Известия вузов. Математика *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
2011, №8, с. 56–68 *Гос. номер статьи по НТЦ "Информрегистр" 0421100123\0084*

С.Н. ТИМЕРГАЛИЕВ

О РАЗРЕШИМОСТИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ АНИЗОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК ТИПА ТИМОШЕНКО С ЖЕСТКО ЗАДЕЛАННЫМИ КРАЯМИ

Аннотация. Все известные теоремы существования решений в нелинейной теории оболочек получены в рамках модели Кирхгофа–Лява. Мы впервые доказываем теорему существования с использованием сдвиговой модели Тимошенко.

Ключевые слова: оболочка типа Тимошенко, система уравнений равновесия, краевая задача, обобщенные перемещения, обобщенное решение задачи, интегральные представления, пространства Соболева, оператор, интегральные уравнения, теорема существования.

УДК: 517.958 : 539.3

Abstract. In the nonlinear theory of shells all known existence theorems are based on the Kirchhoff–Love model. We prove a new existence theorem using the Timoshenko model.

Keywords: Timoshenko-type shell, equilibrium equations system, boundary value problem, generalized shifts, generalized problem solution, integral images, Sobolev spaces, operator, integral equations, existence theorem.

1. Введение. Постановка задачи. Понятие обобщенного решения задачи. Все теоремы существования, известные к настоящему времени в нелинейной теории оболочек, получены в рамках модели Кирхгофа–Лява ([1]–[4] и цитированная там литература). Вопросы существования решений нелинейных задач в рамках более общих моделей, не опирающихся на гипотезы Кирхгофа–Лява, до сих пор оставались открытыми, и они вошли в известный список нерешенных проблем математической теории оболочек академика И.И. Воровича ([1], с. 349). В данной работе изучается разрешимость нелинейных краевых задач для пологих анизотропных неоднородных оболочек с жестко защемленными краями в рамках сдвиговой модели С.П. Тимошенко. Полученные в работе результаты являются развитием [5], где разрешимость краевых задач была доказана при более жестких ограничениях на физико-геометрические характеристики оболочки и внешние силы, действующие на оболочку.

Рассмотрим систему уравнений вида

$$\begin{gathered}
(DT^{i\lambda})_{\alpha^\lambda} + DG^i_{\lambda\mu}T^{\lambda\mu} + R^i = 0, \quad i = 1,2,\\
(DT^{\lambda\mu}w_{3\alpha^\lambda})_{\alpha^\mu} + (DT^{\lambda 3})_{\alpha^\lambda} + DB_{\lambda\mu}T^{\lambda\mu} + R^3 = 0,\\
(DM^{i\lambda})_{\alpha^\lambda} - DT^{i3} + DG^i_{\lambda\mu}M^{\lambda\mu} + N^i = 0, \quad i = 1,2,
\end{gathered} \tag{1}$$

Поступила 04.05.2010

описывающую состояние равновесия упругих пологих анизотропных неоднородных оболочек типа Тимошенко, в которой усилия T^{ij}и моменты M^{ij} даются формулами

$$T^{ij} = D_0^{ijkn}\gamma_{kn}^0 + D_1^{ijkn}\gamma_{kn}^1, \quad M^{ij} = D_1^{ijkn}\gamma_{kn}^0 + D_2^{ijkn}\gamma_{kn}^1, \quad i,j=\overline{1,3}; \tag{2}$$

символ $(DT^{i\lambda})_{\alpha^\lambda}$ означает дифференцирование по переменной α^λ, при этом по повторяющимся латинским индексам ведется суммирование от 1 до 3, по греческим индексам — от 1 до 2; R^j $(j=\overline{1,3})$, N^i $(i=1,2)$ — внешние силы; γ_{kn}^0, γ_{kn}^1 — компоненты деформаций ([6], сс. 168–170, 269):

$$\gamma_{jj}^0 = w_{j\alpha^j} - G_{jj}^\lambda w_\lambda - B_{jj}w_3 + w_{3\alpha^j}^2/2, \quad \gamma_{12}^0 = w_{1\alpha^2} + w_{2\alpha^1} - 2G_{12}^\lambda w_\lambda - 2B_{12}w_3 + w_{3\alpha^1}w_{3\alpha^2},$$
$$\gamma_{jj}^1 = \nu_{j\alpha^j} - G_{jj}^\lambda \nu_\lambda, \quad \gamma_{12}^1 = \nu_{1\alpha^2} + \nu_{2\alpha^1} - 2G_{12}^\lambda\nu_\lambda, \quad \gamma_{j3}^0 = w_{3\alpha^j} + \nu_j, \gamma_{33}^0 = \gamma_{i3}^1 \equiv 0,$$
$$j=1,2, \quad i=\overline{1,3}, \tag{3}$$

