Турнир юных математиков им. Н.И. Лобачевского,
Казань, 21 апреля 2019 г.
Вариант 1

5 класс

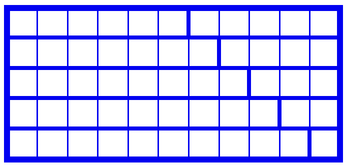
1. Две лестницы имеют одинаковую высоту, но разное число ступеней: у первой — 20 ступеней, у второй — 30 ступеней. У каждой лестницы ступеньки одинаковой высоты, но у первой лестницы каждая ступенька на 10 *см* выше каждой ступеньки второй лестницы. Найдите высоту лестниц.

Ответ: 6 *метров*.
Решение. 20 ступенек первой лестницы выше 20 ступенек второй на $20 \cdot 10 = 200$ *см*. Поскольку высота лестниц одна и та же, остальные 10 ступенек второй лестницы должны иметь высоту 200 *см*, и значит, высота каждой ступеньки второй лестницы $200 : 10 = 20$ *см*. Отсюда высота лестниц $30 \cdot 20 = 600$ *см*.
Критерии. Только ответ — 0 баллов.

2. В записи $4 * 5 * 6 * 7 * 44 * 45 * 46 * 47$ на месте каждой звездочки поставили знак + или – (по своему усмотрению) и подсчитали результат. Какое *наименьшее* натуральное число могло получиться в результате вычисления?

Ответ: 2.
Решение. Искомая сумма состоит из 4-х нечётных чисел 5, 7, 45, 47 и 4-х чётных. Поскольку сумма или разность *двух* нечётных чисел всегда чётна, при любой расстановке знаков у 4-х нечётных слагаемых получится чётная сумма. Таким образом, сумма S всех 8 чисел всегда будет чётной, и значит, не может быть равна 1, поэтому $S \geq 2$. Значение $S = 2$ получается, например, так: $(4 - 5 - 6 + 7) - 44 + 45 - 46 + 47 = 2$.
Критерии. Ответ без объяснений и примера — 0 баллов, только пример — 3 балла.

3. Можно ли разрезать клетчатый прямоугольник 5×11 по клеточкам на 10 прямоугольников *различной* площади? В ответе укажите все возможные значения этих площадей.



Ответ: *можно* (*см. рисунок*).
Решение. В прямоугольнике $5 \times 11 = 55$ клеток. Сумма 10 различных *наименьших* чисел $1 + 2 + 3 + \ldots + 10$ равна 55, поэтому разрезать можно только на прямоугольники с такими площадями.
Критерии. Ответ без объяснений и примера — 0 баллов, только пример — 4 балла.

4. Вася записал трёхзначное число. Петя прибавил к первой слева цифре этого числа 2, ко второй цифре — 3, к третьей — 4, а затем перемножил полученные суммы. У Пети получилось число 195. Какое число могло быть записано Васей? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 129 *или* 309.
Решение. Разложим 195 в произведение простых чисел: $195 = 3 \cdot 5 \cdot 13$. Наибольший сомножитель 13 можно получить только из 9 после операция добавления 4, значит, цифра единиц числа Васи равна 9. Сомножитель 3 можно получить только в двух случаях: $1 + 2$ или $0 + 3$. И значит, у Васи было число 129 или 309.
Критерии. За каждый правильный ответ без объяснений — 2 балла. Доказано, что последняя цифра только 9 — ещё 1 балл. Полное объяснение с упущенным вариантом — 5 баллов.

5. У Миши есть 15 гирек с массами 1, 2, 3, … , 15, и он хочет разложить их на несколько кучек разной массы так, чтобы выполнялось условие: чем тяжелее кучка, тем меньше в ней гирь. Сможет ли Миша разложить все гирьки *а*) на 3 кучки? *б*) на 4 кучки?

Ответ: *а) сможет*; *б) не сможет*.

Решение. *а*) Это можно сделать, например, так. Составим кучку из первых 7 гирек и ещё одной гири массой 9; общая масса этих 8 гирек равна $1 + 2 + \ldots + 7 + 9 = 37$. Вторую кучку составим из 4 гирек 8, 10, 11 и 12 общей массой $8 + 10 + 11 + 12 = 41$, и, наконец, в третью кучку возьмём оставшиеся 3 гири с общей массой $13 + 14 + 15 = 42$.

