu - \ddot{\lambda}\right) + \frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{2}(\lambda'' + \nu'') - \frac{1}{2r}(\nu' + \lambda')\right)$$

$$= -16\pi\left(2m^2\Phi_0\phi - \frac{\dot{\phi}\dot{\Phi}_0}{a^2}\right);$$

$$\binom{4}{4}: \quad \frac{3}{a^2}\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2}\nu - \frac{\dot{a}}{a}\dot{\lambda}\right) + \frac{1}{a^2}(\lambda'' + \frac{2}{r}\lambda') = -16\pi\left(2m^2\Phi_0\phi + \frac{\dot{\phi}\dot{\Phi}_0}{a^2}\right);$$

$$\binom{1}{4}: \quad -\frac{\dot{a}}{a^3}\nu' + \frac{1}{a^2}\dot{\lambda}' = 0;$$

$$\binom{4}{1}: \quad \frac{\dot{a}}{a^3}\nu' - \frac{1}{a^2}\dot{\lambda}' = 0.$$

Уравнения Эйнштейна в первом приближении

Получим замкнутое уравнение относительно λ, ν

$$\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{a^2 r}(\lambda+\nu)' = 0.$$

За пределами некотрой сферы $r > r_0$

$$\lambda + \nu = 0; \lambda = -\nu.$$

Конечный вид уравнений Эйнштейна в первом приближении

$$\binom{3}{3}:\ \frac{1}{a^2}\left((\frac{2\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2})\nu + \frac{3\dot{a}}{a}\dot{\nu} - \ddot{\nu}\right) = -16\pi\left(2m^2\Phi_0\phi - \frac{\dot{\phi}\dot{\Phi}_0}{a^2}\right);$$

$$\binom{4}{4}:\ \frac{3}{a^2}\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2}\nu + \frac{\dot{a}}{a}\dot{\nu}\right) - \frac{1}{a^2}(\nu'' - \frac{2}{r}\nu') = -16\pi\left(2m^2\Phi_0\phi + \frac{\dot{\phi}\dot{\Phi}_0}{a^2}\right);$$

$$\binom{1}{4}:\ -\frac{\dot{a}}{a^3}\nu' - \frac{1}{a^2}\dot{\nu}' = 0;$$

$$\binom{4}{1}:\ \frac{\dot{a}}{a^3}\nu' + \frac{1}{a^2}\dot{\nu}' = 0.$$

Компоненты статистической системы

Макроскопические плотности в условиях полностью вырожденной системы Ферми-частиц

$$n = \frac{1}{3\pi^2} p_F^3;$$

$$\underset{p}{\varepsilon} = \frac{{m_*}^4}{8\pi^2}\left(\psi\sqrt{1+\psi^2}(1+2\psi^2) - \ln(\psi + \sqrt{1+\psi^2})\right);$$

$$\underset{p}{P} = \frac{{m_*}^4}{24\pi^2}\left(\psi\sqrt{1+\psi^2}(2\psi^2-3) + 3\ln(\psi + \sqrt{1+\psi^2})\right);$$

$$\sigma = q\frac{{m_*}^3}{2\pi^2}\left(\psi\sqrt{1+\psi^2} - \ln(\psi + \sqrt{1+\psi^2})\right),$$

Возмущени по функции $\psi = \frac{p_F}{m_*}, m_* = |m_0 + q\Phi|$