

В.Л. ДИЛЬМАН, Т.В. КАРПЕТА

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПЛАСТИЧЕСКОГО СЛОЯ С ПЕРЕМЕННЫМ ПО ТОЛЩИНЕ ПРЕДЕЛОМ ТЕКУЧЕСТИ ПРИ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Аннотация. Исследуется напряженное состояние поперечного слоя с переменной по толщине прочностью в полосе при плоской деформации под растягивающей нагрузкой. Приближенно вычисляются первые интегралы системы уравнений пластического равновесия. Получен аналог первой теоремы Генки. Приближенно решена задача сопряжения для напряжений на контактной границе.

Ключевые слова: напряженное состояние, неоднородный пластический слой, плоская деформация, интегралы Генки.

УДК: 517.958 : 539.4

ВВЕДЕНИЕ

Механические свойства материалов во многих случаях нельзя считать однородными [1], [2]. При исследовании напряженно-деформированного состояния и несущей способности сварных соединений, в которых менее прочным слоем может быть сварной шов или прослойка в зоне термического влияния, можно выделить три модельных случая распределения прочности по толщине слоя:

- 1) прочность постоянна,
- 2) прочность минимальна на среднем сечении слоя,
- 3) прочность максимальна на среднем сечении слоя.

Первый случай подробно исследован ([3], [4] и библиография в них). Вторым случаем рассматривался в работах [1], [2], в которых изучалось напряженное состояние неоднородной по толщине тонкой полосы при сжатии между двумя параллельными плитами в частном случае, когда применима гипотеза Л. Прандтля [5] о постоянстве касательных напряжений по длине полосы. Другие гипотезы, основанные на свойствах напряженного состояния полосы конечной длины, во втором и третьем случаях использовались в [6]. В упомянутых работах не учитывались особенности напряженного состояния пластического слоя в окрестности свободных поверхностей. При моделировании напряженного состояния и исследовании статической прочности менее прочных слоев в пластической зоне возникает недоопределенная краевая задача для системы уравнений пластического равновесия, решение которой можно проводить по следующей схеме.

1. Находится решение в окрестности свободной границы в зоне, где оно однозначно определяется граничными условиями в силу гиперболичности системы уравнений пластического равновесия, для чего вычисляются (точно или приближенно) инварианты Римана, с

помощью которых решается задача сопряжения для напряжений на контактной границе. Найденные на отрезке FA (рис.) напряжения используются для вычисления критической нагрузки, а также для доопределения задачи из следующего пункта.

2. Находится решение в некоторой окрестности поперечной оси симметрии слоя с использованием краевых условий на контактной поверхности, полученных в п.1 схемы, и некоторых ограничений на класс решений.

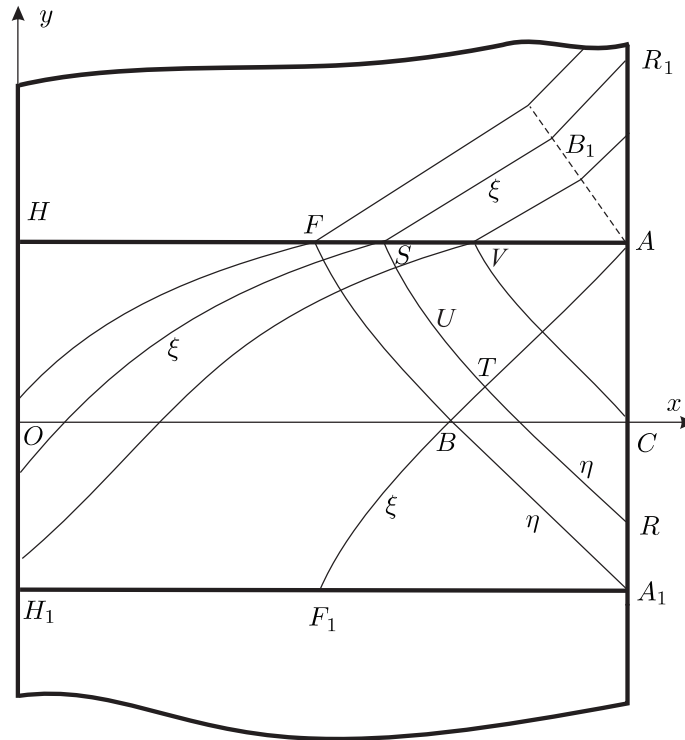


Рис. Фрагмент поля характеристик соединения с неоднородным менее прочным слоем. $HA A_1 H_1$ — менее прочный слой

В случае зависимости пластической постоянной от координат точек слоя первые интегралы на характеристиках этой системы неизвестны, что препятствует непосредственному применению метода характеристик.