б) Предположим, что можно разложить гирьки требуемым образом. Общая масса всех гирек равна $1 + 2 + \ldots + 15 = 120$. Значит, масса самой тяжёлой кучки будет не меньше $120 : 4 = 30$. Масса двух самых тяжёлых гирек $14 + 15 < 30$, поэтому в тяжёлой кучке не меньше трёх гирек. Но тогда в следующей, более лёгкой, кучке не меньше 4 гирек, в следующей — не меньше 5 гирек, и так далее. Тогда общее количество гирек не меньше $3 + 4 + 5 + 6 > 15$, противоречие.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Правильный пример в пункте *а*) — 2 балла. В пункте *б*) отмечено, что масса самой тяжёлой кучки не меньше 30, — 2 балла. Доказано, что в самой тяжёлой кучке не менее трёх гирек, — ещё 1 балл. Полное решение — 7 баллов.

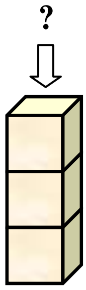
6 класс

1. В записи $3 * 4 * 5 * 6 * 12 * 13 * 14 * 15$ на месте каждой звездочки поставили знак + или – (по своему усмотрению) и подсчитали результат. Какое *наименьшее* целое положительное число могло получиться в результате вычисления?

Ответ: 2.
Решение. Искомая сумма состоит из 4 нечётных чисел 3, 5, 13, 15 и 4-х чётных. Поскольку сумма или разность *двух* нечётных чисел всегда чётна, при любой расстановке знаков у 4-х нечётных слагаемых получится чётная сумма. Таким образом, сумма S всех 8 чисел всегда будет чётной, и значит, не может быть равна 1, поэтому $S \geq 2$. Значение $S = 2$ получается, например, так: $(3 - 4 - 5 + 6) - 12 + 13 - 14 + 15 = 2$.
Критерии. Ответ без объяснений и примера — 0 баллов, только пример — 3 балла.

2. Однажды мышки подружились с кошками, и каждая мышка послала по открытке каждой кошке, так что все кошки вместе получили 100 открыток. Сколько было кошек и мышек вместе, если известно, что их было не больше 25?

Ответ: 20 *или* 25.
Решение. Пусть мышек было m, а кошек — k. Каждая мышка послала всем кошкам k открыток, поэтому общее число открыток равно $m \cdot k = 100$, и значит, m и k — делители числа 100, причём $m + k \leq 25$. Выпишем все разложения числа 100 на два множителя: $10 \cdot 10 = 20 \cdot 5 = 25 \cdot 4 = 50 \cdot 2 = 100 \cdot 1$, и оставим только первые два, для которых сумма делителей не более 25. Значит, кошек и мышек вместе было $10 + 10 = 20$ или $20 + 5 = 25$.
Критерии. Приведены (без объяснений) все варианты — 4 балла. Доказано, что других вариантов нет — ещё 3 балла.



3. У Пети есть несколько одинаковых игральных кубиков, у каждого кубика на каждой грани записано натуральное число, сумма чисел на противоположных гранях равна 7. Петя хочет склеить из них башню (см. рисунок) так, чтобы сумма чисел на каждой паре *склеенных* граней равнялась 6. Какой высоты башня у него может получиться? В ответе запишите количество кубиков в самой высокой башне и объясните, почему нельзя склеить более высокую башню.

Ответ: 6 *кубиков*.
Решение. Пусть x — число на нижней грани нижнего кубика. Тогда на противоположной (верхней) грани этого кубика будет число $7 - x$. Сумма чисел на склеенных гранях равна 6, поэтому число на нижней грани второго снизу кубика равно $x - 1$. Тогда на противоположной (верхней) грани этого кубика будет число $8 - x$. Рассуждая таким образом, получим следующее распределение чисел на нижних и верхних гранях кубиков, считая от основания башни:

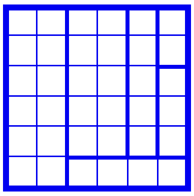
$$(x;\ 7 - x),\ (x - 1,\ 8 - x),\ (x - 2,\ 9 - x),\ (x - 3,\ 10 - x),\ (x - 4,\ 11 - x),\ (x - 5,\ 12 - x),\ \ldots\ .$$

Все выписанные числа положительны, поэтому $7 - x \geq 1$, то есть $x \leq 6$. Если в башне есть ещё 7-й кубик, то на его нижней грани будет число $x - 6 \leq 0$, противоречие. Для самой высокой башни из 6 кубиков получаем: (6; 1), (5, 2), (4, 3), (3, 4), (2, 5), (1, 6).
Критерии. Ответ без объяснений и примера — 0 баллов. Пример башни из 6 кубиков — 3 балла. Доказано, что в башне не может быть больше, чем 6 кубиков, — ещё 4 балла.

4. Найдите наибольшее четырёхзначное число, в записи которого нет нулей и которое делится на трёхзначное число, полученное стиранием его первой слева цифры.

