$\Sigma-$определимость в наследственно конечных надстройках

Светлана Александрова

Новосибирский государственный университет

27 октября 2017

Допустимые множества

Пусть M – множество праэлементов

- $V_M(0) = \varnothing$
- $V_M(\alpha+1) = \mathcal{P}(M \cup V_M(\alpha))$
- $V_M(\beta) = \bigcup\limits_{\alpha<\beta} V_M(\alpha)$, если β – предельный ординал.
- $\mathbb{V}_M = \bigcup\limits_{\alpha} V_M(\alpha)$

Структура $\mathbb{A}$ KPU называется **допустимым множеством**, если множество $M \cup \mathbb{A}$ транзитивно в $\mathbb{V}_M$ с отношением $\in$.

Аксиомы KPU

- Экстенсиональность:
  $\forall x \forall y((\neg U(x) \& \neg U(y)) \to (\forall z((z \in x) \leftrightarrow (z \in y)) \to (x \approx y)))$
- Пара: $\forall x \forall y \exists z((x \in z) \& (y \in z))$
- Объединение: $\forall x \exists y(\neg U(y) \& \forall z \forall w(((z \in x) \& (w \in z)) \to (w \in y)))$
- Праэлементы: $\forall x(U(x) \to \forall y \neg (y \in x))$
- Пустое множество: $\exists x(\neg U(x) \& \forall y \neg (y \in x))$
- Основание: $\forall \overline{z}(\exists x \varphi(x, \overline{z}) \to \exists x(\varphi(x, \overline{z}) \& \forall y((y \in x) \to \neg\, \varphi(y, \overline{z}))))$
- Δ_0-выделение:
  $\forall \overline{z} \forall x(\neg U(x) \to \exists y(\neg U(y) \& \forall w((w \in y) \leftrightarrow ((w \in x) \& \varphi(w, \overline{z})))))$
- Δ_0-преобразование:
  $\forall \overline{z} \forall x(\neg U(x) \to ((\forall w \in x) \exists y \varphi(w, y, \overline{z}) \to \exists u(\forall w \in x)(\exists y \in u) \varphi(w, y, \overline{z})))$

Наследственно конечная надстройка

$\mathfrak{M}$ – модель сигнатуры σ

- $HF_0(M) = \{\varnothing\}$;
- $HF_{n+1}(M) = \mathcal{P}_\omega(HF_n(M) \cup M)$;
- $HF(M) = \bigcup\limits_{n<\omega} HF_n(M)$,

$$\mathbb{HF}(\mathfrak{M}) = \langle M, HF(M), \sigma \cup \{\varnothing, \in^2, U^1\}\rangle$$

$\Sigma-$определимость

- $\Sigma-$**множество** – множество, определимое $\Sigma-$формулой.
- $\Sigma-$**предикат** $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – предикат, представимый $\Sigma-$формулой.
- Функция $f(x)$ Σ-**определима**, если ее график – Σ-предикат.

Чистые множества

- $HF_0(\varnothing) = \varnothing$
- $HF_{n+1}(\varnothing) = \mathcal{P}_\omega(HF_n(\varnothing))$
- $HF(\varnothing) = \bigcup\limits_{n<\omega} HF_n(\varnothing)$

- Натуральные числа отождествляются с конечными ординалами $\mathbb{HF}(\varnothing)$.

Множества $\mathbb{HF}(\varnothing)$

- B – $\Sigma-$подмножество $\mathbb{HF}(\varnothing) \Leftrightarrow B$ вычислимо перечислимо.
- B – $\Delta-$подмножество $\mathbb{HF}(\varnothing) \Leftrightarrow B$ вычислимо.

Действительные числа

$\mathbb{R} = \langle \mathbb{R}, +, \cdot, <, 0, 1 \rangle$.

(М.В. Коровина 1990)

В $HW(\mathbb{R})$ могут быть Σ-определимы только алгебраические функции.

Действительные числа с экспонентой

$\mathbb{R}_{exp} = \langle \mathbb{R}, +, \cdot, exp(x), <, 0, 1 \rangle$.

