УДК 517.546

О ГРАДИЕНТЕ КОНФОРМНОГО РАДИУСА ПЛОСКОЙ ОБЛАСТИ

Л.А. Аксентьев, А.Н. Ахметова

Аннотация

Статья посвящена исследованию квазиконформности отображения области под действием градиента конформного радиуса. Доказано, что для областей с выпуклыми границами градиент конформного радиуса осуществляет квазиконформное отображение. Получены новые оценки коэффициента квазиконформности градиента конформного радиуса для указанных областей.

Ключевые слова: квазиконформное отображение, конформный радиус, градиент конформного радиуса, выпуклая область.

Пусть D – односвязная область комплексной плоскости, граница которой содержит более одной точки. По теореме Римана существует конформное отображение $f : E = \{\zeta : |\zeta| < 1\} \mapsto D$. *Конформным радиусом* области D в точке $z = f(\zeta)$ называется величина

$$R(D,z) = |f'(\zeta)|(1-|\zeta|^2). \tag{1}$$

Градиент конформного радиуса определяется формулой

$$\nabla R(D,z) = \frac{\partial R(D,z)}{\partial x} + i\frac{\partial R(D,z)}{\partial y} = 2R_{\bar z}, \quad z = x+iy \in D, \tag{2}$$

$$R_{\bar z} = \frac{\sqrt{f'}}{\sqrt{\bar f'}}\left(\frac{\bar f''}{\bar f'}\frac{1-|\zeta|^2}{2} - \zeta\right). \tag{3}$$

Инициатива в исследовании введенной градиентной функции принадлежит Ф.Г. Авхадиеву и К.-Й. Виртсу [1, 2]. Ими изучено множество значений градиента конформного радиуса и установлена диффеоморфность градиентного отображения области D с выпуклой границей. Отмечены исключительные случаи нарушения диффеоморфности во всей области, а также случаи нарушения взаимной однозначности граничных элементов (прямолинейные участки границы и угловые точки).

Для градиента конформного радиуса в случае области с выпуклой граничной кривой справедливо неравенство $|R_{\bar z z}|^2 - |R_{\bar z\bar z}|^2 \ge 0$, переписывая которое в виде

$$\left|\frac{(R_{\bar z})_{\bar z}}{(R_{\bar z})_z}\right| \le 1, \tag{4}$$

придем к истолкованию диффеоморфности в терминах квазиконформности отображения, осуществляемого функцией $R_{\bar z}$. Детали такого истолкования представлены в настоящей работе в виде трех теорем и двух примеров. Эти результаты частично содержатся в [3, 4] и являются продолжением [5, 6] и дополнением к [1, 2].

В основу исследования положено понятие квазиконформности [7, с. 13], согласно которому диффеоморфное отображение [1] $\nabla R(D,z)$ является *K-квазиконформным*, если $\nabla R(D,z)$ удовлетворяет уравнению Бельтрами

$$(\nabla R)_{\bar z} = \mu(z,\bar z)(\nabla R)_z,\ z\in D,$$

для которого

$$\sup_{z\in D}|\mu(z,\bar z)| = \frac{K-1}{K+1} < 1 \quad (1\le K<\infty).$$

1. Пусть $D(\alpha)=\{z: |\arg z|<\alpha\pi/2\}$, $\alpha\in(0,1]$, и $D(0)=\{z:\ |\operatorname{Im} z|<\pi/2\}$. Имеет место

Теорема 1. *Градиент* (2) *конформного радиуса* (1) *для любого компактного подмножества выпуклой области $D=f(E)$, отличной от $D(\alpha)$, $\alpha\in[0,1]$, осуществляет квазиконформное отображение.*

Для угловой области $D(\alpha)$, $\alpha\in(0,1]$, и полосы $D(0)$ по всей области справедливо тождество $\left|\dfrac{R_{\bar z\bar z}(D,z)}{R_{\bar z z}(D,z)}\right|\equiv 1$, то есть градиентное отображение вырождается на каждом компакте из $D(\alpha)$ и $D(0)$.

Справедлива точная оценка коэффициента квазиконформности по всему классу S^0 выпуклых функций $f(r\zeta)$, $\zeta\in E$, $0<r<1$, вида

$$\sup_{f(\zeta)\in S^0} K(f(r\zeta)) = \frac{1+r^2}{1-r^2}.$$

Доказательство. Необходимое и достаточное условие выпуклости области D [8, с. 166] – конформного образа круга E под действием функции $z=f(\zeta)$ – записывается в виде

$$\operatorname{Re}\zeta\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} \ge -1, \quad \zeta\in E. \tag{5}$$

Если $\Phi_0(\zeta)$ осуществляет однолистное отображение круга E на полуплоскость $\{\operatorname{Re} w>-1\}$, то в силу (5) функция $\Phi_0^{-1}\left(\zeta\,\dfrac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\right)=\widetilde\varphi(\zeta)$ удовлетворяет условиям леммы Шварца [8, с. 319] и имеют место соотношения $|\widetilde\varphi(\zeta)|\le 1$, $\widetilde\varphi(0)=0$. Поэтому $\widetilde\varphi(\zeta)=\zeta\varphi(\zeta)$, $\varphi(\zeta)$ – регулярная функция в E, и справедлива цепочка неравенств

$$|\widetilde\varphi(\zeta)|\le|\zeta| \implies \frac{|\widetilde\varphi(\zeta)|}{|\zeta|}\le 1 \implies |\varphi(\zeta)|\le 1.$$

Таким образом, $\varphi(\zeta)$ – функция, удовлетворяющая условиям обобщенной леммы Шварца [8, с. 319].