Цель работы — получение приближенных первых интегралов на характеристиках в случае, когда функция неоднородности слоя зависит от одной переменной, и на этой основе решение задачи сопряжения для напряжений на контактной границе между менее прочным неоднородным по толщине слоем и более прочным основным материалом.

Это позволяет использовать указанный выше подход к исследованию напряженного состояния пластического слоя с распределением прочности второго и третьего типов, в некоторой степени аналогичный подходам и методам работ [3], [4].

Материал слоя и основной материал соединения предполагаются идеальными жестко-пластическими средами, прочность которых характеризуется единственным параметром — пределом текучести. Основной материал соединения, окружающий менее прочный слой, полагается однородным. Его предел текучести обозначен k_T^+ (у величин, относящихся к

основному материалу, будет ставиться верхний индекс “+”). Предел текучести слоя предполагается зависящим от одной переменной: $k_T = k_T(y)$. Полученные результаты распространяются на случай упругопластических упрочняемых изотропных материалов с заменой параметра k_T на пластическую постоянную, характеризующую интенсивность напряжений в момент общей потери устойчивости пластического деформирования материала слоя при растяжении [7]. В общем случае параметр пластичности обозначен так: k для слоя и k^+ для основного материала. Положим $k_0 = k(0)$. Пусть

$$k(y) = k_0 Z(y), \quad (1)$$

где безразмерная функция $Z(y)$ — четная непрерывно-дифференцируемая функция, характеризующая распределение прочностных свойств по толщине слоя (функция неоднородности слоя). Очевидно, $Z(0) = 1$.

Напряженное состояние слоя определяется системой уравнений равновесия и условием пластичности Мизеса:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4Z^2(y), \quad (3)$$

$$\{(x, y) : x \in [-1, 1], y \in [-\varkappa, \varkappa]\}. \quad (4)$$

Здесь x и y — безразмерные координаты точек слоя, сечение которого — прямоугольник (4), \varkappa — половина толщины слоя (длина слоя принята равной двум), σ_x , σ_y и τ_{xy} — безразмерные напряжения, полученные делением истинных напряжений на k_0 . В основном материале используются безразмерные напряжения, полученные из размерных делением на величину k^+ . Введем обозначения

$$Z(\varkappa) = K_l, \quad k^+/k(\varkappa) = K, \quad \alpha = \max_{x \in [-1, 1]} (\tau_{xy}|_{y=\varkappa}). \quad (5)$$

Тогда из (1) следует $k^+/k_0 = KK_l$. Заметим, что для большинства сварных соединений в стальных конструкциях механическая неоднородность невелика: $KK_l = 1.1-1.4$, $0.8 < K_l < 1.25$. Поэтому касательные напряжения на контактной поверхности также невелики и равны в первом приближении $KK_l - 1$ или $K - 1$ (см. ниже формулы (33)–(36)). В силу симметрии можно рассматривать четверть слоя.

1. ИНВАРИАНТНАЯ ФОРМА СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ПЛАСТИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ И ЕЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ВДОЛЬ ХАРАКТЕРИСТИК

Рассмотрим случай растяжения пластического слоя (сжатие исследуется аналогично). Запишем условие пластичности (3) в виде

$$\sigma_y - \sigma_x = f, \quad f = 2\sqrt{Z^2(y) - \tau_{xy}^2}. \quad (6)$$

Тогда систему уравнений (2), (6) можно представить в матричной форме

$$\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial x} + A \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial y} = B, \quad (7)$$

$$\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \partial f / \partial \tau_{xy} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ -\partial f / \partial y \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Функция f определена в (6). Характеристическим для матрицы A является уравнение

$$\lambda^2 + \frac{2\tau_{xy}/Z}{\sqrt{1 - (\tau_{xy}/Z)^2}}\lambda - 1 = 0. \quad (9)$$