Ответ: 9375.
Решение. Если четырёхзначное число $\overline{abcd}$ делится на $\overline{bcd}$, полученное стиранием первой цифры a, то на $\overline{bcd}$ делится и число $\overline{abcd}-\overline{bcd} = 1000a$. Ясно, что исходное число будет наибольшим, если его первая цифра равна $a = 9$. Значит, число $\overline{bcd}$ следует искать среди трёхзначных делителей числа $1000a = 9 \cdot 2^3 \cdot 5^3$. Если $\overline{bcd}$ не содержит пятёрок в своём разложении, то $\overline{bcd} \leq 9 \cdot 2^3$, что невозможно. Если же в его разложении есть пятёрки, то не должно быть двоек; иначе $\overline{bcd}$ делится на 10, и значит, в записи числа $\overline{abcd}$ есть нули. Итак, $\overline{bcd}$ — наибольший трёхзначный делитель числа $9 \cdot 5^3$, то есть $\overline{bcd} = 375$.
Критерии. Примеры чисел, удовлетворяющих условию — 0 баллов. Доказано, что искомые числа обязательно будут делителями числа 9000, но неверно указан ответ — 3 балла. Правильный ответ без обоснования — 3 балла. Доказано, что это число наибольшее — 4 балла.

5. Можно ли разрезать клетчатый квадрат 6×6 по клеточкам на шесть прямоугольников *различной* площади, среди которых нет ни одного квадрата? А на семь таких прямоугольников?



Ответ: *на* 6 *можно* (*см. рисунок*); *на* 7 *нельзя*.
Решение. На рисунке приведён пример разрезания квадрата 6×6 на 6 прямоугольников с площадями 2, 3, 4, 5, 10, 12, среди которых нет квадратов. Докажем, что разрезание на 7 прямоугольников невозможно. Отметим, что в разрезании не могут участвовать прямоугольники площади 7 и 9. В первом случае такой прямоугольник должен иметь размеры 1×7 или 7×1, а во втором — 1×9, 9×1 или 3×3, что невозможно в квадрате 6×6 и по условию задачи. Аналогично, в разрезании не может быть прямоугольника площади 1.
Рассмотрим сумму 7 различных *наименьших* натуральных слагаемых, среди которых нет слагаемых 1, 7 и 9: $2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 8 + 10 = 38$. Это больше площади квадрата 6×6, поэтому разрезать не удастся.
Критерии. Только ответ — 0 баллов. Пример для 6 прямоугольников — 3 балла.

7 класс

1. Однажды мышки подружились с кошками, и каждая мышка послала по открытке каждой кошке, так что все кошки вместе получили 100 открыток. Сколько было кошек и мышек вместе, если известно, что их было не больше 30? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 20, 25 *или* 29.
Решение. Пусть мышек было m, а кошек — k. Каждая мышка послала всем кошкам k открыток, поэтому общее число открыток равно $m \cdot k = 100$, и значит, m и k — делители числа 100, причём $m + k \leq 30$. Выпишем все разложения числа 100 на два множителя: $10 \cdot 10 = 20 \cdot 5 = 25 \cdot 4 = 50 \cdot 2 = 100 \cdot 1$, и оставим только первые три, для которых сумма делителей не более 30. Значит, кошек и мышек вместе было $10 + 10 = 20$, $20 + 5 = 25$ или $25 + 4 = 29$.
Критерии. Приведены (без объяснений) все варианты — 4 балла. Доказано, что других вариантов нет — ещё 3 балла.

2. Можно ли разрезать клетчатый квадрат 6×6 по клеточкам на восемь прямоугольников *разной* площади?

Ответ: *нельзя*.
Решение. Если разрезание возможно, общая площадь всех восьми прямоугольников или квадратов равна $6 \times 6 = 36$ и не меньше суммы первых восьми натуральных чисел $1 + 2 + \ldots + 8 = 36$. Значит, эти площади равны $1, 2, \ldots, 8$. Среди них есть прямоугольник площади 7, стороны которого могут выражаться *только* целыми числами 1 и 7. Сторона длины 7 больше стороны исходного квадрата, противоречие.
Критерии. Только ответ — 0 баллов. Доказано, что площади выражаются целыми числами от 1 до 8, — 3 балла.

3. В таблице 6×7 расставлены натуральные числа так, что числа в *соседних* клетках (имеющих общую сторону или общую вершину) различны. Какое наименьшее значение может принимать сумма чисел во всей таблице?