Так как $\Phi_0(\zeta)=\dfrac{2\zeta}{1-\zeta}$, то $\zeta\dfrac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}=\Phi_0(\widetilde\varphi(\zeta))=2\dfrac{\zeta\varphi(\zeta)}{1-\zeta\varphi(\zeta)}$, и следовательно,

$$\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} = 2\frac{\varphi(\zeta)}{1-\zeta\varphi(\zeta)}. \tag{6}$$

Вычислим производные

$$R_{\bar z\bar z} = \sqrt{\frac{f'(\zeta)}{\overline{f'^3(\zeta)}}}\,\frac{1-|\zeta|^2}{2}\,\{\overline{f(\zeta)},\bar\zeta\},$$

$$R_{\bar{z}z} = \frac{1}{|f'(\zeta)|(1-|\zeta|^2)} \left(\left| \frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} \frac{1-|\zeta|^2}{2} - \overline{\zeta} \right|^2 - 1 \right).$$

Умножив на R модули этих производных, с учетом (6) запишем

$$R|R_{\bar{z}\bar{z}}| = \frac{(1-|\zeta|^2)^2}{2} |\{f(\zeta), \zeta\}| =$$
$$= \frac{(1-|\zeta|^2)^2}{2} \left| \left(\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} \right)' - \frac{1}{2} \left(\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} \right)^2 \right| = \frac{|\varphi'|(1-|\zeta|^2)^2}{|1-\zeta\varphi|^2},$$

$$R|R_{\bar{z}z}| = 1 - \left| \frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} \frac{1-|\zeta|^2}{2} - \overline{\zeta} \right|^2 =$$
$$= 1 - \left| \frac{2\varphi(\zeta)}{1-\zeta\varphi(\zeta)} \frac{1-|\zeta|^2}{2} - \overline{\zeta} \right|^2 = \frac{(1-|\zeta|^2)(1-|\varphi(\zeta)|^2)}{|1-\zeta\varphi(\zeta)|^2}.$$

Составляя отношение полученных выражений, будем иметь

$$\left| \frac{R_{\bar{z}\bar{z}}}{R_{\bar{z}z}} \right| = \frac{1-|\zeta|^2}{1-|\varphi(\zeta)|^2} |\varphi'(\zeta)|.$$

По обобщенной лемме Шварца знак равенства в неравенстве $|\varphi'(\zeta)| \le \dfrac{1-|\varphi(\zeta)|^2}{1-|\zeta|^2}$ достигается на экстремальной функции вида $\varphi(\zeta) = e^{i\alpha} \dfrac{\zeta + a}{1 + \bar{a}\zeta}$, $|a| < 1$. Эта функция определит тождество $\left| \dfrac{R_{\bar{z}\bar{z}}}{R_{\bar{z}z}} \right| \equiv 1$. Выясним, для каких функций f оно справедливо. Для этого подставим экстремальную функцию φ, удовлетворяющую условиям леммы Шварца, в (6) и разложим правую часть полученного равенства на простейшие дроби. Будем иметь

$$\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} = \frac{2(\zeta+a)e^{i\alpha}}{1 + (\bar{a} - ae^{i\alpha})\zeta - e^{i\alpha}\zeta^2} = -e^{i\alpha/2} \frac{2t + 2ae^{i\alpha/2}}{(t-t_1)(t-t_2)} = e^{i\alpha/2} \left(\frac{A}{t-t_1} + \frac{B}{t-t_2} \right),$$

где $t = e^{i\alpha/2}\zeta$ и

$$t_1 = -i\,\mathrm{Im}\{ae^{i\alpha/2}\} + \sqrt{1 - \mathrm{Im}^2\{ae^{i\alpha/2}\}} \in \partial E,$$

$$t_2 = -i\,\mathrm{Im}\{ae^{i\alpha/2}\} - \sqrt{1 - \mathrm{Im}^2\{ae^{i\alpha/2}\}} \in \partial E,$$

причем $t_1 \ne t_2$, так как $\mathrm{Im}^2\{ae^{i\alpha/2}\} \ne 1$, если $|a| < 1$.

Решая систему

$$\begin{cases} A + B = -2, \\ At_2 + Bt_1 = 2ae^{i\alpha/2}, \end{cases}$$

найдем

$$A = \frac{2t_1 + 2ae^{i\alpha/2}}{t_2 - t_1} = -1 - \beta, \quad B = -2 - A = -1 + \beta,$$

где

$$\beta = \frac{\mathrm{Re}\{ae^{i\alpha/2}\}}{\sqrt{1 - \mathrm{Im}^2\{ae^{i\alpha/2}\}}} \in \mathbb{R}.$$

Тогда, интегрируя соотношение

$$\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} = e^{i\alpha/2}\left(\frac{-1-\beta}{\zeta e^{i\alpha/2}-t_1} + \frac{-1+\beta}{\zeta e^{i\alpha/2}-t_2}\right),$$

получим

$$\ln f'(\zeta) = \ln\!\left(C\left(\frac{\zeta e^{i\alpha/2}-t_2}{\zeta e^{i\alpha/2}-t_1}\right)^{\beta-1}\frac{1}{(\zeta e^{i\alpha/2}-t_1)^2}\right),$$

поэтому

$$f(\zeta) = \begin{cases} C_1\left(\dfrac{\zeta e^{i\alpha/2}-t_2}{\zeta e^{i\alpha/2}-t_1}\right)^{\beta} + C_2 & \text{при } \beta \neq 0, \\ C_3 \ln\dfrac{\zeta e^{i\alpha/2}-t_2}{\zeta e^{i\alpha/2}-t_1} + C_4 & \text{при } \beta = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Первая функция (в случае $\beta \neq 0$) в (7) будет отображать единичный круг на угловую область раствора $\pi\beta$, вторая (в случае $\beta = 0$) – на линейно преобразованную горизонтальную полосу.