где w_i и w_3 — тангенциальные и нормальное перемещения точек срединной поверхности S_0 оболочки; ν_i $(i=1,2)$ — углы поворота нормальных сечений; B_{ij} — составляющие тензора кривизны S_0; G_{ij}^k — символы Кристоффеля; α^1, α^2 — декартовы координаты точек плоской ограниченной области Ω с границей Γ, гомеоморфной S_0; $\sigma^{ij} = B^{ijkn}\gamma_{kn}$ $(i \le j,\ k \le n;$ $i,j,k,n=\overline{1,3})$ — определяющие соотношения; $\gamma_{kn} = \gamma_{kn}^0 + \alpha^3\gamma_{kn}^1$; $D_m^{ijkn} = \int\limits_{-h}^{h} B^{ijkn}(\alpha^3)^m d\alpha^3$ $(m=\overline{0,2})$ — упругие характеристики оболочки; $2h = \mathrm{const}$ — толщина оболочки.

Край оболочки предполагается жестко защемленным

$$w_j|_\Gamma = \nu_k|_\Gamma = 0, \quad j=\overline{1,3}, \quad k=1,2. \tag{4}$$

Отметим, что система уравнений (1) линейна относительно тангенциальных перемещений, углов поворота и нелинейна относительно прогиба.

Краевую задачу (1), (4) будем изучать в обобщенной постановке. Пусть выполнены следующие условия: (1) квадратичная форма $B^{knqs}\gamma_{kn}\gamma_{qs}$ положительно определена во всем объеме, занятом оболочкой; (2) Ω — односвязная область с кусочно-гладкой границей Γ класса C_β^1 $(0<\beta<1)$; (3) внешние силы R^j $(j=\overline{1,3})$, N^k $(k=1,2)$ $\in L_p(\Omega)$, $p>2$; (4) характеристики упругости $D_{0,2}^{1111}$, $D_{0,2}^{1212}$ и якобиан D имеют частные производные первого порядка по α^1, α^2, принадлежащие пространству $C_\alpha(\overline{\Omega})$, а остальные D_m^{ijkn} и G_{ij}^k, B_{ij} — частные производные первого порядка, ограниченные в $\overline{\Omega}$; (5) якобиан $D = D(\alpha^1, \alpha^2) > 0$ в $\overline{\Omega}$.

Определение. Вектор обобщенных перемещений $a = (w_1, w_2, w_3, \nu_1, \nu_2)$ есть обобщенное решение задачи равновесия (1), (4), если $a \in W_p^{(2)}(\Omega)$, $p>2$, почти всюду удовлетворяет системе (1) и поточечно граничному условию (4).

Здесь $W_p^{(2)}(\Omega)$ — пространство Соболева. Заметим, что в силу теорем вложения для пространств $W_p^{(2)}(\Omega)$ с $p>2$ обобщенное решение $a \in C_\alpha^1(\overline{\Omega})$, где параметр α на протяжении всей работы связан с $p>2$ следующим образом:

$$\alpha = (p-2)/p.$$

Для удобства в дальнейших исследованиях соотношения (3) запишем в виде

$$\gamma_{ij}^k = t_{ij}^k + \tau_{ij}^k + \mu_{ij}^k + \chi_{ij}^k, \quad k=0,1; \quad i,j=\overline{1,3}, \tag{5}$$

где

$$t_{jj}^0 {=} w_{j\alpha^j},\ t_{12}^0 {=} w_{1\alpha^2} + w_{2\alpha^1},\ t_{jj}^1 {=} \nu_{j\alpha^j}\ (j=1,2), t_{12}^1 {=} \nu_{1\alpha^2} + \nu_{2\alpha^1},\ t_{j3}^k \equiv 0\ (k{=}0,1;\ j{=}\overline{1,3});$$

$$
\begin{gathered}
\tau^0_{jj} = -G^\lambda_{jj} w_\lambda, \quad \tau^0_{12} = -2G^\lambda_{12} w_\lambda, \quad \tau^1_{jj} = -G^\lambda_{jj}\nu_\lambda \ (j=1,2), \quad \tau^1_{12} = -2G^\lambda_{12}\nu_\lambda, \\
\tau^0_{i3} = \nu_i \ (i=1,2), \quad \tau^0_{33} = \tau^1_{j3} \equiv 0, \quad j = \overline{1,3}; \qquad (6) \\
\mu^0_{jj} = -B_{jj} w_3, \quad \mu^0_{12} = -2B_{12} w_3, \quad \mu^0_{j3} = w_{3\alpha^j} \ (j=1,2), \quad \mu^1_{ij} \equiv 0, \quad i,j = \overline{1,3}; \\
\chi^0_{jj} = w^2_{3\alpha^j}/2 \ (j=1,2), \quad \chi^0_{12} = w_{3\alpha^1} w_{3\alpha^2}, \quad \chi^1_{ij} = \chi^0_{i3} \equiv 0, \quad i,j = \overline{1,3}.
\end{gathered}
$$