Дифференциальные уравнения характеристик имеют вид

$$\frac{dy}{dx} = \lambda_i, \quad i = 1, 2, \quad (10)$$

где собственные числа λ_1 и λ_2 — корни уравнения (9), причем

$$\lambda_1 = (1 - \tau_{xy}/Z)/\sqrt{1 - (\tau_{xy}/Z)^2} \quad (11)$$

определяет ξ -характеристики (рис.), а

$$\lambda_2 = (-1 - \tau_{xy}/Z)/\sqrt{1 - (\tau_{xy}/Z)^2} \quad (12)$$

— η -характеристики.

Так как $\lambda_1\lambda_2 = -1$, то каждая ξ -характеристика ортогональна η -характеристике в точке их пересечения. Кроме того, из (10)–(12) следует, что касательные напряжения $\tau_{xy} = 0$ в тех и только тех точках, где характеристики образуют угол $\pm\pi/4$ с осями координат (в частности, это имеет место на осях координат и на свободных границах).

Запишем систему (7), (8) в инвариантной форме

$$\frac{\partial(\sigma_x + \nu_i)}{\partial x} + \lambda_i \frac{\partial(\sigma_x + \nu_i)}{\partial y} = -\lambda_i \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda_i \frac{\partial \nu_i}{\partial y}, \quad i = 1, 2, \quad (13)$$

$$\nu_i(\tau_{xy}) = \sqrt{Z^2 - \tau_{xy}^2} \pm Z \arcsin \frac{\tau_{xy}}{Z}. \quad (14)$$

Здесь $i = 1$ соответствует знаку плюс, $i = 2$ — знаку минус. Функции ν_i выбраны так, что $\partial \nu_i / \partial \tau_{xy} = \lambda_i$, $i = 1, 2$. В силу (10) уравнения (13) на характеристиках приобретут вид

$$\frac{d(\sigma_x + \nu_i)}{dy} = \frac{\partial(\nu_i - f)}{\partial y}, \quad i = 1, 2. \quad (15)$$

Применив формулы (6) и (14), найдем

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\nu_i - f)}{\partial y} &= \pm Z' \left(\arcsin \frac{\tau_{xy}}{Z} - \frac{\tau_{xy}}{\sqrt{Z^2 - \tau_{xy}^2}} \right) - \frac{ZZ'}{\sqrt{Z^2 - \tau_{xy}^2}} = \\ &= -Z' \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\tau_{xy}}{Z} \right)^2 \pm \frac{1}{3} \left(\frac{\tau_{xy}}{Z} \right)^3 + \frac{3}{8} \left(\frac{\tau_{xy}}{Z} \right)^4 + \dots \right) \end{aligned} \quad (16)$$

(здесь использованы разложения в ряд Маклорена функций $\arcsin(\cdot)$ и $(\cdot)/\sqrt{1 - (\cdot)^2}$). Подставив правую часть (16) в уравнения (15), получим

$$\frac{d(\sigma_x + \nu_i)}{dy} = -Z' \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\tau_{xy}}{Z} \right)^2 \pm \frac{1}{3} \left(\frac{\tau_{xy}}{Z} \right)^3 + \dots \right), \quad (17)$$

где верхний знак соответствует $i = 1$. Пусть

$$\Delta = \frac{1}{Z} \int_0^y Z' \left(\frac{1}{2} \frac{\tau_{xy}^2}{Z^2} \pm \frac{1}{3} \frac{\tau_{xy}^3}{Z^3} + \frac{3}{8} \frac{\tau_{xy}^4}{Z^4} + \dots \right) dy.$$

Тогда вдоль каждой характеристики

$$\sigma_x + \nu_i + \text{const} = -Z(1 + \Delta). \quad (18)$$

Лемма. Если $K_l < 1$, то $|\Delta| \leq \frac{|K_l-1|\alpha^2}{2K_l(1-K_l\alpha)}$; если $K_l > 1$, то $|\Delta| \leq \frac{|K_l-1|\alpha^2}{2(1-\alpha)}$.

