ЗАДАЧИ
студенческой олимпиады им. Н. И. Лобачевского
2 декабря 2023 г.

1. Дано число $a \in (0;1)$. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & a \end{pmatrix}^n$.

2. По двум пересекающимся прямым, угол между которыми равен 2α, катится сфера радиуса R. Доказать, что центр сферы при этом движется по эллипсу и найти полуоси этого эллипса.

3. Доказать, что интеграл $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^n x\, dx$ является иррациональным числом при всех $n \in \mathbb{N}$ (При доказательстве можно использовать иррациональность чисел e, π, а также $\ln m$ при натуральных $m > 1$).

4. Пусть полином $P_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$, $a_i \geqslant 0$ имеет только действительные корни. Верно ли, что $a_i^2 \geqslant a_{i-1}a_{i+1}$ для любого $i = 1, \ldots, n-1$.

5. Отрезок, соединяющий середины противоположных сторон выпуклого четырёхугольника, равен полусумме двух других сторон четырехугольника. Доказать, что этот четырёхугольник – трапеция или параллелограмм.

6. Даны p карточек (p — простое число), на которых написаны целые числа. Максимум одно из этих чисел делится на p. Доказать, что для любого r, $0 \leqslant r < p$ можно выбрать несколько карточек, которые в сумме дадут остаток r при делении на p.

7. Элементы невырожденной квадратной матрицы A порядка n имеют вид $a_{ij} = \frac{1}{x_i + y_j}$. Докажите, что сумма всех элементов матрицы A^{-1}, равна $\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)$.

8. Имеется 100 шаров, на которых написаны числа 1, 2, …, 100. Заплатив 90 рублей, игрок может случайным образом выбрать из них n различных шаров (например, вытаскивая шары из мешка), после чего он получит в качестве премии столько рублей, каково максимальное число на выбранных им шарах. Найти наименьшее n, при котором математическое ожидание размера премии превысит 90 рублей.

9. По границе n-мерного куба $\{(x^1, x^2, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n \,|\, 0 \leqslant x^i \leqslant 1,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$ из вершины $O(0, 0, \ldots, 0)$ в вершину $E(1, 1, \ldots, 1)$ ползет (n-мерный) муравей. Указать для него кратчайший маршрут и вычислить его длину для а) $n = 4$ (4 балла), б) любого $n > 4$ (3 балла).

10. Четыре путешественника одновременно начинают движение на плоскости по прямолинейным маршрутам с постоянной скоростью. У каждого путешественника своя скорость и своя начальная точка. Все четыре траектории движения, представляющие собой лучи, попарно пересекаются, в каждой точке пересечения встречается ровно две траектории. Известно, что первый и второй встретятся (т.е. будут находиться в одной точке в один момент времени) как между собой, так и со всеми остальными. Можно ли утверждать, что третий и четвертый путешественники также встретятся?

11. Четыре путешественника одновременно начинают движение на сфере с постоянной скоростью в антиподальные (т.е. симметричные относительно центра сферы) точки. У каждого путешественника своя скорость и своя начальная точка. Все четыре траектории движения, представляющие собой половины больших окружностей, попарно пересекаются, в каждой точке пересечения встречается ровно две траектории. Известно, что первый и второй встретятся (т.е. будет находиться в одной точке в один момент времени) как между собой, так и со всеми остальными. Можно ли утверждать, что третий и четвертый путешественники также встретятся?