Рассмотрим систему (1) без второго уравнения:

$$
\begin{gathered}
(DT^{i\lambda})_{\alpha^\lambda} + DG^i_{\lambda\mu} T^{\lambda\mu} + R^i = 0, \quad i = 1,2, \\
(DT^{i\lambda})_{\alpha^\lambda} - DT^{i3} + DG^i_{\lambda\mu} M^{\lambda\mu} + N^i = 0, \quad i = 1,2.
\end{gathered} \qquad (7)
$$

Систему (7) также представим в удобной для дальнейших исследований форме. С этой целью введем две комплексные функции

$$
\omega_1 = \Omega_1(w_0), \quad \omega_2 = \Omega_2(\nu), \quad w_0 = (w_1, w_2), \quad \nu = (\nu_1, \nu_2), \qquad (8)
$$

где дифференциальные операторы $\Omega_j(f)$ даются формулами

$$
\Omega_j(f) = D[D^{1111}_{m_j}(f_{1\alpha^1} + f_{2\alpha^2}) + iD^{1212}_{m_j}(f_{2\alpha^1} - f_{1\alpha^2})], \quad m_j = 1 - (-1)^{j-1}, \quad f = (f_1, f_2).
$$

В системе (7) усилия T^{ij}и моменты M^{ij} заменим их выражениями из (2), а компоненты деформаций γ^k_{ij} — по формулам (5) и после этого к первому уравнению прибавим второе, умноженное на мнимую единицу i, а к третьему уравнению — четвертое, умноженное также на i. Тогда, выделяя в левых частях полученных уравнений слагаемые вида $\partial\omega_j/\partial\overline{z}$, приходим к следующей комплексной форме записи системы (7):

$$
\partial\omega_j/\partial\overline{z} + P_j(a_0) + K_j(a_0) + L_j(w_3) + G_j(w_3) + F_j = 0, \quad j = 1,2, \quad a_0 = (w_1, w_2, \nu_1, \nu_2), \qquad (9)
$$

где $\partial\omega_j/\partial\overline{z} = (\omega_{j\alpha^1} + i\omega_{j\alpha^2})/2$, $z = \alpha^1 + i\alpha^2$; $P_j(a_0) = P^1_j + iP^2_j$, $K_j(a_0) = K^1_j + iK^2_j$, $L_j(w_3) = L^1_j + iL^2_j$, $G_j(w_3) = G^1_j + iG^2_j$ — комплексные операторы, определенные формулами

$$
P^j_1(a_0) = a^{j\delta}_{1,\lambda\mu} w_{\delta\alpha^\lambda\alpha^\mu} + b^{j\delta}_{\lambda\mu}\nu_{\delta\alpha^\lambda\alpha^\mu}, \quad P^j_2(a_0) = a^{j\delta}_{2,\lambda\mu}\nu_{\delta\alpha^\lambda\alpha^\mu} + b^{j\delta}_{\lambda\mu} w_{\delta\alpha^\lambda\alpha^\mu};
$$

$$
\begin{aligned}
K^j_1(a_0) = [&-(DD^{1111}_0)_{\alpha^j}(w_{1\alpha^1} + w_{2\alpha^2}) + (-1)^j (DD^{1212}_0)_{\alpha^{3-j}}(w_{1\alpha^2} - w_{2\alpha^1}) + \\
&+ (DD^{j\lambda kn}_m)_{\alpha^\lambda} t^m_{kn} + (DD^{j\lambda kn}_m \tau^m_{kn})_{\alpha^\lambda} + DG^j_{\lambda\mu} D^{\lambda\mu kn}_{m+1}(t^m_{kn} + \tau^m_{kn}) - DD^{j3kn}_m (t^m_{kn} + \tau^m_{kn})]/2; \qquad (10)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
K^j_2(\alpha_0) = [&-(DD^{1111}_2)_{\alpha^j}(\nu_{1\alpha^1} + \nu_{2\alpha^2}) + (-1)^j (DD^{1212}_2)_{\alpha^{3-j}}(\nu_{1\alpha^2} - \nu_{2\alpha^1}) + \\
&+ (DD^{j\lambda kn}_{m+1})_{\alpha^\lambda} t^m_{kn} + (DD^{j\lambda kn}_{m+1}\tau^m_{kn})_{\alpha^\lambda} + DG^j_{\lambda\mu} D^{\lambda\mu kn}_{m+1}(t^m_{kn} + \tau^m_{kn}) - DD^{j3kn}_m (t^m_{kn} + \tau^m_{kn})]/2;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{gathered}
L^j_1(w_3) = [(DD^{j\lambda kn}_0 \mu^0_{kn})_{\alpha^\lambda} + DG^j_{\lambda\mu} D^{\lambda\mu kn}_0 \mu^0_{kn}]/2, \\
L^j_2(w_3) = [(DD^{j\lambda kn}_1 \mu^0_{kn})_{\alpha^\lambda} + DG^j_{\lambda\mu} D^{\lambda\mu kn}_1 \mu^0_{kn} - DD^{j3kn}_0 \mu^0_{kn}]/2, \\
G^j_l(w_3) = [(DD^{j\lambda kn}_{l-1}\chi^0_{kn})_{\alpha^\lambda} + DG^j_{\lambda\mu} D^{\lambda\mu kn}_{l-1}\chi^0_{kn}]/2, \quad l,j = 1,2;
\end{gathered}
$$