Доказательство. Учитывая последнее равенство (5) и то, что все коэффициенты ряда в правой части (18) меньше 1/2, получим

$$\begin{aligned} |\Delta| &= \frac{1}{Z} \left| \frac{1}{2} \int_0^Z \frac{\tau_{xy}^2}{Z^2} dZ \mp \frac{1}{3} \int_0^Z \frac{\tau_{xy}^3}{Z^3} dZ + \frac{3}{8} \int_0^Z \frac{\tau_{xy}^4}{Z^4} dZ + \dots \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2Z} \left(\alpha^2 \left| \int_0^Z \frac{dZ}{Z^2} \right| + \alpha^3 \left| \int_0^Z \frac{dZ}{Z^3} \right| + \alpha^4 \left| \int_0^Z \frac{dZ}{Z^4} \right| + \dots \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{2Z} \left(\alpha^2 |Z^{-1}(y) - 1| + \frac{\alpha^3}{2} |Z^{-2}(y) - 1| + \frac{\alpha^4}{3} |Z^{-3}(y) - 1| + \dots \right). \end{aligned}$$

Если $K_l > 1$, то $Z(y) \geq 1$. Тогда

$$|\Delta| \leq \frac{|Z-1|\alpha^2}{2Z^2} \left(1 + \frac{\alpha(Z+1)}{2Z} + \frac{\alpha^2(Z^2+Z+1)}{3Z^2} + \dots \right) \leq \frac{|Z-1|\alpha^2}{2Z^2} \frac{1}{1-\alpha} \leq \frac{|K_l-1|\alpha^2}{2(1-\alpha)}.$$

Если $K_l < 1$, то $Z(y) \geq K_l$. Тогда

$$|\Delta| \leq \frac{|Z-1|\alpha^2}{2Z^2} \left(1 + \frac{\alpha}{K_l} + \frac{\alpha^2}{K_l^2} + \dots \right) \leq \frac{|K_l-1|\alpha^2}{2K_l(K_l-\alpha)}.$$

Например, если $\alpha = 0.3$, то $|\Delta| \leq 0.013$ при $K_l = 1.2$ и $|\Delta| \leq 0.022$ при $K_l = 0.8$.

Рассматривая случай небольшой механической неоднородности, в силу доказанной леммы равенства (18) заменим на приближенные равенства

$$\sigma_x + \nu_i + Z \approx \text{const} \quad (19)$$

вдоль характеристик. Из леммы следует, что ошибка в (19) не превышает величины

$$|Z\Delta| \leq \frac{|K_l-1|\alpha^2}{2K_l(1-K_l\alpha)}, \quad \text{если } K_l < 1; \quad |Z\Delta| \leq \frac{K_l|K_l-1|\alpha^2}{2(1-\alpha)}, \quad \text{если } K_l > 1. \quad (20)$$

Левая часть (19) является (приближенным) инвариантом Римана для системы уравнений (7), (8).

Пусть внешнее давление на свободную границу ACA_1 (рис.) отсутствует. Тогда на этой границе $\sigma_x = 0$, $\tau_{xy} = 0$. Отсюда на основании формул (14) и (18) получим, что на каждой η -характеристике (рис.)

$$\sigma_x = -Z(U)(1 + \Delta) - \nu_2(U) + 2Z(R) = Z(U)(P_-(U) - 1 - \Delta) + 2Z(R), \quad (21)$$

$$\sigma_y = -Z(U)(1 + \Delta) - \nu_2(U) + f(U) + 2Z(R) = Z(U)(P_+(U) - 1 - \Delta) + 2Z(R), \quad (22)$$

где

$$P_{\pm}(U) = \arcsin \frac{\tau_{xy}(U)}{Z(U)} \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\tau_{xy}(U)}{Z(U)} \right)^2}.$$

Аналогично, на каждой ξ -характеристике

$$\sigma_x = -Z(U)(1 + \Delta) - \nu_1(U) + 2Z(R) = Z(U)(-P_+(U) - 1 - \Delta) + 2Z(R), \quad (23)$$

$$\sigma_y = -Z(U)(1 + \Delta) - \nu_1(U) + f(U) + 2Z(R) = Z(U)(-P_-(U) - 1 - \Delta) + 2Z(R). \quad (24)$$