Для указанных функций достигается знак равенства в оценке для $|\varphi'(\zeta)|$, и квазиконформное отображение вырождается. Поэтому будем называть эти функции исключительными и обозначим класс выпуклых функций без исключительных функций вида (7) через $\widetilde{S}^0$.

Поскольку для каждой функции $f(\zeta) \in \widetilde{S}^0$ справедливо соотношение

$$\max_{|\zeta|\le r}\left[\frac{1-|\zeta|^2}{1-|\varphi(\zeta)|^2}|\varphi'(\zeta)|\right] < 1,$$

где функция φ определяется по f из (6), то в области $D_r = f(E_r)$, $E_r = \{\zeta : |\zeta| < < r\}$, получим

$$k_1(f(\zeta), E_r) = \sup_{z\in D_r}\left|\frac{R_{\bar z\bar z}}{R_{\bar z z}}\right| < 1.$$

Поэтому любой компакт, предварительно помещенный в область D_r, будет квазиконформно отображаться градиентом (2) конформного радиуса (1). Дополнительно отметим, что

$$\sup_{f\in\widetilde{S}^0} k_1(f(\zeta), E_r) = 1$$

с достижением $k_1(f(\zeta), E_r) = 1$ на исключительных функциях, не входящих в $\widetilde{S}^0$.

Первая часть теоремы 1 доказана.

Для доказательства второй части перейдем в равенстве (6) к r-линиям уровня и перепишем его в виде

$$r\frac{f''(r\zeta)}{f'(r\zeta)} = 2r\frac{\varphi(r\zeta)}{1-r\zeta\varphi(r\zeta)}. \tag{8}$$

Так как

$$R(D_r, z) = r|f'(r\zeta)|(1-|\zeta|^2), \quad R|R_{\bar z\bar z}| = \frac{r^2|\varphi'(r\zeta)|(1-|\zeta|^2)^2}{|1-r\zeta\varphi(r\zeta)|^2},$$

$$R|R_{\bar z z}| = \frac{(1-|\zeta|^2)(1-r^2|\varphi(r\zeta)|^2)}{|1-r\zeta\varphi(r\zeta)|^2},$$

то

$$\left|\frac{R_{\bar z\bar z}}{R_{\bar z z}}\right| = r^2\frac{1-|\zeta|^2}{1-r^2|\varphi(r\zeta)|^2}|\varphi'(r\zeta)| \le r^2\frac{1-|\zeta|^2}{1-r^2|\varphi(r\zeta)|^2}\,\frac{1-|\varphi(r\zeta)|^2}{1-r^2|\zeta|^2} \le r^2.$$

Легко показать, что знак равенства достигается только в предположении, что $\varphi(\zeta) = e^{i\alpha}\zeta$ и $\zeta = 0$.

Введем коэффициент

$$k_2(f(r\zeta), E) = r^2 \max_{|\zeta|\le 1} \left[\frac{1-|\zeta|^2}{1-r^2|\varphi(r\zeta)|^2}|\varphi'(r\zeta)|\right] \le r^2,$$

который определит квазиконформность градиента $\nabla R(D_r, z)$. Отметим также, что

$$\max_{f\in S^0} k_2(f(r\zeta), E) = r^2 < 1,$$

так как при $z = \ln\dfrac{1+r\zeta}{1-r\zeta}$ имеем

$$R(D_r, z) = 2r\frac{1-|\zeta|^2}{|1-r^2\zeta^2|}$$

и

$$|\mu(\zeta, \overline{\zeta})| = \frac{r^2(1-|\zeta|^2)}{1-r^4|\zeta|^2} \le |\mu(0,0)| = r^2 = k_2\left(\ln\frac{1+r\zeta}{1-r\zeta}, E\right).$$

□

Приведем пример с коэффициентом квазиконформности $\dfrac{1+k_2(f(r\zeta),E)}{1-k_2(f(r\zeta),E)}$, меньшим, чем $\dfrac{1+r^2}{1-r^2}$.

Пример 1. Пусть область D представляет собой квадрат с отображающей функцией [8, с. 77]

$$f(\zeta) = \int\limits_0^\zeta \frac{d\zeta}{(1-\zeta^4)^{1/2}}.$$

Конформный радиус для области D_r с

$$z = f(r\zeta) = \int\limits_0^{r\zeta} \frac{d\zeta}{(1-r^4\zeta^4)^{1/2}}$$

записывается в виде

$$R(\zeta) = r\frac{1-|\zeta|^2}{|1-r^4\zeta^4|^{1/2}},$$

поэтому

$$R_{\bar z}(\zeta) = \frac{r^4\overline{\zeta}^3 - \zeta}{(1-r^4\zeta^4)^{1/4}(1-r^4\overline{\zeta}^4)^{3/4}},$$

$$R_{\overline{z}\overline{z}}(\zeta) = \frac{3r^3\overline{\zeta}^2(1-|\zeta|^2)}{(1-r^4\zeta^4)^{1/4}(1-r^4\overline{\zeta}^4)^{5/4}},$$

$$R_{\bar z z}(\zeta) = -\frac{1-r^8|\zeta|^6}{r(1-r^4\zeta^4)^{3/4}(1-r^4\overline{\zeta}^4)^{3/4}}.$$