Списочная надстройка (Гончаров, Свириденко)

$\mathfrak{M}$ – модель сигнатуры σ

- $S^0(M)$ – конечные списки M,
- $S^{N+1}(M)$ – конечные списки $S^n(M) \cup M$.
- $S(M) = \bigcup_{n\in\omega} S^n(M)$

$$HW(\mathfrak{M}) = \langle M, S(M), \sigma \cup \{head, tail, cons, nil, \in\}\rangle$$

- $head(< x_1, x_2, \ \ldots, x_n >) = x_n,$
  $head(nil) = nil$
- $tail(< x_1, x_2, \ \ldots, x_{n+1} >) = (< x_1, x_2, \ \ldots, x_n >),$
  $tail(< y >) = tail(nil) = nil$
- $cons(< x_1, x_2, \ \ldots, x_n >, y) = (< x_1, x_2, \ \ldots, x_n, y >),$
- $y \in < x_1, x_2, \ \ldots, x_n > \iff y = x_i$, для некоторого $1 \leq i \leq n$.
- $< y_1, y_2, \ \ldots, y_m > \sqsubseteq < x_1, x_2, \ \ldots, x_n > \iff m \leq n$ и $y_i = x_i$, для всех $1 \leq i \leq m$.

$\Sigma-$представимость моделей (Ю. Л. Ершов)

$\mathfrak{A} = \langle A; P_0^{n_0}, \ldots, P_k^{n_k} \rangle$ $\Sigma-$**представима** в $\mathbb{A}$, если существуют $\Sigma-$формулы (с параметрами в $\mathbb{A}$) $S(x)$, $E^+(x,y)$, $E^-(x,y)$, $\Psi_i^+(x_1,\ldots,x_{n_i})$, $\Psi_i^-(x_1,\ldots,x_{n_i})$, $i=1,\ldots,k$, такие, что

1. $S^* = \{x \in \mathbb{A} | \mathbb{A} \models S(x)\} \neq \varnothing$,
2. $E^+(x,y)$ определяет конгруэнцию η на $\mathfrak{A}^* = \langle S^*; P_1^*, \ldots, P_k^* \rangle$, $(P_i^* = \{< x_1, \ldots, x_{n_i} > | \mathbb{A} \models \Psi_i^+(x_1,\ldots,x_{n_i})\})$
3. множества, определенные с помощью E^+ и E^-, не пересекаются и их объединение равно всему $(S^*)^2$,
4. множества, определенные предикатами Ψ_i^+ и Ψ_i^+, не пересекаются и их объединение равно всему $(S^*)^n$,
5. $\mathfrak{A}^*/\eta \cong \mathfrak{A}$.

Теорема

$\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ $\Sigma-$представима в $HW(\mathfrak{M})$ и $HW(\mathfrak{M})$ $\Sigma-$представима в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$.

- Изоморфизм $\mathfrak{A}^*/\eta \cong \mathfrak{A}$ в обоих случаях тождественен на $\mathfrak{M}$.

Следствие

$X \subseteq M$ $\Sigma-$определимо в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ тогда и только тогда, когда X $\Sigma-$определимо в $HW(\mathfrak{M})$

Дескриптивные свойства

(Ю.Л. Ершов 1996)

В любом допустимом множестве существует универсальный Σ-предикат.

(В. Руднев 1986)

Существует алгебраическая система $\mathfrak{M}$ такая, что в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ нет универсальной Σ-функции.

Униформизация

$\mathbb{A}$ обладает свойством **униформизации**, если для любого $\Sigma-$предиката R в $\mathbb{A}$ существует частичная $\Sigma-$функция f в $\mathbb{A}$ такая, что $\Gamma_f \subseteq R$ и $\delta_f = \{x : \exists y R(x, y)\}$

Униформизация

Теорема

Для любого $\Sigma-$определимого в $HW(\mathbb{R}_{exp})$ предиката $P \subseteq HW(\mathbb{R}) \times HW(\mathbb{R})$ существует $\Sigma-$функция f с областью определения $\{\overline{x} : \exists y P(\overline{x}, y)\}$ и графиком $\Gamma_f \subseteq P$.

Следствие

Существует $\Sigma-$определимая универсальная функция для $\Sigma-$определимых в $HW(\mathbb{R}_{exp})$ действительных функциий.

Вычислимость на несчетных объектах:

- Вычислимый анализ
- Локальная вычислимость
- $\Sigma-$определимость
- ...