в соотношениях (10) по повторяющимся греческим индексам суммирование ведется от 1 до 2; по латинским индексам k, n от 1 до 3, а по m от 0 до 1; $a^{j\delta}_{k,\lambda\mu}$, $b^{j\delta}_{\lambda\mu}$ — известные функции, зависящие от упругих характеристик $D^{\lambda\mu qs}_m$ следующим образом:

$$
\begin{gathered}
a^{12}_{k,jj} = a^{21}_{k,jj} = DD^{12jj}_{m_k}/2, \quad a^{jj}_{k,12} = 2a^{12}_{k,jj} \ (j=1,2), \\
a^{12}_{k,12} = D(2D^{1212}_{m_k} - D^{1111}_{m_k} + D^{1122}_{m_k})/2 = a^{21}_{k,12},
\end{gathered}
$$

$$a_{k,22}^{22} = D(D_{m_k}^{2222} - D_{m_k}^{1111})/2, \ \ a_{k,11}^{jj} = a_{k,22}^{11} \equiv 0 \ \ (j = 1, 2); \ \ m_k = 1 - (-1)^{k-1}, \ \ k = 1, 2; \quad (11)$$
$$b_{kk}^{ij} = DD_1^{kikj}/2 \ (i, j, k = 1, 2), \ \ b_{12}^{jj} = 2b_{jj}^{12} \ (j = 1, 2), \ \ b_{12}^{12} = b_{21}^{12} = D(D_1^{1122} + D_1^{1212})/2;$$

F_j — комплексные функции, зависящие от внешней нагрузки:

$$F_1 = (R^1 + iR^2)/2, \quad F_2 = (N^1 + iN^2)/2. \quad (12)$$

2. Вывод интегральных представлений для тангенциальных перемещений и углов поворота. Рассмотрим неоднородные уравнения Коши–Римана для функций ω_1, ω_2:

$$\partial\omega_j/\partial\overline{z} = \rho_j, \quad j = 1, 2, \quad (13)$$

где $\rho_j = \rho_j^1 + i\rho_j^2$ — комплексные функции, принадлежащие пространству $L_p(\Omega)$, $p > 2$, которые временно считаем известными. Общее решение уравнения (13) имеет вид ([7], с. 29):

$$\omega_j(z) = \Phi_j(z) + T\rho_j(z), \quad T\rho_j \equiv T_\Omega\rho_j = -\frac{1}{\pi}\int_\Omega\!\!\int \frac{\rho_j(\zeta)}{\zeta - z}d\xi\, d\eta, \quad \zeta = \xi + i\eta, \quad (14)$$

где $\Phi_j(z)$ — произвольная голоморфная функция, принадлежащая пространству $C_\alpha(\overline{\Omega})$.

Известно ([7], с. 39), что Tf — вполне непрерывный оператор из $L_p(\Omega)$ в $L_q(\Omega)$ ($1 \le q \le 2p/(2-p)$), если $1 \le p \le 2$, и из $L_p(\Omega)$ в $C_\alpha(\overline{\Omega})$, если $p > 2$. Кроме того, существуют обобщенные производные

$$\partial Tf/\partial\overline{z} = f, \quad \partial Tf/\partial z \equiv S_\Omega f \equiv Sf = -\frac{1}{\pi}\int_\Omega\!\!\int \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}d\xi\, d\eta, \quad (15)$$

где Sf — линейный ограниченный оператор в $L_p(\Omega)$, $p > 1$.

