Известия вузов. Математика
2014, № 5, с. 68–74

http://old.kpfu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Краткое сообщение, представленное В.Г. Звягиным

В.П. ОРЛОВ, М.И. ПАРШИН

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДИНАМИКИ ТЕРМОВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЫ ТИПА ОЛДРОЙДА

Аннотация. Для начально-граничной задачи динамики термовязкоупругой среды типа Олдройда в плоском случае установлена нелокальная теорема существования слабого решения.

Ключевые слова: термовязкоупругая среда, уравнения движения, начально-граничная задача, слабое решение, неподвижная точка.

УДК: 517.958

1. Введение

Пусть $\Omega \subset R^2$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega \in C^2$. В $Q_T = [0,T] \times \Omega$ рассматривается начально-граничная задача

$$\partial v/\partial t + v_i \partial v/\partial x_i - \mathrm{Div}[\mu_1(\theta)\mathcal{E}(v)] - \mu_0 \triangle v - \\ - \mu_2 \int_0^t \mathrm{Div}[\mathcal{E}(v)(s,x)]ds + \nabla p = f, \quad \mathrm{div}\, v = 0 \ \text{ на } \ Q_T, \quad (1)$$

$$v|_{t=0} = v^0 \ \text{ на } \ \Omega, \quad v|_{\partial\Omega} = 0 \ \text{ на } \ [0,T], \quad (2)$$

$$\partial\theta/\partial t + v_i \partial\theta/\partial x_i - \chi\triangle\theta = (\mu_0 + \mu_1(\theta))\mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(v) + \mu_2 \int_0^t \mathrm{Div}[\mathcal{E}(v)(s,x)]ds : \mathcal{E}(v) + g \ \text{ на } \ Q_T, \quad (3)$$

$$\theta|_{t=0} = \theta^0 \ \text{ на } \ \Omega; \quad \theta|_{\partial\Omega} = 0 \ \text{ на } \ [0,T]. \quad (4)$$

Здесь $v = (v_1, v_2)$, θ и p — скорость, температура и давление среды соответственно, $\mathcal{E}(v) = \{\mathcal{E}_{ij}\}$, $\mathcal{E}_{ij} = \frac{1}{2}\big(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\big)$ — тензор скоростей деформаций, $\mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(v) = \mathcal{E}_{ij}\mathcal{E}_{ij}$, $\mu_0 > 0$, $\mu_2 \geq 0$, $\mu_1(s) \in C^2(-\infty, +\infty)$, $0 < m_1^* < \mu_1(\theta) < m_1^{**}$.

При $\theta = 0$ задача (1)–(2) является моделью Олдройда вязкоупругой среды [1], [2]. Добавление в модели Олдройда температуры θ в коэффицент вязкости приводит к появлению уравнения (4) (уравнение баланса энергии см. в [3], с. 12).

В случае $\theta = 0$ и $\mu_1(s) = \mathrm{const}$ нелокальная сильная разрешимость ($v \in W_2^{1,2}(Q_T)$, $p \in W_2^{0,1}(Q_T)$) для модели Олдройда (1)–(2) установлена в [4]. Для более общей модели с нелинейной вязкостью аналогичный результат установлен в [5].

Поступила 01.12.2013

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 13-01-00041.

Для задачи (1)–(4) наличие переменной вязкости из-за недостаточной гладкости θ не позволяет установить ее сильную разрешимость. Нашей целью является доказательство слабой разрешимости задачи (1)–(4). При этом существенно опираемся на результаты работы [6] о слабой разрешимости уравнения баланса энергии.

Отметим, что при исследовании слабой разрешимости задачи (1)–(4) в правой части (3) появляются слагаемые из $L_1(Q_T)$, что вызывает существенные трудности (см., например, [7] и имеющуюся там библиографию). Исследованию других моделей термовязкоупругих сред посвящена обширная литература (см., например, [8], [9], [10] и имеющуюся там библиографию).

Предполагается суммирование по повторяющимся индексам.