Вычислимый анализ

Определение (К. Вайраух)

Функция $f : R^n \to R$ называется **вычислимой**, если существует машина тьюринга с оракулом, которая для заданного $k \in N$ может запрашивать аппроксимацию произвольной точности для входа $x \in dom(f)$; т. е., может запрашивать конечное число кортежей вида $p \in Q_n$ рациональных чисел с $d(x, p) < 2^{-i}$, где значение i может зависеть от ответов на предыдущие вопросы, и после конечного числа шагов машина выдает рациональное число q на выходной ленте с $|f(x) - q| < 2^{-k}$.

Вычислимый анализ

Определение

Представление множества X – сюрьективная функция $\delta :\subseteq \Sigma^\omega \to X$, где Σ – некоторый алфавит. Для произвольного $x \in X$ и любого $p \in \Sigma^\omega$ с $\delta(p) = x$, последовательность p называется δ-именем x.

Определение

Представлением Коши $\rho_C :\subseteq \Sigma^\omega \to \mathbb{R}$ действительного числа называется представление, где действительное число x задано с помощью бесконечной последовательности символов, кодирующей быстро сходящуюся к x последовательность рациональных чисел:
$\rho_C(w_1\#w_2\#\dots) = x; \Leftrightarrow \ |x - \nu_{\mathbb{Q}}(w_i)| < 2^{-i}$ для всех $i \in \mathbb{N}$.

Теорема

Пусть $\mathbb{R}^*$ расширение упорядоченного поля действительных чисел с разрешимой теорией. Тогда существует вычислимая действительная функция, не $\Sigma-$определимая в $\mathbb{HF}(\mathbb{R}^*)$.

Предположение Шануэля:

Пусть n – натуральное число, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Тогда степень трансцендентности расширения $\mathbb{Q}(a_1, \ldots, a_n, e^{a_1}, \ldots, e^{a_n}) \geq n$.

(А. Макинтир, А. Вилки 1996)

При условии выполнения предположения Шануэля теория $\mathbb{R}_{exp}$ разрешима.

Следствие (modulo Schanuel Conjecture)

Существует вычислимая действительная функция, не $\Sigma-$определимая в наследственно конечной надстройке над полем действительных чисел с экспонентой.

(А. Макинтир, А. Вилки 1996)

Если предположение Шануэля выполняется, то π не может быть определено в $\mathbb{R}_{exp}$.

Следствие

Если условие Шануэля выполняется, то $sin(x)$ не может быть определен в $HW(\mathbb{R}_{exp})$.

Замечание

Функция сигнум

$$sign(x) = \begin{cases} 0, & if\ x < 0, \\ 1, & if\ x \geq 0. \end{cases}$$

$\Sigma-$определима в $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$, но не вычислима.

Теорема (Александрова, Баженов.)

Существует непрерывная $\Sigma-$определимая в $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$ действительная функция, не являющаяся вычислимой.

В.п. открытые и в.п. замкнутые множества

- Пусть $A \in \mathbb{R}^n$ замкнуто. A – **в.п. замкнуто**, если множество $\{(q,\varepsilon) \in \mathbb{Q}^n \times \mathbb{Q}^+ | B(q,\varepsilon) \cap A \neq \varnothing\}$ – в.п.
- Пусть $U \in \mathbb{R}^n$ открыто. U – **в.п. открыто**, если $U = \bigcup\limits_{(q,\varepsilon)\in S} B(q,\varepsilon)$ для некоторого в.п. множества $S \subseteq \mathbb{Q}^n \times \mathbb{Q}^+$ (где $\mathbb{Q}^+ \leftrightharpoons \{q \in \mathbb{Q} | q > 0\}$).

(Александрова, Баженов.)

Замкнутые

- Любое $\Sigma-$определимое в $\mathbb{HF}(\mathbb{R}_{exp})$ замкнутое подмножество $\mathbb{R}$ является в.п. замкнутым.
- Существует вычислимое замкнутое множество, не являющееся $\Sigma-$определимым в $\mathbb{HF}(\mathbb{R}_{exp})$.

Открытые

- Существует $\Delta-$определимое в $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$ открытое множество, не являющееся в.п. открытым.
- Любое в.п. открытое подмножество R является $\Sigma-$определимым в $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$.

Локальная вычислимость

Р. Миллер

Простое покрытие S – набор $\{A_i\}_{i\in I}$ моделей $\mathfrak{A}$ теории T, порожденных конечными кортежами a_i, такой, что:

- каждая конечно порожденная структра S изоморфна некоторому A_i
- каждая A_i изоморфно вложима в S

Простое покрытие **вычислимо**, если каждая $A_i \in \mathfrak{A}$ – вычислимая структура с начальным сегментом ω в качестве основного множества.