Соотношения (14) в свою очередь можно рассматривать как уравнения относительно тангенциальных перемещений w_1, w_2 и углов поворота ν_1, ν_2. Если ввести комплексные функции $\omega_1^0(z) = w_2 + iw_1$, $\omega_2^0(z) = \nu_2 + i\nu_1$, то (14) примут вид уравнений Коши–Римана

$$\partial\omega_j^0/\partial\overline{z} = i[d_{m_j}^1\omega_j + d_{m_j}^2\overline{\omega_j}] \equiv id_{m_j}[\omega_j], \quad j = 1, 2, \quad (16)$$
$$d_{m_j}^k = 1/(4D)(1/D_{m_j}^{1111} + (-1)^k/D_{m_j}^{1212}), \quad k = 1, 2, \quad m_j = 1 - (-1)^{j-1},$$

общие решения которых даются формулами

$$\omega_j^0(z) = \Psi_j(z) + H_{j0}(\Phi_j + T\rho_j), \quad j = 1, 2, \quad H_{j0}f = iTd_{m_j}[f], \quad (17)$$

где Ψ_j — произвольная голоморфная функция класса $C_\alpha^1(\overline{\Omega})$.

Голоморфные функции $\Phi_j(z)$, $\Psi_j(z)$ найдем так, чтобы тангенциальные перемещения w_1, w_2 и углы поворота ν_1, ν_2 удовлетворяли граничным условиям (4). Сначала определим $\Psi_j(z)$ из условия $\operatorname{Re}\omega_j^0(t) = 0$, $t \in \Gamma$. Для голоморфной функции $\Psi_j(z)$ получим задачу Римана–Гильберта с краевым условием $\operatorname{Re}\Psi_j(t) = -\operatorname{Re}H_{j0}\omega_j(t)$, $t \in \Gamma$. В дальнейшем, не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что область Ω — единичный круг $|z| \le 1$. Тогда решение задачи Римана–Гильберта дается формулой ([8], с. 253)

$$\Psi_j(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{t + z}{t(t - z)}\operatorname{Re}H_{j0}(\omega_j)(t)dt + ic_j, \quad j = 1, 2$$

(c_j — произвольная действительная постоянная), которую с учетом выражения оператора $H_{j0}f$ в (17) после некоторых преобразований можно привести к виду

$$\Psi_j(z) = T_1 d_{m_j}[\overline{\omega_j}] + ic_j, \ \ m_j = 1 - (-1)^{j-1}, \ \ j = 1, 2, \ \ T_1 f = -\frac{1}{\pi i}\int_\Omega\!\!\int \frac{z}{1 - z\overline{\zeta}}f(\zeta)d\xi\, d\eta. \quad (18)$$

Легко видеть, что $T_1 f$ — вполне непрерывный оператор из $L_p(\Omega)$, $p>2$, в $C_\alpha(\overline{\Omega})$ и из $C_\alpha(\overline{\Omega})$ в $C^1_\alpha(\overline{\Omega})$. Если (18) подставить в (17), то будем иметь

$$\omega^0_j(z)=H_{j1}(\Phi_j+T\rho_j)(z)+ic_j,\quad j=1,2,\quad H_{j1}f=T_1 d_{m_j}[\overline{f}]+H_{j0}f. \tag{19}$$

Теперь от функции в (19) потребуем, чтобы $\operatorname{Im}\omega^0_j(t)=0, t\in\Gamma$. Тогда для определения голоморфной функции $\Phi_j(z)$ получаем граничное условие

$$\operatorname{Im}H_{j1}(\Phi_j+T\rho_j)(t)+c_j=0,\quad t\in\Gamma,\quad j=1,2. \tag{20}$$

Функцию $\Phi_j(z)$ будем искать в виде

$$\Phi_j(z)=\int_\Gamma\frac{\mu_j(t)}{t(t-z)}dt\equiv T_\Gamma(\mu_j/t)(z), \tag{21}$$

где $\mu_j(t)$ — действительная функция класса $C_\alpha(\Gamma)$.