Ответ: 99.
Решение. (*Оценка.*) В каждом квадрате 2×2 стоят *различные* натуральные числа, поэтому сумма чисел в квадрате 2×2 не меньше $1 + 2 + 3 + 4 = 10$. В таблице 6×6 есть 9 таких квадратов 2×2. Значит, сумма чисел в таблице 6×6 не меньше $9 \cdot 10 = 90$. Оставшиеся 6 клеток прямоугольника 1×6 можно разбить на 3 прямоугольника 1×2 («доминошки»), в каждом из них сумма чисел не меньше, чем $1 + 2 = 3$, поэтому сумма чисел во всей таблице не меньше $90 + 3 \cdot 3 = 99$.

1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2

На рисунке приведён *пример* таблицы, в которой сумма чисел равна 99.
Критерии. Приведён правильный пример без объяснений — 3 балла. Доказано, что в любом квадрате 2×2 сумма чисел не меньше 10, — 2 балла. Баллы не снижаются, если отмечено без объяснений, что в оставшиеся клетки надо расставить чередующиеся пары чисел 1 и 2.

4. Малыш и Карлсон обожают есть конфеты. Каждый день Малыш съедает на одну конфету больше, чем в предыдущий день, а Карлсон — на две конфеты больше, чем в предыдущий день. В первый день Малыш съел не менее одной конфеты, причём Карлсон в этот день съел на одну конфету больше, чем Малыш. Известно, что оба съели одинаковое число конфет, причём Карлсон съел все свои конфеты за 9 дней. Сколько конфет съел Малыш? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 126, 198 *или* 405.
Решение. Пусть Малыш съел в первый день x конфет, а Карлсон — $(x + 1)$ конфет. Во второй день они съели $x + 1$ и $x + 3$ конфет соответственно, и значит, за эти два дня Карлсон съел на

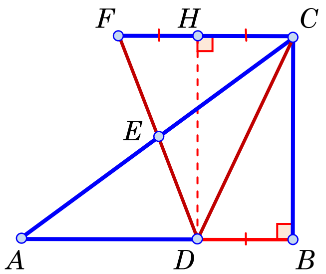
$1 + 2 = 3$ конфеты больше, чем Малыш. Продолжая рассуждения таким образом, получим, что за 9 дней Карлсон съел на $1 + 2 + \ldots + 9 = 45$ конфет больше. Поскольку обжоры съели конфет поровну, в следующие дни Малыш съел ровно 45 конфет, причём за 10-ый день он съедает $x + 9 \geq 10$ конфет, за 11-ый день — не менее 11 конфет, и так далее. Число 45 можно представить в виде суммы слагаемых (из которых первое не меньше 10) только тремя способами: $14 + 15 + 16$, $22 + 23$ и 45. Другими словами, Малыш съел свои конфеты за 12, 11 или 10 дней. В первом случае, $x + 9 = 14$, $x = 5$, и он всего съел $5 + 6 + \ldots + 16 = 126$ конфет. Во втором случае, $x + 9 = 22$, $x = 13$, и значит, он съел $13 + 14 + \ldots + 23 = 198$ конфет. В третьем случае, $x + 9 = 45$, $x = 36$, и значит, он съел $36 + 37 + \ldots + 45 = 405$ конфет.

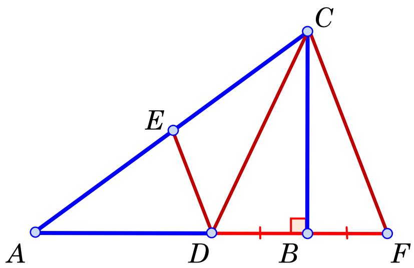
Критерии. За правильный пример без объяснений — 3 балла. Указаны все примеры без объяснения, что других вариантов нет, — 5 баллов.

5. В треугольнике ABC угол ABC равен 90°, и на катете AB отмечена точка D так, что $AD = 2DB$, точка E — середина гипотенузы AC. Известно, что $DE = 1$. Найдите CD.

Ответ: 2.

Первое решение. Продолжим отрезок DE за точку E и отложим $EF = DE$. Треугольники AED и CEF равны по двум сторонам и углу между ними, поэтому $FC = AD$. В треугольнике CDF проведём высоту DH. В четырёхугольнике $CBDH$ все углы прямые, поэтому $CBDH$ — прямоугольник. Тогда $HC = DB = AD / 2 = FC / 2$, то есть высота DH будет и медианой. Значит, треугольник CDF — равнобедренный, и $CD = DF = 2DE = 2$.





Второе решение. Продолжим отрезок AB за точку B и отложим отрезок $BF = BD$. В треугольнике CDF высота BC будет медианой, поэтому CDF — равнобедренный, и значит, $CD = CF$. Поскольку $AD = 2DB = DF$ и $AE = EC$, отрезок DE является средней линией треугольника ACF, и $CF = 2DE = 2$. Тогда $CD = CF = 2$.

Критерии. Указано правильное дополнительное построение (продолжить отрезок DE или DB) — 2 балла.