Составляя отношение вторых производных по модулю, после сокращений будем иметь

$$\left|\frac{R_{\bar z\bar z}}{R_{\bar z z}}\right| = \frac{3r^4|\zeta|^2(1-|\zeta|^2)}{1-r^8|\zeta|^6}\, r^4,$$

Тогда

$$\widetilde{k}_2(r) = \sup_{0\le|\zeta|\le 1}\left|\frac{R_{\bar z\bar z}}{R_{\bar z z}}\right| = r^4 \max_{0\le u\le 1}\frac{3u(1-u)}{1-r^8u^3} =$$

$$= r^4\,\frac{3u_0(1-u_0)}{1-r^8u_0^3} < r^4, \quad 0<r<1, \quad 0<u_0<1.$$

Заметим, что

$$\sup_{0\le|\zeta|\le 1}\left|\frac{R_{\bar z\bar z}}{R_{\bar z z}}\right|\Bigg|_{r=1} = \max_{0\le|\zeta|\le 1}\frac{3|\zeta|^2(1-|\zeta|^2)}{1-|\zeta|^6} = \frac{3}{1/|\zeta|^2+1+|\zeta|^2}\Bigg|_{|\zeta|=1} = 1.$$

С другой стороны,

$$\widetilde{k}_1(\rho) = \left|\frac{R_{\bar z\bar z}}{R_{\bar z z}}\right|\Bigg|_{r=1,|\zeta|\le\rho} = \frac{3|\zeta|^2(1-|\zeta|^2)}{1-|\zeta|^6}\Bigg|_{|\zeta|\le\rho} \le \frac{3\rho^2}{\rho^4+\rho^2+1},$$

причем $\widetilde{k}_2(r) < \widetilde{k}_1(r)$, так как

$$r^4 < \frac{3r^2}{r^4+r^2+1}.$$

По-видимому, и в общем случае для любой выпуклой области $D=f(E)$ будем иметь $k_2(f(r\zeta),E) < k_1(f(\zeta),E_r)$, $0<r<1$.

2. Рассмотрим теперь класс функций Σ^0, которые отображают $E^- = \{|\zeta|>1\}$ на области D^-, $\infty\in D^-$, представимые как внешность некоторой замкнутой выпуклой линии и характеризующиеся выпуклостью вниз поверхности конформного радиуса. Имеет место

Теорема 2. *Градиент* (2) *конформного радиуса* $R(f(E^-),f(\zeta))$ *для любого компактного подмножества области* $D^-=f(E^-)$ *с конечным выпуклым дополнением осуществляет квазиконформное отображение.*

Существуют точные оценки аналогов величин k_1 *и* k_2 *для двух видов квазиконформных отображений.*

Прежде чем приступить к доказательству теоремы, приведем следующий результат, который легко получить с помощью принципа гиперболической метрики [8, с. 326].

Лемма 1. *Если функция* $\varphi(\zeta)$ *регулярна во внешности* E^- *единичного круга* E *и* $\varphi(E^-)\subset E^-$, *то для производной этой функции справедлива оценка*

$$|\varphi'(\zeta)| \le \frac{|\varphi(\zeta)|^2-1}{|\zeta|^2-1}, \quad \zeta\in E^-. \tag{9}$$

Равенство достигается только для функций

$$\varphi(\zeta) = e^{i\alpha}\frac{1+\bar a\zeta}{\zeta+a}, \quad a\in E^-,$$

в любой точке $\zeta\in E^-$.

Доказательство теоремы 2. Необходимое и достаточное условие выпуклости границы области D^-, полученной из E^- действием функции f, имеет вид (5).

Как в доказательстве предыдущей теоремы, получим подчинение $\zeta\dfrac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} \prec \Phi_0 = \dfrac{2}{\zeta-1}$. Тогда $\Phi_0^{-1}\left(\zeta\dfrac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\right) = \varphi(\zeta)$, $\varphi(\infty)=\infty$. Повторяя выкладки, проведенные ранее, получаем

$$\zeta\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} = \Phi_0(\varphi(\zeta)) = \frac{2}{\varphi(\zeta)-1}, \tag{10}$$

откуда имеем

$$\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} = \frac{2}{\zeta(\varphi(\zeta)-1)}.$$

Учитывая, что в данном случае конформный радиус определяется выражением

$$R(D^-,z) = |f'(\zeta)|(|\zeta|^2-1), \quad |\zeta|>1, \quad z=f(\zeta), \tag{11}$$

подсчитаем вторые производные. Будем иметь

$$R\,|R_{\bar z z}| = 1 - \left|\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\frac{|\zeta|^2-1}{2} + \overline{\zeta}\right|^2 = \\ = 1 - \frac{|\varphi(\zeta)|\zeta|^2-1|^2}{|\zeta|^2|\varphi(\zeta)-1|^2} = \frac{(|\zeta|^2-1)(|\zeta\varphi(\zeta)|^2-1)}{|\zeta|^2|\varphi(\zeta)-1|^2},$$