Для нахождения $\mu_j(t)$ представление (21) подставим в (20). Заменяя операторы $H_{j1}(f)$, $H_{j0}(f)$, $T_1 f$, Tf их выражениями из (19), (17), (18), (14) и переставляя порядок интегрирования в полученных повторных интегралах, после некоторых преобразований будем иметь

$$\begin{aligned}A_j(\mu_j)(t)\equiv\operatorname{Re}\Bigg[&\int_\Omega\!\!\int\frac{t}{(1-t\overline{\zeta})}d^1_{m_j}(\zeta)d\xi d\eta\int_\Gamma\frac{\mu_j(\tau)}{1-\tau\overline{\zeta}}d\tau+\\&+\frac{1}{2}i\int_\Gamma d^2_{m_j}(t_1)\ln|t_1-t|^2dt_1\int_\Gamma\frac{\mu_j(\tau)}{\tau(t_1-\tau)}d\tau+\int_\Gamma\frac{\mu_j(\tau)}{\tau}d\tau\int_\Omega\!\!\int\frac{ln|\zeta-t|^2}{\zeta-\tau}\frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}}d^2_{m_j}(\zeta)d\xi\,d\eta\Bigg]-\\&-\frac{\pi}{2}\operatorname{Im}H_{j1}(T\rho_j)(t)=c_j,\quad t\in\Gamma,\quad j=1,2.\end{aligned} \tag{22}$$

Уравнение (22) дифференцируем по длине дуги s единичной окружности $\Gamma(t=e^{is})$, при этом во всех слагаемых допускаем дифференцирование под знаком интеграла, что, как легко видеть, вполне корректно. Применяя формулу перестановки Пуанкаре–Бертрана ([8], с. 68) к получаемому повторному особому интегралу во втором слагаемом левой части уравнения (22), после несложных преобразований получим

$$\mu_j(t)-\int_\Gamma k_{m_j}(t,\tau)\mu_j(\tau)d\sigma=H_{j2}(\rho_j)(t),\quad t\in\Gamma,\quad \tau=e^{i\sigma},\quad j=1,2, \tag{23}$$

$$\begin{aligned}k_{m_j}(t,\tau)=\frac{1}{\pi^2 d^2_{m_j}(t)}\operatorname{Re}\Bigg[&\frac{i}{2}\int_\Gamma\frac{d^2_{m_j}(t_1)(t+t_1)}{(t_1-t)(\tau-t_1)}dt_1+\\&+t\tau\int_\Omega\!\!\int\frac{d^1_{m_j}(\zeta)}{(1-t\overline{\zeta})^2(1-\tau\overline{\zeta})}d\xi\,d\eta+\int_\Omega\!\!\int\frac{t+\zeta}{(\zeta-\tau)(t-\zeta)}\frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}}d^2_{m_j}(\zeta)d\xi\,d\eta\Bigg],\end{aligned}$$

$$H_{j2}(\rho_j)(t)=\frac{1}{2\pi d^2_{m_j}(t)}\operatorname{Im}\frac{d}{ds}H_{j1}T\rho_j(t),\quad t=e^{is}.$$

Уравнения (22) и (23) будут эквивалентными, если вместо произвольной постоянной c_j, входящей в (22), взять

$$c_j=A_j(\mu_j)(t_j), \tag{24}$$

где $t_j=e^{is_j}$ — произвольно фиксированные точки Γ; оператор $A_j(\mu_j)$ определен в (22).

Используя свойства интеграла типа Коши ([7], с. 26) и оператора Tf, учитывая при этом $d^k_{m_j}\in C^1_\alpha(\overline{\Omega})$ $(k=1,2)$, нетрудно показать, что $k_{m_j}(t,\tau)$ по обеим переменным принадлежит пространству $C_\alpha(\Gamma)$. Далее, принимая во внимание соотношения в (19), (17), (15), придадим правой части уравнения (23) вид

$$H_{j2}(\rho_j)(t) = \frac{1}{2\pi d^2_{m_j}(t)} \operatorname{Im}[\overline{t}\,\overline{S}d_{m_j}[\overline{T\rho_j}](t) + \overline{t}d_{m_j}[T\rho_j](t) - tSd_{m_j}[T\rho_j](t)], \quad t = e^{is} \in \Gamma, \quad (25)$$

где операторы Sf, Tf, $d_{m_j}[f]$ определены в (15), (14), (16).

Из (25) с учетом указанных свойств операторов Sf, Tf следует, что $H_{j2}(\rho_j)(t) \in C_\alpha(\Gamma)$.

Займемся исследованием разрешимости фредгольмова уравнения (23) в пространстве $C_\alpha(\Gamma)$. Пусть $\mu_j(t) \in C_\alpha(\Gamma)$ есть ненулевое решение однородного уравнения

$$\mu_j(t) - \int_\Gamma k_{m_j}(t,\tau)\mu_j(\tau)d\sigma = 0, \quad (26)$$

которому согласно формуле (21) соответствует голоморфная функция $\Phi_j(z) \in C_\alpha(\overline{\Omega})$. Тогда в силу (14), (19), (24), где $\rho_j(t) \equiv 0$, получаем функции $\omega_j(z)$, $\omega^0_j(z)$ такие, что $\omega_j(z)$ является голоморфной, а $\omega^0_j(z)$ удовлетворяет граничному условию $\omega^0_j(t) = 0$, $t \in \Gamma$. Используя выражения (8) для $\omega_j(z)$, равенство $\partial\omega_j/\partial\overline{z} = 0$ запишем в развернутом виде

