Решения задач олимпиады им. Фридлендера, 6.04.2013

1. Найти все простые числа p такие, что числа $p + 68$ и $p + 70$ также простые.

Ответ. $p = 3$.

Решение. Найдем остатки от деления данных чисел на 3. У числа $p + 68$ такой же остаток, как у $p + 68 - 69 = p - 1$, а у числа $p + 70$ – как у числа $p + 1$, значит, у этих трех чисел разные остатки от деления на 3. Тогда одно из них делится на 3, и это может быть только меньшее из всех, т.е. p.

~ ~

2. На гранях куба расставлены числа от 1 до 6. Может ли каждое из чисел быть делителем суммы своих соседей? Считаем, что у каждой грани 4 соседних.

Ответ. Нет.

Решение. Сумма чисел на всех гранях равна 21. Пусть напротив 6 стоит k, тогда 6 – делитель числа $15 - k$. Поэтому $k = 3$. Аналогично, напротив 5 стоит 1. Тогда 2 и 4 должны стоять напротив друг друга и быть делителями 15, что неверно.

~ ~

3. Найти наибольшее значение выражения $x + 3y$, если переменные x и y удовлетворяют соотношению $x^2 + xy + 4y^2 \le 6$.

Ответ. 4.

Решение. Обозначим $x + 3y = u$, тогда $x = u - 3y$, и неравенство принимает вид $10y^2 - 5uy + u^2 - 6 \le 0$. Левую часть можно рассматривать как квадратичную функцию от y. Она будет принимать отрицательные значения тогда и только тогда, когда у многочлена есть корни. Это значит, что его дискриминант неотрицателен, $(5u)^2 - 4\cdot 10(u^2 - 6) \ge 0$, что приводится к виду $u^2 \le 16$. Значит, максимальное значение u равно 4. Это действительно возможно при $x = y = 1$.

~ ~

4. При каких a неравенство $x^2 + 4|x + a| \ge a^2$ выполняется для всех x?

Ответ. [–2; 2]

Решение. Обозначим $x^2 + 4|x + a| = f(x)$. Имеем $f(-a) = a^2$. При $x < -a$ левая часть принимает вид $f(x) = x^2 - 4x - 4a$. Если вершина этой параболы лежит левее числа $-a$, то в ней значение функции меньше, чем в точке $x = -a$, т.е. меньше, чем a^2, что противоречит условию. Значит, $2 \ge a$. Аналогично, рассматривая случай $x > a$ получаем, что $a \ge -2$.

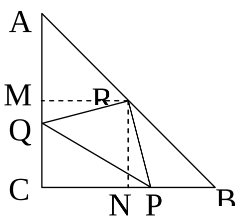
~ ~

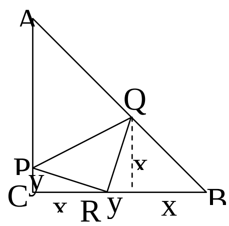
5. Треугольник ABC равнобедренный прямоугольный с катетом 10. В него вписан равнобедренный прямоугольный треугольник PQR так, что его вершины лежат на разных сторонах первого треугольника. Какова наименьшая площадь треугольника PQR?

Ответ. 10.

Решение. Треугольник PQR можно вписать двумя способами.

а) Вершина прямого угла лежит на гипотенузе ABC (левый рисунок). Треугольники RMQ и RNP равны, значит, MR и NR имеют длину 5, а катет треугольника PQR не меньше 5. Тогда его площадь не менее 12,5.





б) Вершина прямого угла лежит на катете. Треугольники PCR и RMQ равны. Значит, $2x + y = 10$, а катет малого треугольника имеет длину $\sqrt{x^2 + y^2}$. Площадь треугольника равна $(x^2 + y^2)/2 = (x^2 + (10 - 2x)^2)/2 = (5x^2 - 40x + 100)/2$. Наименьшее значение этот квадратный трехчлен достигает при $x = 40/5/2 = 4$. Площадь такого треугольника равна 10.

~ ~

6. На поверхности куба найти все точки, из которых диагональ куба видна под наименьшим углом (концы самой диагонали при этом в расчет не принимаются).

Ответ. Вершины, через которые не проходит диагональ.

Решение. Опишем вокруг куба сферу с центром в центре куба, проходящую через все его вершины. Из каждой точки сферы диагональ видна под прямым углом, а из всех точек внутри сферы под тупым. Поэтому из всех вершин куба, не совпадающих с концами диагонали, диагональ видна под прямым углом, а из всех других точек куба под тупым.

~ ~

7. Найти функцию $f(x)$, заданную на всей числовой прямой, кроме 0, такую, что $3f(-x) + f(1/x) + f(x) = x$ для всех $x \ne 0$.

Ответ. $f(x) = -\dfrac{2x}{3} - \dfrac{1}{3x}$.

Решение. Подставим в данное равенство вместо x значения $-x$, $1/x$, $-1/x$. Получим 4 уравнения

$$\begin{cases} 3f(-x)+f(1/x)+f(x)=x \\ 3f(x)+f(-1/x)+f(-x)=-x \\ 3f(-1/x)+f(x)+f(1/x)=1/x \\ 3f(1/x)+f(-x)+f(-1/x)=-1/x \end{cases} \qquad \begin{cases} a+3b+c=x \\ 3a+b+d=-x \\ a+c+3d=1/x \\ b+3c+d=-1/x \end{cases}$$

Обозначим $f(x) = a$, $f(-x) = b$, $f(1/x) = c$, $f(-1/x) = d$. Система примет вид как на правом рисунке.