2. Обозначения и определения

Ниже используем пространства $L_p(\Omega)$, $W_p^l(\Omega)$, $L_p(Q_T)$, $W_p^{k,m}(Q_T)$ для скалярных, векторнозначных или матричнозначных функций (из контекста это всегда ясно), $H_p^\beta(\Omega)$ — пространства бесселевых потенциалов ([11], с. 79). Нормы в $L_2(\Omega)$, $W_2^l(\Omega)$, $L_2(Q_T)$, $W_2^{k,m}(Q_T)$ обозначаются как $|\cdot|_0$, $|\cdot|_l$, $\|\cdot\|_0$, $\|\cdot\|_{k,m}$ соответственно. Через $\overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega)$ обозначаем замыкание $C_0^\infty(\Omega)$ в норме $W_p^m(\Omega)$ $(m > 0)$, $W_{p,0}^m(\Omega) = W_p^m(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$, $m > 1/p$. Далее, $W_p^{-m}(\Omega) = (\overset{\circ}{W}{}_{p'}^m(\Omega))'$, $m > 0$, $p' = p/(p-1)$, $1 < p < +\infty$, знак $'$ обозначает сопряжение пространства. Пусть $\mathcal{V} = \{u : u \in C_0^\infty(\Omega, R^n),\ \operatorname{div} u = 0\}$. Здесь $C_0^\infty(\Omega, R^n)$ — множество бесконечно дифференцируемых функций на Ω с компактным носителем. Ниже H и V являются замыканием $\mathcal{V}$ по норме $|\cdot|_0$ и $|\cdot|_1$ соответственно ([12], с. 20).

3. Формулировка результата

Определение. Слабым решением задачи (1)–(4) называется пара (v, θ), где

$$v \in L_2(0,T;V) \cap W_2^1(0,T;V') \cap C_w(0,T;H) \equiv U(0,T),$$

$$\theta \in W_1^1(0,T;W_p^{-1}(\Omega)) \cap L_p(0,T;W_p^1(\Omega)) \cap C_w(0,T;W_p^{1-2/p}(\Omega)) \equiv \Upsilon, \quad 1 < p < +\infty,$$

удовлетворяющая соотношениям

$$\frac{d}{dt}(v,\varphi) - \left(v_i v, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) + \mu_0(\mathcal{E}(v),\mathcal{E}(\varphi)) + \mu_1(\theta)(\mathcal{E}(v),\mathcal{E}(\varphi)) + \\ + \mu_2\left(\int_0^t \mathcal{E}(v)(s,x)\,ds, \mathcal{E}(\varphi)\right) = \langle f,\varphi\rangle \quad (5)$$

при всех $\varphi \in V$ в смысле распределений на $[0,T]$ при п. в. t,

$$\frac{d}{dt}(\theta,\phi) - \left(v_i\theta, \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right) + \chi\left(\frac{\partial \theta}{\partial x_i}, \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right) = \\ = \langle g,\phi\rangle + (\widetilde{\mu}_1(\theta)\mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(v), \phi) + \mu_2\left(\int_0^t \mathcal{E}(v)(s,x)\,ds : \mathcal{E}(v)(t,x), \phi\right), \quad (6)$$

где $\widetilde{\mu}_1(\theta) = \mu_0 + \mu_1(\theta)$, в смысле распределений на $[0,T]$ для любых $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ при п. в. t, $p' = p/(p-1)$, в смысле распределений и условиям (2) и (4).

Знак $\langle\cdot,\cdot\rangle$ в (5) и (6) означает двойственность между V' и V и между $W_p^{-1}(\Omega)$ и $W_p^1(\Omega)$ соответственно. Здесь и ниже $(u,w)=\int\limits_\Omega u(x)w(x)\,dx$ для скалярных, векторнозначных или матричнозначных функций (из контекста это всегда ясно), $C_w(0,T;E)$ обозначает пространство слабо непрерывных функций со значениями в банаховом пространстве E.