так как

$$\frac{1}{2}\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}(|\zeta|^2-1) + \overline{\zeta} = \frac{|\zeta|^2-1}{\zeta(\varphi(\zeta)-1)} + \overline{\zeta} = \frac{|\zeta|^2\varphi(\zeta)-1}{\zeta(\varphi(\zeta)-1)}.$$

Далее,

$$R|R_{\bar z\bar z}| = \frac{(|\zeta|^2-1)^2}{2}|\{f(\zeta),\zeta\}|,$$

$$\{f(\zeta),\zeta\} = -\frac{2}{\zeta^2(\varphi(\zeta)-1)} - 2\,\frac{\varphi'(\zeta)}{\zeta(\varphi(\zeta)-1)^2} - 2\,\frac{1}{\zeta^2(\varphi(\zeta)-1)^2} = \\ = -2\,\frac{\varphi(\zeta)+\zeta\varphi'(\zeta)}{\zeta^2(\varphi(\zeta)-1)^2} = -2\,\frac{(\varphi(\zeta)\zeta)'}{\zeta^2(\varphi(\zeta)-1)^2},$$

поэтому

$$\left|\frac{R_{\bar z\bar z}}{R_{\bar z z}}\right| = \frac{|(\varphi\zeta)'|(|\zeta|^2-1)}{|\varphi\zeta|^2-1}.$$

Поскольку $|\varphi\zeta| \ge |\varphi| > 1$, то, применяя лемму 1 к функции $\zeta\varphi(\zeta)$, придем к соотношению $|R_{\bar z\bar z}/R_{\bar z z}| \le 1$.

По лемме 1 равенство здесь достигается на экстремальной функции $\zeta\varphi(\zeta) = e^{i\alpha}\dfrac{1+\bar a\zeta}{\zeta+a}$, приводящей к $\varphi(\zeta)$ с нулем первого порядка в ∞. В соотношении (10) функция $1/\varphi(\zeta)$ должна иметь нуль второго порядка. Поэтому для рассмотренного в теореме класса функций Σ^0 отношение $|R_{\bar z\bar z}/R_{\bar z z}|$ не обращается в 1 ни в одной точке D^-, то есть

$$k_1(f(\zeta),E_r^-) = \max_{|\zeta|\ge r}\frac{|(\varphi\zeta)'|(|\zeta|^2-1)}{|\varphi\zeta|^2-1} < 1.$$

Поэтому любой компакт, предварительно помещенный в область $D_r^- = f(E_r^-)$, $E_r^- = \{\zeta : |\zeta| > r > 1\}$, будет отображаться градиентом конформного радиуса квазиконформно, причем

$$\sup_{f\in\Sigma^0} k_1(f(\zeta),E_r^-) < 1, \quad 1<r<\infty, \text{ и } \sup_{f\in\Sigma^0} k_1(f(\zeta),E^-) = 1.$$

Переходя теперь к r-линиям уровня, получим

$$r\frac{f''(r\zeta)}{f'(r\zeta)} = \frac{2}{\zeta(\varphi(r\zeta)-1)},$$

а значит,

$$\left| r\frac{f''(r\zeta)}{f'(r\zeta)}\frac{|\zeta|^2-1}{2} + \overline{\zeta}\right|^2 - 1 = \frac{(|\zeta|^2-1)(|\zeta\varphi(r\zeta)|^2-1)}{|\zeta|^2|\varphi(r\zeta)-1|^2},$$

$$\{f(r\zeta),\zeta\} = -2\frac{(\varphi(r\zeta)\zeta)'}{\zeta^2(\varphi(r\zeta)-1)^2}.$$

Учитывая неравенство (9), будем иметь

$$\left|\frac{R_{\bar z\bar z}}{R_{\bar z z}}\right| = \frac{|(\varphi(r\zeta)\zeta)'|(|\zeta|^2-1)}{|\zeta|^2|\varphi(r\zeta)|^2-1} \le 1.$$

Достижение знака равенства в последнем неравенстве невозможно. Поэтому

$$k_2(f(r\zeta),E^-) = \max_{|\zeta|\ge 1}\frac{|(\varphi(r\zeta)r\zeta)'_{r\zeta}|(|\zeta|^2-1)}{|\zeta|^2|\varphi(r\zeta)|^2-1} < 1,$$

причем

$$\sup_{f\in\Sigma^0} k_2(f(r\zeta),E^-) = 1 \quad \text{при } r\ge 1.$$

□

3. Области D, $\infty\in\partial D$, разбиваются на два класса. Один характеризуется выпуклостью линий уровня, близких к граничной кривой, и этот случай отражен в теореме 1, а другой – невыпуклостью таких линий. Во втором случае при замене линий уровня, связанных с окружностями $|\zeta| = r$, на линии уровня, связанные с окружностями $|\zeta+r| = 1-r$, квазиконформность градиента конформного радиуса сохраняется всюду внутри области, за исключением бесконечно удаленной точки. Этот эффект отражает

Теорема 3. *A) Градиент* (2) *конформного радиуса $R(D,z)$ для любой замкнутой конечной области, включенной в $D = \widetilde{f}(E)$, $\widetilde{f}(-1) = \infty$ (причем $\mathbb{C}\backslash D$ – выпуклое множество), осуществляет квазиконформное отображение.*

B) В частности, утверждение A справедливо для градиента конформного радиуса $R(\widetilde{f}(\tilde{E}_r),\widetilde{f}(\omega))$ в случае области $\widetilde{f}(\widetilde{E}_r)$, $\widetilde{E}_r = \{\omega : |\omega+r| \le 1-r\}$, $0<r<1$.