Сложим первое уравнение со вторым, а третье – с четвертым. Получим, что $4a + 4b + c + d = 0$; $a + b + 4c + 4d = 0$. Из этого следует, что $a + b = c + d = 0$. Подставим $b = -a$, $d = -c$ в первое и третье уравнения, получим, что $c - 2a = x$; $a - 2c = 1/x$. Выражаем c из первого уравнения и подставляем во второе, получаем, что $3a = -2x - 1/x$.

~ ~

8. Малыш и Карлсон играют в такую игру: они берут шоколадку 1001×1001 и по очереди выкусывают из нее «по клеточкам» кусочки (не обязательно с краю): Карлсон — 2×2, Малыш — 1×1. Если не осталось ни одного кусочка 2×2, то весь оставшийся шоколад доедает Малыш. Выигрывает тот, кто съест больше шоколада. Начинает игру Малыш. Кто выиграет?

Ответ. Выигрывает Малыш.

Решение. Раскрасим шоколадку «*в крапинку*», отметив 250000 клеток в *четных* рядах на *четных* местах (рис. 1). Заметим, что Карлсон при своем ходе *съедает ровно одну* из отмеченных клеток. Поэтому если Малыш каждым своим ходом также будет съедать одну из отмеченных клеток, то после 125000-го хода Карлсона отмеченных клеток больше не останется. Значит, Карлсон не сможет сделать больше ни одного хода, и весь оставшийся шоколад достанется Малышу. Таким образом, Карлсон съест только $125000 \cdot 4 = 500000$ клеток. Это меньше половины шоколадки, поэтому он проигрывает.

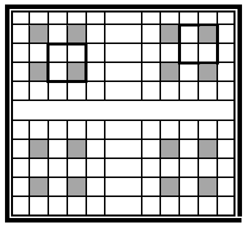
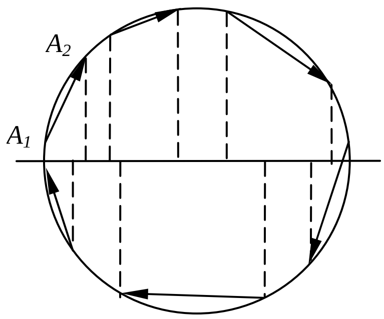


Рис. 1

~ ~

9. Из точки на плоскости отложено $2n$ векторов единичной длины. Они покрашены поочередно в красный и зеленый цвет. Просуммируем все вектора каждого цвета. Докажите, что разность двух этих сумм имеет длину не больше 2.

Решение. Концы A_i данных векторов лежат на окружности радиуса 1 с центром в точке O (нумерация идет по часовой стрелке). Нечетный номер соответствует красному цвету, а четный – зеленому. Имеем $\vec{x} = (\overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_4} +\ldots+ \overrightarrow{OA_{2n}}) - (\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_3} + \ldots + \overrightarrow{OA_{2n-1}}) = \overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_4} - \overrightarrow{OA_3} + \ldots + \overrightarrow{OA_{2n}} - \overrightarrow{OA_{2n-1}} =$
$= \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_3A_4} +\ldots+ \overrightarrow{A_{2n-1}A_{2n}}$.



Проведем через центр O прямую, параллельную $\vec{x}$, и спроецируем на нее все слагаемые. Проекция вектора $\vec{x}$ на эту прямую будет совпадать с ним самим по абсолютной величине.

Все векторы $\overrightarrow{A_{2k-1}A_{2k}}$ разобьются на две группы: те, которые сонаправлены $\vec{x}$, и которые противонаправлены. Мы можем считать, что нумерация точек идет от прямой по часовой стрелке. Тогда векторы одной группы это $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_3A_4}$ и так далее до некоторого номера k. Вторая группа состоит из остальных векторов. Заметим, что в каждой группе проекции точек A_i расположены на прямой в том же порядке, как и сами точки A_i на окружности. Это значит, что сумма проекций равна проекции суммы.

В каждой группе эта сумма не больше диаметра окружности, т.е. лежит в пределах от 0 до 2. Это значит, что разность двух сумм не больше $2 - 0 = 2$ и не меньше $0 - 2 = -2$.

~ ~

10. В коробке лежит несколько книг общей стоимостью 1000 рублей. Известно, что их можно разделить на 5, а можно и на 8 равных по стоимости пачек. Какую наибольшую стоимость может иметь самая дешевая книга?

Ответ. 50 руб.

Решение. Самая дешевая книга в коробке может стоить 50 рублей. Например, 8 книг по 50 рублей и 8 по 75 рублей. Или 4 книги по 50 рублей, 4 – по 75 рублей, и 4 – по 125 рублей. Их можно разбить и на 8 пачек по 125 рублей и на 5 пачек по 200 руб.

Предположим, что все книги стоят дороже 50 рублей. Тогда в каждой пачке за 200 рублей – не более 3 книг. В пачке за 125 рублей будет 1 или 2 книги.

Пусть есть ровно k книг по цене 125 рублей, в остальных 125-рублевых пачках по 2 книги, всего имеем $k + 2(8 - k) = 16 - k$ книг. С другой стороны, в 200-рублевых пачках, в которых есть книги по 125 рублей, не более 2 книг, значит, на все пачки приходится не более $2k + 3(5 - k) = 15 - k$ книг. Пришли к противоречию.