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ НАПРЯЖЕНИЙ НА КОНТАКТНОЙ ГРАНИЦЕ.
 ВЫЧИСЛЕНИЕ КАСАТЕЛЬНЫХ И НОРМАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ НА КОНТАКТНОЙ
 ГРАНИЦЕ В ОКРЕСТНОСТИ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Используя разложения в ряд Маклорена функций $-\arcsin(\cdot) \pm \sqrt{1 - (\cdot)^2}$, представим приближенно формулы (22) и (24) соответственно в следующем виде: на η -характеристике

$$\sigma_y(U) = 2Z(R) + \tau_{xy}(U) - \tau_{xy}^2(U)/(2Z(U)) + O(\tau_{xy}^3(U)), \quad (25)$$

на ξ -характеристике

$$\sigma_y(U) = 2Z(R) - \tau_{xy}(U) - \tau_{xy}^2(U)/(2Z(U)) + O(\tau_{xy}^3(U)). \quad (26)$$

Остаточный член $O(\tau_{xy}^3(U))$ ряда можно при $K_l > 1$ оценить величиной $\alpha^3 K_l / (6(1 - \alpha))$, а при $K_l < 1$ величиной $\alpha^3 / (6K_l(K_l - \alpha))$. Оценка отброшенного слагаемого $Z(U)\Delta$ дана в (20). Заметим, что формулы (21)–(26) верны и для более прочного участка соединения. Рассмотрим точку S контактной границы AH (рис.) такую, что содержащая ее η -характеристика выходит на свободную поверхность в слое, т.е. на участке AA_1 (в точке R). Нормальное напряжение $\sigma_y(S)$ в этой точке можно вычислить как со стороны слоя по формуле (25), так и со стороны более прочной части ($\sigma_y^+(S)$), записав (26) в форме (здесь $Z^+ \equiv 1$)

$$\sigma_y^+ = 2 - \tau_{xy}^+ - (\tau_{xy}^+)^2/2. \quad (27)$$

Подставив в (25) значение $y = \varkappa$, получим

$$\sigma_y(S) = 2Z(R) + \tau_{xy}(S) - \tau_{xy}^2(S)/(2K_l). \quad (28)$$

Воспользуемся уравнениями равновесия для размерных напряжений (над которыми здесь ставим знак “тильда”) на контактной границе

$$\tilde{\sigma}_y = \tilde{\sigma}_y^+, \quad \tilde{\tau}_{xy} = \tilde{\tau}_{xy}^+. \quad (29)$$

Записав уравнения (29) в безразмерных величинах и учитывая (5), получим задачу сопряжения для напряжений σ_y и τ_{xy} на отрезке контактной границы FA :

$$\sigma_y(S) = KK_l \sigma_y^+(S); \quad \tau_{xy}(S) = KK_l \tau_{xy}^+(S). \quad (30)$$

Подставив (27) и (28) в первое уравнение (30) и применив второе, получим уравнение для вычисления касательных напряжений $\tau_{xy}(S) = \tau_{xy}(x, \varkappa)$ на контактной поверхности на участке FA в критический момент нагружения

$$2Z(R) + \tau_{xy}(S) - \frac{1}{2} \frac{\tau_{xy}^2(S)}{K_l} = \left(2 - \frac{\tau_{xy}(S)}{KK_l} - \frac{\tau_{xy}^2(S)}{2K^2 K_l^2} \right) KK_l. \quad (31)$$

Введем обозначения

$$T(y) = Z(y)/K_l, \quad \delta(R) = (K - 1)(KK_l - Z(R))/KK_l. \quad (32)$$

Используя (32), решение уравнения (31) запишем в виде

$$\begin{aligned} \tau_{xy}(x, \varkappa) &= 2KK_l(1 - \sqrt{1 - \delta(R)})/(K - 1) = (KK_l - Z(R))(1 + 0.25\delta(R) + 0.125\delta^2(R) + \dots) \approx \\ &\approx (KK_l - Z(R))(1 + 0.25\delta) \end{aligned} \quad (33)$$