Теорема 1. *Пусть функция* $\mu_1(s)\in C^2(-\infty,+\infty)$ *монотонно возрастает и* $0<m_1^*<\mu_1(\theta)<m_1^{**}$, $s\in(-\infty,+\infty)$, $f\in L_2(0,T;V')$, $v^0\in H$, $g\in L_1(0,T;H_p^{-2(1-1/p)}(\Omega))$, $\theta^0\in W_p^{1-2/p}(\Omega)$. *Тогда при* $p\in(1,4/3)$ *существует слабое решение задачи* (1)–(4).

4. Доказательство теоремы 1

Доказательство теоремы 1 проведем в несколько этапов.

Рассмотрим последовательность (v^n,θ^n), $n=0,1,2,\dots$, определяемую следующим образом. Пусть v^0 и θ^0 означают начальные значения для v и θ из (2) и (4). Пусть (v^n,θ^n) известны. Тогда v^{n+1} находится как слабое решение задачи

$$\partial v^{n+1}/\partial t+v_i^{n+1}\partial v^{n+1}/\partial x_i-\mu_0\triangle v^{n+1}-\mathrm{Div}[\mu_1(\theta^n)\mathcal{E}(v^{n+1})]-$$
$$-\mu_2\int_0^t\mathrm{Div}[\mathcal{E}(v^{n+1})(s,x)]ds+\nabla p^{n+1}=f,\quad \mathrm{div}\,v^{n+1}=0\ \text{ на }\ Q_T,\tag{7}$$
$$v^{n+1}|_{t=0}=v^0,\quad v^{n+1}|_{\partial\Omega}=0,\tag{8}$$

а θ^{n+1} находится как слабое решение задачи

$$\partial\theta^{n+1}/\partial t+v_i^{n+1}\partial\theta^{n+1}/\partial x_i-\chi\triangle\,\theta^{n+1}=(\mu_0+\mu_1(\theta^n))\mathcal{E}(v^{n+1}):\mathcal{E}(v^{n+1})+$$
$$+\mu_2\int_0^t\mathcal{E}(v^{n+1}(s,x)ds:\mathcal{E}(v^{n+1})+g;\tag{9}$$
$$\theta^{n+1}|_{t=0}=\theta^0,\quad \theta^{n+1}|_{\partial\Omega}=0.\tag{10}$$

Слабым решением задачи (7)–(8) называется функция $v^{n+1}\in U(0,T)$, удовлетворяющая соотношениям (8) и

$$\frac{d}{dt}(v^{n+1},\varphi)-\left(v_i^{n+1}v^{n+1},\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)+\mu_0(\mathcal{E}(v^{n+1})+(\mu_1(\theta^n)\mathcal{E}(v^{n+1}),\mathcal{E}(\varphi))+$$
$$+\mu_2\left(\int_0^t\mathcal{E}(v^{n+1})(s,x)\,ds,\mathcal{E}(\varphi)\right)=\langle f,\varphi\rangle\tag{11}$$

при всех $\varphi\in V$ в смысле распределений на [0,T] при п. в. t.

Слабым решением задачи (9)–(10) является функция $\theta^{n+1}\in\Upsilon$, удовлетворяющая (10) и

$$d(\theta^{n+1},\phi)/dt-(v_i^{n+1}\theta^{n+1},\partial\phi/\partial x_i)+\chi(\partial\theta^{n+1}/\partial x_i,\partial\phi/\partial x_i)=$$
$$=\langle g,\phi\rangle+(\widetilde{\mu}_1(\theta^n)\mathcal{E}(v^{n+1}):\mathcal{E}(v^{n+1}),\phi)+\mu_2\left(\int_0^t\mathcal{E}(v^{n+1})(s,x)\,ds:\mathcal{E}(v^{n+1})(t,x),\mathcal{E}(\phi)\right)\tag{12}$$

в смысле распределений на $[0,T]$ для любых $\phi\in C_0^\infty(\Omega)$ при п. в. t.