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial\alpha^1}[a_j(f_{1\alpha^1} + f_{2\alpha^2})] - \frac{\partial}{\partial\alpha^2}[b_j(f_{2\alpha^1} - f_{1\alpha^2})] = 0, \\ \frac{\partial}{\partial\alpha^1}[b_j(f_{2\alpha^1} - f_{1\alpha^2})] + \frac{\partial}{\partial\alpha^2}[a_j(f_{1\alpha^1} + f_{2\alpha^2})] = 0, \end{gathered} \quad (27)$$

где $a_j = DD^{1111}_{m_j}$, $b_j = DD^{1212}_{m_j}$; $(f_1, f_2) = (w_1, w_2)$ при $j = 1$ и $(f_1, f_2) = (\nu_1, \nu_2)$ при $j = 2$.

Первое равенство в (27) умножаем на f_1, второе — на f_2, интегрируем по области Ω и складываем. Интегрируя по частям, получаем $\iint\limits_\Omega [a_j(f_{1\alpha^1} + f_{2\alpha^2})^2 + b_j(f_{2\alpha^1} - f_{1\alpha^2})^2]d\alpha^1 d\alpha^2 = 0$, откуда в силу $a_j, b_j > 0$ в $\overline{\Omega}$ следуют равенства $f_{1\alpha^1} + f_{2\alpha^2} = 0$, $f_{2\alpha^1} - f_{1\alpha^2} = 0$, которые означают, что $f_1 - if_2$ — голоморфная функция в Ω. Так как $f_1 = f_2 = 0$ на Γ, то $f_1 = f_2 = 0$ в $\overline{\Omega}$. Тогда $\omega_j(z) \equiv 0$ в $\overline{\Omega}$ и, как следует из (14), $\Phi_j(z) \equiv 0$ в $\overline{\Omega}$. Теперь, если принять во внимание (21), то заключаем, что $\mu_j(t)$ есть граничное значение функции $\mu_j(z)$, аналитической вне $\overline{\Omega}$ и ограниченной на бесконечности. Так как $\mu_j(t)$ — действительная функция, то $\mu_j(z) \equiv c$ вне Ω, где c — действительная постоянная. Поэтому $\mu_j(t) \equiv c$, $t \in \Gamma$. Выражение $\mu_j(t) = c$ внесем в уравнение (26). Непосредственные вычисления показывают, что $\int\limits_\Gamma k_{m_j}(t,\tau)d\sigma = 0$. Тогда из (26) сразу получим $c = 0$, т.е. уравнение (26) имеет только тривиальное решение. Следовательно, уравнение (23) однозначно разрешимо и единственное решение дается формулой

$$\mu_j(t) = H_{j2}(\rho_j)(t) + \int_\Gamma R_{m_j}(t,\tau)H_{j2}(\rho_j)(\tau)d\tau \equiv H_{j3}(\rho_j)(t), \quad t \in \Gamma, \quad (28)$$

где $R_{m_j}(t,\tau)$ — резольвента уравнения (23), $R_{m_j}(t,\tau) \in C_\alpha(\Gamma) \times C_\alpha(\Gamma)$.

Теперь, подставляя (28) в (21) и (24), затем (21) и (24) в (19), для тангенциальных перемещений и углов поворота получаем искомые представления

$$\begin{gathered} \omega^0_j(z) = H_{j1}(\omega_j(\rho_j))(z) + iA_j(H_{j3}(\rho_j)(t_0)) \equiv K_{j0}(\rho_j)(z), \\ \omega_j \equiv \omega_j(\rho_j)(z) = T_\Gamma(H_{j3}(\rho_j)/t)(z) + T\rho_j(z), \end{gathered} \quad (29)$$

в которых операторы Tf, $H_{j1}(f)$, $A_j(f)$, $T_\Gamma f$, $H_{j3}(f)$ определены в (14), (19), (22), (21), (28) соответственно.