с ошибкой, меньшей $0.125\delta^2(R)/(1 - \delta(R))$. Для малых $K - 1$, оставив в скобках выражения (33) только первое слагаемое, используем упрощенный вариант формулы для вычисления касательных напряжений на участке контактной поверхности FA

$$\tau_{xy}(x, \varkappa) = K_l(K - T(R)). \quad (34)$$

В точках A и F (рис.) $\delta(A) = \delta(F) = (K - 1)^2/K$, так как $Z(A) = Z(A_1) = K_l$. Поэтому из (33)

$$\tau_{xy}(A) = \tau_{xy}(F) = K_l(K - 1)(1 + (K - 1)^2/(4K)). \quad (35)$$

В точке V в силу $Z(C) = 1$ из формулы (33) аналогично следует

$$\tau_{xy}(V) = (K_l K - 1)(1 + (K - 1)(K_l K - 1)/(4K_l K)). \quad (36)$$

Для малых $K - 1$ получим из (34) упрощенные варианты формул (35) и (36)

$$\tau_{xy}(A) = \tau_{xy}(F) = K_l(K - 1), \quad \tau_{xy}(V) = K_l K - 1. \quad (37)$$

Подставив (33) в (28), запишем формулу для приближенного вычисления нормальных напряжений на контактной границе

$$\sigma_y(F) = K_l \left(T(R) + K - \frac{K + 1}{4K} (K - T(R))^2 - \frac{3K - 1}{4K} (K - T(R))^3 \right). \quad (38)$$

Напомним, что точка S контактной границы AH (рис.) лежит на одной η -характеристике с точкой R отрезка $[A, A_1]$, а функция T определена в (32). Применив упрощенные формулы (37), получим

$$\sigma_y(F) = \sigma_y(A) = 2K_l + K_l(K - 1)(3 - K)/2, \quad \sigma_y(V) = 1 + K_l K - (K_l K - 1)^2/2K_l. \quad (39)$$

В частном случае, когда $K_l = 1$, формулы (33)–(35) и (39) обращаются в соответствующие формулы работы [4]. Полагая приближенно $AS/AF = AR/AA_1$, получаем

$$AR = 2\kappa \frac{1 - x}{1 - x_F}, \quad y_R = \kappa - AR = \frac{\kappa(2x - x_F - 1)}{1 - x_F}. \quad (40)$$

Отсюда, используя формулу (38) с y_R из (40), находим зависимость $\sigma_y(x, \kappa)$ в любой точке S отрезка $[F, A]$:

$$\sigma_y(x, \kappa) = K_l \left(T(y_R) + K - \frac{K + 1}{4K} (K - T(y_R))^2 - \frac{3K - 1}{4K} (K - T(y_R))^3 \right).$$

3. ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ГЕНКИ

Пусть γ — острый угол наклона ξ -характеристики к оси OX , для которого в соответствии с (10) и (11) имеем

$$\operatorname{tg} \gamma = (1 - \tau_{xy}/Z) / \sqrt{1 - (\tau_{xy}/Z)^2}. \quad (41)$$

Это позволяет с точностью, определяемой леммой, выразить через угол γ функции $\nu_i(\tau_{xy})$, $i = 1, 2$, и инварианты (19) на характеристиках. На этой основе формулы (21)–(24) можно переписать через угол γ . Приведем эти формулы. Из (41) следует $\cos 2\gamma = \tau_{xy}/Z$, откуда

$$\arcsin \frac{\tau_{xy}}{Z} = \frac{\pi}{2} - 2\gamma, \quad \sqrt{1 - \left(\frac{\tau_{xy}}{Z}\right)^2} = \sin 2\gamma. \quad (42)$$

Поэтому из (14) имеем

$$\nu_1(\tau_{xy}) = Z (\sin 2\gamma + \pi/2 - 2\gamma), \quad (43)$$

и вдоль любой ξ -характеристики

$$\begin{aligned} \sigma_x &= Z (2\gamma - \pi/2 - \sin 2\gamma - 1 - \Delta) + C, \\ \sigma_y &= Z (2\gamma - \pi/2 + \sin 2\gamma - 1 - \Delta) + C, \\ \sigma &= (\sigma_x + \sigma_y)/2 = Z (2\gamma - \pi/2 - 1 - \Delta) + C \end{aligned} \quad (44)$$