Теорема 2. *В условиях теоремы* 1 *последовательные приближения* (v^n,θ^n), $n=0,1,2,\dots$, *определены, и справедливы равномерные по* n *оценки*

$$\|v^n\|_{U(0,T)}\le M_1,\quad \|\theta^n\|_\Upsilon\le M_2,\quad n=0,1,2,\dots.\tag{13}$$

Здесь $\|v\|_{U(0,T)} \equiv \|\partial v/\partial t\|_{0,-1} + \|v\|_{0,1}$, $\|\theta\|_{\Upsilon} \equiv \|\partial\theta/\partial t\|_{L_1(0,T;W_p^{-1}(\Omega))} + \|\theta\|_{L_p(0,T;W_p^1(\Omega))}$.

Доказательство. Установим сначала слабую разрешимость задачи

$$\partial v/\partial t+v_i\partial v/\partial x_i-\mu_0\triangle v-\mathrm{Div}[m(t,x)\mathcal{E}(v)]-\mu_2\int_0^t \mathrm{Div}[\mathcal{E}(v)(s,x)]\,ds+\nabla p = f,\ \ \mathrm{div}\, v = 0 \text{ на } Q_T, \tag{14}$$

$$v|_{t=0} = v^0, \quad v|_{\partial\Omega} = 0, \tag{15}$$

где $m(t,x)$ измерима и $0 < k_1 \le m(t,x) \le k_2$. При $\mu_2 = 0$ разрешимость задачи (14)–(15) и оценка

$$\|\partial v/\partial t\|_{0,-1} + \sup_t |v(t,\cdot)|_0 + \|v\|_{0,1} \le M_3(\|f\|_{0,-1} + |v^0|_0) \tag{16}$$

установлены в [13]. Обозначим через $R(f,v^0,m)$ оператор, ставящий в соответствие (f,v^0,m) решение v задачи (14)–(15) при $\mu_2 = 0$ так, что $v = R(f,v^0,m)$.

Для доказательства разрешимости задачи (14)–(15) перепишем (14) в виде

$$\partial v/\partial t + v_i\partial v/\partial x_i - \mu_0\triangle v - \mathrm{Div}[m(t,x)\,\mathcal{E}(v)] + \nabla p = w,$$
$$w = f + \mu_2\int_0^t \mathrm{Div}[\mathcal{E}(v)(s,x)]\,ds. \tag{17}$$

Используя оператор R, перепишем (17) в виде

$$w = K(w), \quad K(w) \equiv f + \mu_2\int_0^t \mathrm{Div}[\mathcal{E}(R(w,v^0,m))(s,x)]\,ds. \tag{18}$$

Установим разрешимость уравнения (18). С помощью (16) получаем оценки

$$\|K(w)\|_{0,-1} \le \|f\|_{0,-1} + M_4T(\|w\|_{0,-1} + |v^0|_0) \le \|f\|_{0,-1} + M_5T(R + |v^0|_0),$$
$$\|K(w_1) - K(w_2)\|_{0,-1} \le M_6T\|w_1 - w_2\|_{0,-1}.$$

Отсюда вытекает, что при $T \le T_0$, T_0 достаточно малое, оператор K преобразует в себя шар $S(R) = \{w : \|w\|_{0,-1} \le R\}$ достаточно большого радиуса R и является сжимающим.

Тогда при малом T в силу принципа сжимающих отображений уравнение (18), а следовательно, и (14)–(15) однозначно разрешимы.