Так как $\{\omega : |\omega+r| \le 1-r\} \;\Leftrightarrow\; \{\zeta : \operatorname{Re}\zeta \ge \rho\}$, $\rho = \dfrac{1-r}{r}$, $\zeta = \dfrac{1-\omega}{1+\omega}$, то удобнее вести речь о поверхности конформного радиуса

$$R(f(P),f(\zeta)) = 2\operatorname{Re}\zeta|f'(\zeta)|, \quad f(\zeta) = \widetilde{f}\left(\frac{1-\zeta}{1+\zeta}\right), \tag{12}$$

построенной над полуплоскостью $P = \{\zeta : \operatorname{Re}\zeta > 0\}$ (соответствующие отображающие функции $f(\zeta)$ образуют класс $\Sigma^0(P)$). Поэтому для доказательства теоремы 3 понадобится еще один частный случай принципа гиперболической метрики.

Лемма 2. *Если функция $\varphi(\zeta)$ регулярна в полуплоскости P и $\varphi(P)\subset P$, то для производной φ' функции φ справедлива оценка*

$$|\varphi'(\zeta)| \le \frac{\operatorname{Re}\varphi(\zeta)}{\operatorname{Re}\zeta}, \quad \zeta\in P,$$

равенство в которой достигается лишь для функций

$$\varphi(\zeta)=\frac{ai\zeta+b}{-c\zeta+id},\quad a,\,b,\,c,\,d\in\mathbb{R},\quad ad-bc>0,$$

в любой точке $\zeta\in P$.

Доказательство теоремы 3. Необходимое условие выпуклости граничной линии в данном случае имеет вид

$$\operatorname{Re}\left(\frac{f''(i\eta)}{f'(i\eta)}\right)\geq 0, \tag{13}$$

поэтому из геометрических соображений

$$\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}=\varphi(\zeta), \tag{14}$$

где $\varphi(\zeta)$ – функция, удовлетворяющая условиям леммы 2.

Перейдем к вычислению производных конформного радиуса (12). Имеем

$$R_{\bar z}(\zeta)=\frac{\sqrt{f'(\zeta)}}{f'(\zeta)}\left(\sqrt{\overline{f'(\zeta)}}(\zeta+\bar\zeta)\right)'_{\bar\zeta}=\frac{\sqrt{f'(\zeta)}}{\sqrt{\overline{f'(\zeta)}}}\left(\overline{\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}}\operatorname{Re}\zeta+1\right),$$

$$R_{\bar z\bar z}(\zeta)=\frac{\sqrt{f'(\zeta)}}{f'(\zeta)}\left(\frac{1}{\sqrt{\overline{f'(\zeta)}}}\left(\overline{\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}}\operatorname{Re}\zeta+1\right)\right)'_{\bar\zeta}=$$

$$=\frac{\sqrt{f'(\zeta)}}{\sqrt{\overline{f'^3(\zeta)}}}\left(\left(\overline{\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}}\right)'-\frac{1}{2}\left(\overline{\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}}\right)^2\right)\operatorname{Re}\zeta=\frac{\sqrt{f'(\zeta)}}{\sqrt{\overline{f'^3(\zeta)}}}\{\overline{f(\zeta)},\bar\zeta\}\operatorname{Re}\zeta$$

и поэтому

$$R|R_{\bar z\bar z}|=2|\{f(\zeta),\zeta\}|\operatorname{Re}^2\zeta.$$

С учетом (14) перепишем последнее выражение в виде

$$R|R_{\bar z\bar z}|=2\left|\varphi'(\zeta)-\frac{\varphi^2(\zeta)}{2}\right|\operatorname{Re}^2\zeta.$$

Так как

$$R_{\bar z z}(\zeta)=\frac{1}{f'(\zeta)\sqrt{\overline{f'(\zeta)}}}\left(\sqrt{f'(\zeta)}\left(\overline{\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}}\operatorname{Re}\zeta+1\right)\right)'_{\zeta}=$$

$$=\frac{1}{2|f'(\zeta)|}\left(\left|\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\right|^2\operatorname{Re}\zeta+\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}+\overline{\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}}\right),$$

то

$$R\,R_{\bar z z}=\left|\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\operatorname{Re}\zeta+1\right|^2-1.$$

С учетом (14) имеем

$$R\,R_{\bar z z}(\zeta)=|\varphi(\zeta)\operatorname{Re}\zeta+1|^2-1=|\varphi(\zeta)|^2\operatorname{Re}^2\zeta+2\operatorname{Re}\zeta\operatorname{Re}\varphi(\zeta).$$

Взяв отношение вторых производных, получим

$$\left|\frac{R_{\bar z\bar z}}{R_{\bar z z}}\right| = \frac{2\operatorname{Re}\zeta\left|\varphi' - \dfrac{\varphi^2}{2}\right|}{|\varphi|^2\operatorname{Re}\zeta + 2\operatorname{Re}\varphi} \le \frac{\operatorname{Re}\zeta(2|\varphi'| + |\varphi|^2)}{|\varphi|^2\operatorname{Re}\zeta + 2\operatorname{Re}\varphi} \le \frac{\operatorname{Re}\zeta\left(2\dfrac{\operatorname{Re}\varphi}{\operatorname{Re}\zeta} + |\varphi|^2\right)}{|\varphi|^2\operatorname{Re}\zeta + 2\operatorname{Re}\varphi} = 1.$$

