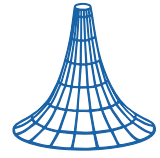




ЗАДАЧИ
студенческой олимпиады им. Н. И. Лобачевского
2 декабря 2023 г.



1. Дано число $a \in (0; 1)$. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & a \end{pmatrix}^n$.
2. По двум пересекающимся прямым, угол между которыми равен 2α , катится сфера радиуса R . Доказать, что центр сферы при этом движется по эллипсу и найти полуоси этого эллипса.
3. Доказать, что интеграл $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^n x \, dx$ является иррациональным числом при всех $n \in \mathbb{N}$ (При доказательстве можно использовать иррациональность чисел e , π , а также $\ln m$ при натуральных $m > 1$).
4. Пусть полином $P_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$, $a_i \geq 0$ имеет только действительные корни. Верно ли, что $a_i^2 \geq a_{i-1} a_{i+1}$ для любого $i = 1, \dots, n-1$.
5. Отрезок, соединяющий середины противоположных сторон выпуклого четырёхугольника, равен полусумме двух других сторон четырёхугольника. Доказать, что этот четырёхугольник – трапеция или параллелограмм.
6. Даны p карточек (p – простое число), на которых написаны целые числа. Максимум одно из этих чисел делится на p . Доказать, что для любого r , $0 \leq r < p$ можно выбрать несколько карточек, которые в сумме дадут остаток r при делении на p .
7. Элементы невырожденной квадратной матрицы A порядка n имеют вид $a_{ij} = \frac{1}{x_i + y_j}$. Докажите, что сумма всех элементов матрицы A^{-1} , равна $\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)$.
8. Имеется 100 шаров, на которых написаны числа $1, 2, \dots, 100$. Заплатив 90 рублей, игрок может случайным образом выбрать из них n различных шаров (например, вытаскивая шары из мешка), после чего он получит в качестве премии столько рублей, каково максимальное число на выбранных им шарах. Найти наименьшее n , при котором математическое ожидание размера премии превысит 90 рублей.
9. По границе n -мерного куба $\{(x^1, x^2, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x^i \leq 1, i = 1, 2, \dots, n\}$ из вершины $O(0, 0, \dots, 0)$ в вершину $E(1, 1, \dots, 1)$ ползет (n -мерный) муравей. Указать для него кратчайший маршрут и вычислить его длину для а) $n = 4$ (4 балла), б) любого $n > 4$ (3 балла).
10. Четыре путешественника одновременно начинают движение на плоскости по прямолинейным маршрутам с постоянной скоростью. У каждого путешественника своя скорость и своя начальная точка. Все четыре траектории движения, представляющие собой лучи, попарно пересекаются, в каждой точке пересечения встречается ровно две траектории. Известно, что первый и второй встретятся (т.е. будут находиться в одной точке в один момент времени) как между собой, так и со всеми остальными. Можно ли утверждать, что третий и четвертый путешественники также встретятся?
11. Четыре путешественника одновременно начинают движение на сфере с постоянной скоростью в антиподальные (т.е. симметричные относительно центра сферы) точки. У каждого путешественника своя скорость и своя начальная точка. Все четыре траектории движения, представляющие собой половины больших окружностей, попарно пересекаются, в каждой точке пересечения встречается ровно две траектории. Известно, что первый и второй встретятся (т.е. будут находиться в одной точке в один момент времени) как между собой, так и со всеми остальными. Можно ли утверждать, что третий и четвертый путешественники также встретятся?