В случае произвольного T нужно рассмотреть последовательность задач

$$\partial v^k/\partial t + v_i^k\partial v^k/\partial x_i - \mu_0\triangle v^k - \mathrm{Div}\, v^k[m(t,x)\,\mathcal{E}(v^k)]-$$
$$- \mu_2\int_0^t \mathrm{Div}\, v^k[\mathcal{E}(v^k)(s,x)]\,ds + \nabla p^k = f, \quad \mathrm{div}\, v^k = 0 \text{ на } Q_T, \tag{19}$$

$$v^k(T_k,x) = w^k(x), \quad x \in \Omega, \quad v^k(t,x) = 0, \quad T_k \le t \le T_{k+1}, \quad x \in \partial\Omega, \tag{20}$$

где $T_k = kT_0$, $k = 1,2,\ldots,[T/T_0]$, $w^k(x) = v^{k-1}(T_k,x)$, $v^0(0,x) = v^0(x)$ является решением задачи (14)–(15) на $[0,T_0]$. Без ограничения общности считаем T/T_0 целым.

Решения задач (19)–(20) ищутся в классах $U(T_k,T_{k+1})$, определяемых аналогично $U(0,T)$ с заменой $(0,T)$ на (T_k,T_{k+1}). Легко видеть, что оценка (16) решения задачи (14)–(15) на $[0,T]$ справедлива и для решений задач (19)–(20) с заменой $[0,T]$ на $[T_k,T_{k+1}]$ и v^0 на w^k.

В частности, из этой оценки следует равномерная ограниченность $|w^k(t,x)|_0$. Отсюда следует, что задачи (19)–(20) однозначно разрешимы на соответствующих отрезках $[T_k,T_{k+1}]$.

Определим $v(t,x)$ при $t \in [0,T]$ как функцию, равную $v^k(t,x)$ на $[T_k,T_{k+1}]$. Очевидно, $v(t,x)$ является решением задачи (14)–(15) на $[0,T]$ и удовлетворяет оценке (16).

Полагая $m(t,x) = \mu_1(\theta^n(t,x))$, имеем разрешимость задачи (7)–(8) и оценку

$$\|v^{n+1}\|_{U(0,T)} \le M(\|f\|_{0,-1} + |v^0|_0).$$

Теперь рассмотрим задачу (9)–(10) при фиксированном $v^{n+1} \in U(0,T)$. Воспользуемся вытекающим из [6] результатом.

Лемма. *Пусть* $g \in L_1(0,T; H_p^{-2(1-1/p)}(\Omega))$, $\widehat{g} \in L_1(0,T; L_1(\Omega))$, $\theta^0 \in W_p^{1-2/p}(\Omega)$. *Тогда задача* $\partial\theta/\partial t + v_i \partial\theta/\partial x_i - \chi\triangle\theta = \widehat{g} + g$, $\theta|_{t=0} = \theta^0$, $\theta|_{\partial\Omega} = 0$ *имеет слабое решение и справедлива оценка* $\|\theta\|_\Upsilon \le M\big(\|\widehat{g}\|_{L_1(0,T;L_1(\Omega))} + \|g\|_{L_1(0,T;H_p^{-2(1-1/p)}(\Omega))} + \|v\|_{0,1}^2 + \|\theta^0\|_{W_p^{1-2/p}(\Omega)}\big)$.

Для доказательства разрешимости задачи (9)–(10) показывается, что для $\widehat{g}$, определяемого вторым слагаемым правой части (9), справедлива оценка $\|\widehat{g}\|_{L_1(0,T;L_1(\Omega))} \le M\|v^{n+1}\|_{0,1}^2$. Отсюда и из условия на g с помощью леммы получаем слабую разрешимость задачи (9)–(10) и оценку

$$\|\theta^{n+1}\|_\Upsilon \le M\big(\|g\|_{L_1(0,T;H_p^{-2(1-/p)}(\Omega))} + \|v^{n+1}\|_{0,1}^2 + \|\theta^0\|_{W_p^{1-2/p}(\Omega)}\big). \tag{21}$$

Оценки (13) установлены. □

Исследуем вопрос о сходимости последовательности (v^n, θ^n). Рассмотрим сначала θ^n.

Из второй оценки (13) в силу одного результата из [14] вытекает относительная компактность θ^n в $L_p(0,T; L_p(\Omega))$. Без ограничения общности будем считать, что θ^n сходится к θ п. в. в $L_p(Q_T)$.