Достижение знака равенства в неравенстве

$$|\varphi'(\zeta) - \varphi^2(\zeta)/2| \le |\varphi'(\zeta)| + |\varphi(\zeta)|^2/2$$

имеет место, когда $\varphi'(\zeta)$ и $-\varphi^2(\zeta)/2$ имеют одинаковое значение аргумента. Пусть $\varphi'(\zeta)(\zeta) = R_1e^{i\theta}$, $-\varphi^2(\zeta)/2 = R_2e^{i\theta}$, тогда функция $\dfrac{\varphi'(\zeta)}{-\varphi^2(\zeta)/2} = \dfrac{R_1}{R_2}$ является вещественной аналитической функцией, положительной во всей полуплоскости, что возможно тогда и только тогда, когда $R_1/R_2 \equiv 2\alpha > 0$. Решением дифференциального уравнения $\dfrac{\varphi'(\zeta)}{-\varphi^2(\zeta)/2} = 2\alpha$ будет функция $1/\varphi(\zeta) = \alpha\zeta + b$. Среди всех таких функций выберем те, которые переведут правую полуплоскость на себя, именно, $\varphi(\zeta) = 1/(\alpha\zeta + i\beta)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$. Из (14) получаем $f(\alpha,\zeta) = C_1(\alpha\zeta + i\beta)^{(1+\alpha)/\alpha} + C_2$.

Для любой замкнутой области $\bar G_\rho \subset \bar D$, которая является образом полосы $\{\zeta:\ 0 \le \operatorname{Re}\zeta \le \rho\} = f^{-1}(\bar G_\rho)$, будем иметь

$$k_1(f(\zeta), f^{-1}(G)) = \max_{\zeta\in f^{-1}(G)} \frac{2\operatorname{Re}\zeta|\varphi' - \varphi^2/2|}{|\varphi|^2\operatorname{Re}\zeta + 2\operatorname{Re}\varphi} \equiv \psi(\rho, f) < 1, \tag{15}$$

но

$$\sup_{f\in\Sigma^0(P)\setminus\{f(\alpha,\zeta)\}} \psi(\rho, f) = 1.$$

Оценку (15) можно конкретизировать, включив G в область $\widetilde f(\tilde r E)$ при некотором $\widetilde r \in (0,1)$.

Области $f(P)$, полученные преобразованием полуплоскости P с помощью функций $f(\zeta) \in \Sigma^0(P)$, не исчерпываются конечными областями с выпуклыми границами. Поэтому для области $f(P)$ не существует аналога коэффициента k_2 из доказательства теорем 1 и 2. □

Взаимодействие выделенных классов, связанных с теоремами 1 и 3, иллюстрирует

Пример 2. Возьмем класс функций

$$z = f(a,\alpha;\ \zeta) = (\zeta + a)^\alpha, \quad \zeta \in P, \quad a > 0, \quad 0 < \alpha < 2,$$

и исследуем для него множество значений градиента конформного радиуса.

Правая полуплоскость P отображается введенной функцией на выпуклую область при $0 < \alpha \le 1$ и на область с выпуклым дополнением до полной плоскости при $1 \le \alpha < 2$.

Так как $f'(a,\alpha;\zeta) = \alpha(\zeta + a)^{\alpha-1}$, то $R = \alpha|\zeta + a|^{\alpha-1}(\zeta + \overline{\zeta})$ и

$$R_{\bar z} = \frac{1}{\overline{f'}}\alpha(\zeta + a)^{(\alpha-1)/2}\left[\frac{\alpha - 1}{2}(\overline{\zeta} + a)^{(\alpha-3)/2}(\zeta + \overline{\zeta}) + (\overline{\zeta} + a)^{(\alpha-1)/2}\right] =$$

$$= \left(\frac{\zeta + a}{\overline{\zeta} + a}\right)^{(\alpha-1)/2} \frac{1}{2(\overline{\zeta} + a)}\left[(\alpha - 1)\zeta + (\alpha + 1)\overline{\zeta} + 2a\right] = \nabla R/2.$$

После нетрудных выкладок получим

$$\left|\frac{R_{\bar z \bar z}}{R_{\bar z z}}\right| = \frac{\operatorname{Re}\zeta}{\operatorname{Re}\zeta + 2a/(\alpha+1)}.$$

При $a = 0$ имеем $|R_{\bar z \bar z}/R_{\bar z z}| = 1$. Если $a \neq 0$, то

$$k_1 = \max_{z\in\overline{G}_\rho}\left|\frac{R_{\bar z \bar z}}{R_{\bar z z}}\right| = \frac{\rho}{\rho + 2a/(\alpha+1)},$$

где $\overline{G}_\rho$ – та часть замкнутой области $\overline{D}$, которая при действии $f(a,\alpha;\,\zeta)$ соответствует полосе $\{0 \le \operatorname{Re}\zeta \le \rho\}$ или части $\{\omega:\ |\omega| \le 1,\ |\omega - r| \ge 1 - r\}$ замкнутого единичного круга $\{|\omega| \le 1\}$, причем $\rho = \dfrac{2}{1-r}$.