Простое покрытие **равномерно вычислимо**, если последовательность $\{(A_i, a_i)\}_{i\in I}$ может быть задана равномерно вычислимой, включая индекс для каждого a_i.

Локальная вычислимость

Покрытие S состоит из простых покрытий $\mathfrak{A}$ S вместе с множествами $I^{\mathfrak{A}}_{i,j}$ (для всех $A_i, A_j \in \mathfrak{A}$) инъективных гомоморфизмов $f : A_i \to A_j$, удовлетворяющих:

- Для каждой конечно порожденной подструктуры $B \subseteq C \subseteq S$, существует $i, j \in \omega$, $f \in I^{\mathfrak{A}}_{i,j}$ и $\beta : A_i \cong B$ и $\gamma : A_j \cong C$ с $\beta = \gamma \circ f$.
- Для всех k и m и $g \in I^{\mathfrak{A}}_{k,m}$ существует конечно порожденная подструктура $D \subseteq E \subseteq S$ и изоморфизм $\delta : A_k \cong D$ и $\epsilon : A_m \cong E$ with $\delta = \epsilon \circ g$.
- для каждых i, j, k и всех отображений $f \in I^{\mathfrak{A}}_{i,j}$ и $g \in I^{\mathfrak{A}}_{i,k}$ существует m и отображения $h \in I^{\mathfrak{A}}_{j,m}$ и $p \in I^{\mathfrak{A}}_{k,m}$ с $p \circ g = h \circ f$.

Локальная вычислимость

Покрытие **вычислимо**, если $\mathfrak{A}$ – равномерно вычислимое простое покрытие S и существует в.п. множество W такое что для всех $i, j \in \omega$,

$$I^{\mathfrak{A}}_{i,j} = \{\varphi_e \restriction A_i : \langle i, j, e\rangle \in W\}$$

Структура S **локально вычислима** если она имеет равномерно вычислимое покрытие.

Локальная вычислимость

Пусть A – равномерно вычислимое покрытие для структуры S. Множество M – **система соответствия** A и S если оно удовлетворяет следующим условиям:

- Каждый элемент M – вложение некоторой $A_i \in \mathfrak{A}$ в S
- Каждая $A_i \in \mathfrak{A}$ – область определения некоторого $\beta \in M$
- Каждая конечно порожденная $B \subseteq S$ – образ некоторого $\beta \in M$
- Для каждых i и j и каждого $\beta \in M$ с областью определения A_i, каждый $f \in I^{\mathfrak{A}}_{i,j}$ продолжается до вложения $\beta(A_i) \subseteq \gamma(A_j)$ via β и некоторого $\gamma \in M$
- Для каждых i и $\beta \in M$ с областью определения A_i, и каждой конечно порожденной $C \subseteq S$, содержащей $\beta(A_i)$, существует j и $f \in I^{\mathfrak{A}}_{i,j}$ которое продолжается до $\beta(A_i) \subseteq C$ с помощью β и некоторого $\gamma : A_j \to C \in M$

Локальная вычислимость

Система соответствия **совершенна**, если она также удовлетворяет

- Для каждой конечно порожденной $B \subseteq S$ if $\beta : A_j \twoheadrightarrow B$ и $\gamma : A_j \twoheadrightarrow B$ оба лежат в M и имеют образ B, тогда $\gamma^{-1} \circ \beta \in I^{\mathfrak{A}}_{i,j}$

Если совершенная система соответствия существует, то S называют **совершенно локально вычислимы**м с совершенным покрытием $\mathfrak{A}$.

Локальная вычислимость

(Р. Миллер)

- Каждое алгебраически замкнутое поле – совершенно локально вычислимая структура.
- $\mathbb{R}$ не является локально вычислимым.

Теорема (Александрова, Баженов, Миллер.)

- Пусть $\mathfrak{M}$ – локально вычислимая структура. Тогда $\mathbb{HW}(\mathfrak{M})$ – локально вычислима.
- Если $\mathfrak{M}$ совершенно локально вычислима, то $\mathbb{HW}(\mathfrak{M})$ совершенно локально вычислима.