Рассмотрим теперь v^n. В силу первой оценки (13) получаем, что последовательность v^n ограничена в $U(0,T)$, и, следовательно, слабо компактна в $L_2(0,T;V)$, а последовательность $\partial v^n/\partial t$ ограничена в $L_2(0,T;V')$ и слабо компактна в $L_2(0,T;V')$.

Без ограничения общности будем считать, что v^n слабо сходится к v в $L_2(0,T;V)$, а $\partial v^n/\partial t$ слабо сходится в $L_2(0,T;V')$. Но последовательность v^n обладает лучшими свойствами.

Теорема 3. *Последовательность* v^n *сильно сходится в к* v, *а* $v^n(T,x)$ *сильно сходится в* H *к* $v(T,x)$.

Доказательство. Используется тождество, получаемое умножением (7) на v^{n+1}:

$$\frac{1}{2}|v^n(T,\cdot)|_0^2 + \mu_0\|\mathcal{E}(v^n)\|_0^2 + \|\mu_1^{1/2}(\theta^{n-1})\mathcal{E}(v^n)\|_0^2 + \frac{1}{2}\mu_2\bigg|\int_0^T \mathcal{E}(v^n)(s,x)\,ds\bigg|_0^2 = \\ = \frac{1}{2}|v^0|_0^2 + \int_0^T \langle f, v^n\rangle\,ds \tag{22}$$

и аналогичное тождество для v, θ (вместо v^n, θ^{n-1}). Обозначим через $\aleph$ гильбертово пространство $H \times L_2(0,T;L_2(\Omega)) \times L_2(0,T;V) \times H$. Тогда левая часть (22) является нормой элемента $z^n \in \aleph$:

$$z^n = \bigg(\frac{1}{4}v^n(T,x),\ \mu_0^{1/2}\mathcal{E}(v^n)(t,x), \mu_1^{1/2}(\theta(t,x))\mathcal{E}(v^n)(t,x),\ \frac{1}{4}\mu_2^{1/2}\int_0^T \mathcal{E}(v^n)(s,x)\,ds\bigg).$$

Из слабой сходимости v^n к v в $L_2(0,T;V)$ вытекает сходимость правой части (22) к $\frac{1}{2}|v^0|_0^2 + \int_0^T \langle f, v\rangle\,ds$, а следовательно, и норм $\|z^n\|_\aleph$ к $\|z\|_\aleph$, где

$$z = \bigg(\frac{1}{4}v(T,x),\ \mu_0^{1/2}\mathcal{E}(v)(t,x), \mu_1^{1/2}(\theta(t,x))\mathcal{E}(v)(t,x),\ \frac{1}{4}\mu_2^{1/2}\int_0^T \mathcal{E}(v)(s,x)\,ds\bigg).$$

Используя слабую сходимость z^n к z и сходимость норм $\|z^n\|_\aleph$ к $\|z\|_\aleph$, в силу теоремы 8 ([15], с. 179) получаем сильную сходимость z^n к z, а следовательно, и $v^n(T,x)$ к $v(T,x)$ в H, v^n к v в $L_2(0,T;V)$. □

Покажем теперь, что полученное (v, θ) ($v \in U(0,T)$, $\theta \in \Upsilon$) является слабым решением задачи (1)–(4).

Установленные выше сходимости для v^n и θ^n в соответствующих функциональных пространствах позволяют сделать предельные переходы в (11) и (12) соответственно и получить (5) и (6).

Из первой оценки (13) и леммы 1.4 из ([12], с. 211) следует, что $v \in C_w(0,T;H)$. Таким образом, $v \in U(0,T)$. Кроме того, $v|_{t=0} = v^n|_{t=0} = v^0$. Следовательно, v удовлетворяет требованиям слабого решения задачи (1)–(4) для v. Из второй оценки (13) и леммы 1.4 ([12], с. 211) следует, что $\theta \in C_w(0,T;W_p^{1-2/p}(\Omega))$. Таким образом, $\theta \in \Upsilon$. Кроме того, $\theta|_{t=0} = \theta^n|_{t=0} = \theta^0$. Следовательно, θ удовлетворяет требованиям слабого решения задачи (1)–(4) для θ.