в силу формул (23), (24) и (43). Здесь C — постоянная на каждой ξ -характеристике. Аналогично выводятся формулы для η -характеристик. Из (14) и (42)

$$\nu_2(\tau_{xy}) = Z(\sin 2\gamma + 2\gamma - \pi/2)$$

и вдоль любой η -характеристики

$$\begin{aligned}\sigma_x &= Z(\pi/2 - 2\gamma - \sin 2\gamma - 1 - \Delta) + C, \\ \sigma_y &= Z(\pi/2 - 2\gamma + \sin 2\gamma - 1 - \Delta) + C, \\ \sigma &= (\sigma_x + \sigma_y)/2 = Z(\pi/2 - 2\gamma - 1 - \Delta) + C\end{aligned}\quad (45)$$

в силу формул (21), (22) и (42). Здесь C — постоянная на любой η -характеристике.

Формулы (44) и (45) при постоянной функции Z (в таком случае $\Delta \equiv 0$) имеют вид $\sigma - 2\gamma = \text{const}$ на ξ -характеристике и $\sigma + 2\gamma = \text{const}$ на η -характеристике. В размерных величинах получим $\tilde{\sigma} - 2k\gamma = \text{const}$, $\tilde{\sigma} + 2k\gamma = \text{const}$ соответственно. Это хорошо известные соотношения теории пластичности при плоской деформации [5], [8].

С использованием обозначения

$$\theta = \gamma - \pi/4 \quad (46)$$

из формул (44) и (45) следует

Теорема. Пусть точки K , L , M и N образуют (криволинейный) прямоугольник из ξ -характеристик KL и NM и η -характеристик NK и ML . Тогда

$$Z(K)\theta(K) - Z(L)\theta(L) = Z(N)\theta(N) - Z(M)\theta(M). \quad (47)$$

При переходе между двумя характеристиками одного семейства вдоль характеристики другого семейства изменение величин $Z(\gamma - \pi/4)$ не зависит от того, по какой характеристике другого семейства совершается переход.

Доказательство. В силу формулы (44) на ξ -характеристике $\sigma - Z(2\theta - 1 - \Delta) = \text{const}$ (угол θ определен в (46)). В частности,

$$\sigma(K) - \sigma(L) = Z(K)(2\theta(K) - 1 - \Delta(K)) - Z(L)(2\theta(L) - 1 - \Delta(L)), \quad (48)$$

$$\sigma(N) - \sigma(M) = Z(N)(2\theta(N) - 1 - \Delta(N)) - Z(M)(2\theta(M) - 1 - \Delta(M)). \quad (49)$$

На η -характеристике в силу (45) $\sigma - Z(-2\theta - 1 - \Delta) = \text{const}$. В частности,

$$\sigma(K) - \sigma(N) = Z(K)(-2\theta(K) - 1 - \Delta(K)) - Z(N)(-2\theta(N) - 1 - \Delta(N)), \quad (50)$$

$$\sigma(L) - \sigma(M) = Z(L)(-2\theta(L) - 1 - \Delta(L)) - Z(M)(-2\theta(M) - 1 - \Delta(M)). \quad (51)$$

Подставив в тождество

$$\sigma(K) - \sigma(L) + \sigma(L) - \sigma(M) = \sigma(K) - \sigma(N) + \sigma(N) - \sigma(M)$$

правые части выражений (48)–(51), после упрощений получим равенство (47).

При постоянной функции Z равенство (47) приводит к первой теореме Г. Генки [8].