Определим граничные точки градиента. Для этого представим

$$\nabla R(i\eta) = \left(\frac{a+i\eta}{a-i\eta}\right)^{(\alpha-1)/2}\frac{(\alpha-1)i\eta + (\alpha+1)(-i\eta) + 2a}{a-i\eta} =$$
$$= 2\left(\frac{a+i\eta}{a-i\eta}\right)^{(\alpha-1)2} = 2e^{i(\alpha-1)\operatorname{arctg}(\eta/a)}.$$

Когда η изменяется от $-\infty$ до $+\infty$, точка $\nabla R(i\eta)$ (то есть конец этого вектора с началом в нуле) будет двигаться по дуге окружности радиуса 2 с центром в 0 от $2e^{-i(\alpha-1)\pi/2}$ до $2e^{i(\alpha-1)\pi/2}$, не выходя за пределы дуги окружности между этими точками.

Теперь нужно найти образы бесконечно удаленной точки при различных подходах к ней. Для этого подсчитаем пределы $\nabla R(re^{i\beta})$ при $r \to \infty$, когда фиксированная величина β находится в промежутке $(-\pi/2, \pi/2)$. Имеем

$$\lim_{r\to\infty}\nabla R(re^{i\beta}) = \lim_{r\to\infty}\left[\left(\frac{re^{i\beta}+a}{re^{-i\beta}+a}\right)^{(\alpha-1)/2}\frac{(\alpha-1)re^{i\beta} + (\alpha+1)re^{-i\beta} + 2a}{a-i\eta}\right] =$$
$$= e^{i\beta(\alpha-1)}e^{i\beta}[(\alpha-1)e^{i\beta} + (\alpha+1)e^{-i\beta}] = (\alpha-1)e^{i\beta(\alpha+1)} + (\alpha+1)e^{i\beta(\alpha-1)} = \varphi(\beta).$$

Если β будет изменяться от $-\pi/2$ до $\pi/2$, то точка $\varphi(\beta)$ опишет дугу циклоиды между крайними точками $2ie^{-i\alpha\pi/2}$ (при $\beta = -\pi/2$) и $-2ie^{i\alpha\pi/2}$ (при $\beta = \pi/2$) (см. рис. 1).

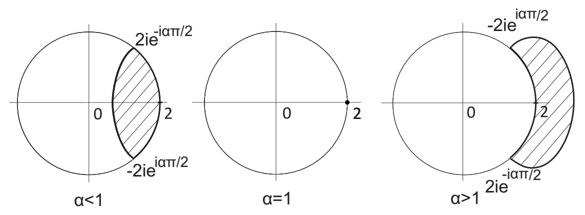

Рис. 1

Граничная кривая не зависит от $a \neq 0$. Если $a = 0$, то при $\alpha < 1$ образ вырождается во внутреннюю дугу циклоиды, при $\alpha > 1$ образ вырождается во внешнюю дугу циклоиды. Точечный образ при $\alpha = 1$ сохраняется для любых a.

Частными видами граничных линий с параметрическим представлением

$$z = (a+i\eta)^\alpha, \quad -\infty < \eta < +\infty, \quad a > 0,$$

являются параболы

$$z = (a + i\eta)^2 \Leftrightarrow \{x = a^2 - \eta^2,\ y = 2a\eta\} \Leftrightarrow y^2 = -4a^2(x - a^2) \quad (\text{при } \alpha = 2)$$

и гиперболы

$$z = (a + i\eta)^{1/2} \Rightarrow a + i\eta = (x + iy)^2 \Leftrightarrow a = x^2 - y^2, \quad \eta = 2xy \quad (\text{при } \alpha = 1/2).$$

Summary

L.A. Aksentyev, A.N. Akhmetova. On the Gradient of the Conformal Radius of a Plane Domain.

This paper studies the quasi-conformality of domain mapping by the gradient of the conformal radius. It is proved that the gradient of the conformal radius realizes quasi-conformal mapping for domains with convex boundaries. For these domains we obtain new estimates of the quasi-conformality coefficient of the conformal radius gradient.

Key words: quasi-conformal mapping, conformal radius, gradient of the conformal radius, convex domain.

Литература

1. *Avkhadiev F.G., Wirths K.-J.* The conformal radius as a function and its gradient image // Israel J. Math. – 2005. – V. 145. – P. 349–374.
2. *Avkhadiev F.G., Wirths K.-J.* Schwarz-Pick type inequalities. – Basel – Boston – Berlin: Birkhäuser, 2009. – 156 p.
3. *Ахметова А.Н.* Свойства конформного радиуса и теоремы единственности для внешних обратных краевых задач: Дис. … канд. физ.-мат. наук. – Казань, 2009. – 105 с.
4. *Akhmetova A.* Quasiconformal mappings associated with Gahov's equation in inverse boundary value problems // 21th Int. Workshop on Operator and Applications, TU Berlin, Book of abstracts. – 2010. – P. 4–5.
5. *Аксентьев Л.А., Ахметова А.Н.* Об отображениях, связанных с градиентом конформного радиуса // Изв. вузов. Матем. – 2009. – № 6. – С. 60–64.
6. *Аксентьев Л.А., Ахметова А.Н.* Об отображениях, связанных с градиентом конформного радиуса // Мат. заметки. – 2010. – Т. 87, № 1. – С. 3–12.
7. *Альфорс Л.* Лекции по квазиконформным отображениям. – М.: Мир, 1969. – 133 с.
8. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1966. – 630 с.

Поступила в редакцию
07.10.10
Переработанный вариант
08.12.11

Аксентьев Леонид Александрович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: *Leonid.Aksentev@ksu.ru*

Ахметова Альбина Наилевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Казанского национального исследовательского технического университета им. А.Н. Туполева.

E-mail: *achmetowa@inbox.ru*