Мы показали, что (v, θ) является слабым решением задачи (1)–(4). □

Литература

[1] Oldroyd J.G. *Non-Newtonian flow of liquids and solids. Rheology: theory and applications*, Ed. by F.R. Eirich (AP, New York, 1956), Vol. I.

[2] Осколков А.П. *Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина–Фойгта и жидкостей Олдройда*, Тр. МИАН СССР **179**, 126–184 (1988).

[3] Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. *Краевые задачи механики* (Наука, Новосибирск, 1983).

[4] Агранович Ю.Я., Соболевский П.Е. *Исследование математических моделей вязкоупругих жидкостей*, Докл. АН УССР. Сер. А, № 10, 3–6 (1989).

[5] Орлов В.П. *О сильных решениях начально-краевой адачи для регуляризованной модели нелинейно-вязкоупругой среды*, Матем. заметки **84** (2), 238–253 (2008).

[6] Звягин В.Г., Орлов В.П. *Разрешимость в слабом смысле системы термовязкоупругости для модели Джеффриса*, Изв. вузов. Матем., № 8, 51–56 (2013).

[7] Blanchard D., Bruyère N., and Guibé O. *Existence and uniqueness of the solution of a Boussinesq system with nonlinear dissipation*, Commun. Pure Appl. Anal. **12** (5), 2213–2227 (2013).

[8] Pawlow I., Zajaczkowski W. *Global regular solutions to a Kelvin–Voigt type thermoviscoelastic system*, arXiv:1112.3176v1 [math.AP] 267–293 (2011).

[9] Consiglieri L. *Weak solutions for a class of non-Newtonian fluids with energy transfer*, J. Math. Fluid Mech. **2** (3), 267–293 (2000).

[10] Bonetti E., Bonfanti G. *Existence and uniqueness of the solution to a* 3D *thermoviscoelastic system*, Electronic J. Diff. Equat., № 50, 1–15 (2003).

[11] Крейн С.Г. (ред.) *Функциональный анализ* (Наука, М., 1972).

[12] Темам Р. *Уравнения Навье–Стокса* (Мир, М., 1981).

[13] Lions J.-L. *Quelques methodes de resolution des problemes aux limites non lineaires* (Dunod Gauthiers-Villar, Paris, 1969).

[14] Simon J. *Compact sets in the space* $L^p(0,T;B)$, Ann. Math. Pure Appl. (4) **146**, 65–96 (1988).

[15] Иосида К. *Функциональный анализ* (Мир, М., 1967).

В.П. Орлов

профессор, кафедра математического моделирования,
Воронежский государственный университет,
Университетская пл., д. 1, г. Воронеж, 394006, Россия,

`e-mail:` orlov_vp@mail.ru

М.И. Паршин

аспирант, кафедра математического моделирования,
Воронежский государственный университет,
Университетская пл., д. 1, г. Воронеж, 394006, Россия,

`e-mail:` parshin_maksim@mail.ru

V.P. Orlov and M.I. Parshin

On one problem of dynamics of thermoviscoelastic medium of Oldroid type

Abstract. We establish nonlocal existence theorem for the weak solution for an initial-boundary value problem for the dynamic model of thermoviscoelasticity of Oldroid type in the planar case.

Keywords: thermoviscoelastic medium, motion equations, initial-boundary value problem, weak solution, fixed point.

V.P. Orlov

Professor, Chair of Mathematical Modeling,
Voronezh State University,
1 Universitetskaya Sq., Voronezh, 394006 Russia,

e-mail: orlov_vp@mail.ru

M.I. Parshin

Postgraduite, Chair of Mathematical Modeling,
Voronezh State University,
1 Universitetskaya Sq., Voronezh, 394006 Russia,

e-mail: parshin_maksim@mail.ru