Из (47), (49) и (50) следует равенство

$$\begin{aligned}\sigma(K) - Z(K)(1 + \Delta) - (\sigma(L) - Z(L)(1 + \Delta)) &= \\ &= \sigma(N) - Z(N)(1 + \Delta) - (\sigma(M) - Z(M)(1 + \Delta)),\end{aligned}\quad (52)$$

которое при постоянной функции Z обращается в известное соотношение [8]

$$\sigma(K) - \sigma(L) = \sigma(N) - \sigma(M).$$

Когда касательные напряжения невелики (составляют 0.2–0.3 от предела текучести), как это бывает в менее прочных, чем основной металл, прослойках сварных соединений, в силу доказанной леммы Δ мала по сравнению с единицей. Тогда вместо (52) можно использовать приближенное равенство

$$\sigma(K) - Z(K) - (\sigma(L) - Z(L)) = \sigma(N) - Z(N) - (\sigma(M) - Z(M)).$$

Таким образом, с точностью, определяемой леммой, *при переходе между двумя характеристиками одного семейства вдоль характеристики другого семейства изменение величин $\sigma - Z$ не зависит от этой характеристики другого семейства.*

Выводы

1. Приближенно найдены инварианты Римана для системы уравнений пластического равновесия, определяющей напряженное состояние менее прочного неоднородного слоя в случае небольшой механической неоднородности соединения, содержащего этот менее прочный слой.

2. На этой основе решена задача сопряжения для напряжений на границе между менее прочным слоем и основным металлом, что необходимо для определения критической нагрузки на полосу, содержащую поперечный менее прочный слой.

3. Доказано, что аналог первой теоремы Генки, когда неоднородность среды при плоской деформации определяется функцией одной переменной, имеет вид (47).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ольшак В., Рыхлевский Я., Урбановский В. *Теория пластичности неоднородных тел* (Мир, М., 1964).
- [2] Бровман М.Я. *Расчет усилий при пластической деформации с учетом неравномерного распределения температуры*, Кузнечно-штамповое производство, № 7, 5–8 (1962).
- [3] Дильман В.Л., Остсемин А.А. *О напряженно-деформированном состоянии при растяжении пластического слоя с двумя осями симметрии*, Изв. РАН. МТТ, № 6, 115–124 (2001).
- [4] Дильман В.Л., Остсемин А.А. *Напряженное состояние и статическая прочность пластичной прослойки при плоской деформации*, Пробл. машиностроения и надежности машин, № 4, 38–48 (2005).
- [5] Prandtl L. *Beispiele der Anwendung des Hencky's Theorems zum Gleichgewicht der plastischen Körper*, Z. Angew. Math. Mech. **3** (6), 401–406 (1923).
- [6] Дильман В.Л., Остсемин А.А. *Напряженное состояние пластического слоя с переменной прочностью по толщине*, Изв. РАН. МТТ, № 1, 141–148 (2000).
- [7] Дильман В.Л. *Пластическая неустойчивость тонкостенных цилиндрических оболочек*, Изв. РАН. МТТ, № 4, 165–175 (2005).
- [8] Hencky H. *Über einige statisch bestimmte Fälle des Gleichgewichts in plastischen Körpern*, Z. Angew. Math. Mech. **3**, 241–251 (1923).

В.Л. Дильман

профессор, заведующий кафедрой прикладной математики,

Южно-Уральский государственный университет,

пр. Ленина, д. 76, г. Челябинск, 454080, Россия,

e-mail: dilman49@mail.ru

Т.В. Карпета

доцент, кафедра прикладной математики,

Южно-Уральский государственный университет,

пр. Ленина, д. 76, г. Челябинск, 454080, Россия,

e-mail: etv1980@mail.ru

V.L. Dil'man and T.V. Karpeta

The stress state of a plastic layer with a variable yield strength under a flat deformation

Abstract. We study the stress state of a plastic layer with a variable yield strength in a strip under a flat deformation with a tensile load. We approximately calculate the first integrals of the system of plastic equilibrium equations, obtain an analog of the first Hencky theorem, and solve the conjugation problem for stresses on the contact boundary.

Keywords: stress state, inhomogeneous plastic layer, flat deformation, Hencky integrals.

V.L. Dil'man

*Professor, Head of the Chair Applied Mathematics,
South Ural State University,
76 Lenin Ave., Chelyabinsk, 454080 Russia,*

e-mail: dilman49@mail.ru

T.V. Karpeta

*Associate Professor, Chair Applied Mathematics,
South Ural State University,
76 Lenin Ave., Chelyabinsk, 454080 Russia,*

e-mail: etv1980@mail.ru