Σ-представимость

Σ-представления с тривиальной эквивалентностью E называют **простыми**.

Результаты (А. С. Морозов, М. В. Коровина 2008)

- Каждая счетная структура конечного языка Σ-представима (с одним параметром p) над $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$.
- Для счетной структуры $\mathfrak{M}$ конечного языка следующие условия эквивалентны:
  1. $\mathfrak{M}$ Σ-представимы над $\mathbb{HF}(\mathbb{C})$,
  2. $\mathfrak{M}$ имеет вычислимую копию.

Совершенная локальная вычислимость & Σ−представления

Теорема (Александрова, Баженов, Миллер.)

Пусть $\mathfrak{B}$ – совершенно локально вычислимая структура. Тогда каждая структура $\mathfrak{A}$ (в конечном языке) Σ-представимая в $\mathfrak{B}$ также совершенно локально вычислима.

Следствие

Каждая структура $\mathfrak{A}$, Σ-представимая в $\mathbb{HF}(\mathbb{C})$ совершенно локально вычислима.

Экзистенциально-штейницевы структуры

Предположим что A – некоторое множество, и $\mathbf{C}\colon \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$. Упорядоченная пара $\langle A, \mathbf{C}\rangle$ – **штейницева система с замыканием**, если для каждых $S, U \subseteq A$ и $a, b \in A$ выполнены следующие условия:

- $S \subseteq \mathbf{C}(S)$;
- $S \subseteq U$ влечет $\mathbf{C}(S) \subseteq \mathbf{C}(U)$;
- если $a \in \mathbf{C}(S)$, тогда существует конечное $S_0 \subseteq S$, такое, что $a \in \mathbf{C}(S_0)$;
- $\mathbf{C}(\mathbf{C}(S)) = \mathbf{C}(S)$;
- если $a \in \mathbf{C}(A \cup \{b\}) \setminus \mathbf{C}(A)$, тогда $b \in \mathbf{C}(A \cup \{a\})$.

Экзистенциально-штейницевы структуры

- Пусть $\mathfrak{M}$ – структура, и A подмножество $\mathfrak{M}$. Элемент $a \in \mathfrak{M}$ называется $\exists$-**алгебраическим над** A если существует $\exists$-формула $\varphi(x, \bar{y})$ и кортеж параметров $\bar{b} \in A$ такой, что множество $\varphi^{\mathfrak{M}}[x, \bar{b}]$ конечно и содержит a.
- $\mathbf{C}_{\exists}^{\mathfrak{M}}(A)$ означает множество всех элементов $\mathfrak{M}$, $\exists$-алгебраических над A.

Определение

Структура $\mathfrak{M}$ $\exists$-**штейницева**, если упорядоченная пара $\langle \mathfrak{M}, \mathbf{C}_{\exists}^{\mathfrak{M}} \rangle$ является штейницевой системой с замыканием.

Экзистенциально-штейницевы структуры

Теорема (А. С. Морозов 2016)

Любое действительно замкнутое и любое алгебраически замкнутое поле – $\exists$-штейницевы структуры. В частности, упорядоченное поле действительных чисел $\mathbb{R}$ и поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ $\exists$-штейницевы.

$\mathcal{P}(\omega)^*$ означает факторструктуру булевой алгебры всех подмножеств ω по модулю идеала Фреше.

Предложение (А. С. Морозов 2016)

Предположим, что $\mathfrak{M}$ – $\exists$-штейницева структура, и структура $\mathfrak{N}$ имеет простое Σ-представление (с параметрами) над $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$. Тогда булева алгебра $\mathcal{P}(\omega)^*$ не вложима в $\mathfrak{N}$.

Безатомная булева алгебра

Предложение (Александрова, Баженов, Миллер.)

Любая безатомная булева алгебра – совершенно локально вычислимая структура.

Следствие

Предположим, что $\mathfrak{M}$ $\exists$-штейницева структура, и структура $\mathfrak{N}$ имеет простое Σ-представление (с параметрами) над $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$. Тогда булева алгебра $\mathcal{P}(\omega)^*$ – совершенно локально вычислимая структура, не вложимая в $\mathfrak{N}$.

В частности, $\mathcal{P}(\omega)^*$ – совершенно локально вычислимая структура не имеющая простых Σ-представлений над $\mathbb{HF}(\mathbb{C})$.

Спасибо за внимание.