Получим интегральные представления для производных (до второго порядка включительно) w_j, ν_j $(j=1,2)$. Из (16), заменяя функцию $\Phi_j(z)$ выражением (21), учитывая при этом (28), сразу получим

$$\omega^0_{j\overline{z}} = id_{m_j}[\omega_j(\rho_j)](z) \equiv K_{j1}(\rho_j)(z). \tag{30}$$

Из (29) с учетом (19), (17), (15) находим

$$\begin{gathered}\omega^0_{jz} = iS_1\overline{K_{j1}(\rho_j)}(z) + SK_{j1}(\rho_j)(z) \equiv K_{j2}(\rho_j)(z),\\ S_1 f \equiv \frac{\partial T_1 f}{\partial z} = -\frac{1}{\pi i}\int_\Omega\!\!\int \frac{f(\zeta)}{(1-z\overline{\zeta})^2}d\xi\, d\eta.\end{gathered} \tag{31}$$

Заметим, что $S_1 f$ — линейный ограниченный оператор в $C^k_\alpha(\overline{\Omega})$ и в $L_p(\Omega)$, $p>1$.

Производные первого порядка по α^1, α^2 тангенциальных перемещений w_j и углов поворота ν_j выражаются через ω^0_{jz}, $\omega^0_{j\overline{z}}$ формулами

$$\begin{gathered}(\operatorname{Re}\omega^0_j)_{\alpha^k} = \operatorname{Re}[(-i)^{k-1}(K_{j1}(\rho_j) + (-1)^{k-1}K_{j2}(\rho_j))],\\ (\operatorname{Im}\omega^0_j)_{\alpha^k} = \operatorname{Im}[i^{k-1}(K_{j2}(\rho_j) + (-1)^{k-1}K_{j1}(\rho_j))], \quad k=1,2.\end{gathered} \tag{32}$$

Далее, дифференцируя (30) по $\overline{z}$ и z, получаем

$$\begin{gathered}\omega^0_{j\overline{z}\,\overline{z}} = i[d^1_{m_j\overline{z}}\omega_j(\rho_j) + d^2_{m_j\overline{z}}\overline{\omega_j(\rho_j)} + d^1_{m_j}\rho_j + d^2_{m_j}\overline{\omega_{jz}(\rho_j)}] \equiv P_{j1}(\rho_j),\\ \omega^0_{j\overline{z}z} = i[d^1_{m_jz}\omega_j(\rho_j) + d^2_{m_jz}\overline{\omega_j(\rho_j)} + d^1_{m_j}\omega_{jz}(\rho_j) + d^2_{m_j}\rho_j] \equiv P_{j2}(\rho_j),\\ \omega_{jz}(\rho_j) = S_\Gamma(H_{j3}(\rho_j)/t) + S\rho_j(z), \quad S_\Gamma f \equiv \frac{d}{ds}T_\Gamma f = \int_\Gamma \frac{f(t)}{(t-z)^2}dt.\end{gathered} \tag{33}$$

Используя формулы Коши–Грина и (8.20) в ([7], сс. 28, 58), из (31) дифференцированием по z получим

$$\omega_{jzz} = \frac{1}{2\pi i}[-S_\Gamma\overline{K_{j1}(\rho_j)} + S_\Gamma(K_{j1}(\rho_j)\overline{t}^2)] - iS_1(\overline{\zeta}^2P_{j1}(\rho_j)) + SP_{j2}(\rho_j) \equiv P_{j3}(\rho_j). \tag{34}$$

Производные второго порядка w_j, ν_j $(j=1,2)$ выражаются через $\omega^0_{j\overline{z}\,\overline{z}}$, $\omega^0_{jz\overline{z}}$, ω^0_{jzz} формулами

$$\begin{gathered}[\operatorname{Re}((-i)^{k-1}\omega^0_j)]_{\alpha^n\alpha^n} = \operatorname{Re}[(-i)^{k-1}[2P_{j2}(\rho_j) + (-i)^{n-1}(P_{j1}(\rho_j) + P_{j3}(\rho_j))]], \quad k,n=1,2,\\ [\operatorname{Re}((-i)^{k-1}\omega^0_j)]_{\alpha^1\alpha^2} = \operatorname{Im}[(-i)^{k-1}(P_{j1}(\rho_j) - P_{j3}(\rho_j))], \quad k,n=1,2.\end{gathered} \tag{35}$$

Имеет место

Лемма 1. 1) $K_{jn}(\rho_j)$ $(j=1,2,\ n=\overline{0,2})$ *— линейные вполне непрерывные операторы из* $L_p(\Omega)$, $p>2$, *в* $C_\alpha(\overline{\Omega})$; 2) $P_{jk}(\rho_j)$ $(j=1,2;\ k=\overline{1,3})$ *— линейные ограниченные операторы в* $L_p(\Omega)$, $p>2$, *причем* $\|P_{jk}(\rho_j)\|_{L_p(\Omega)} \le p_{jk}\|\rho_j\|_{L_p}$, *где* p_{jk} *— известные постоянные.*

Справедливость леммы 1 вытекает из формул (29), (31), (33), (34) с учетом вышеуказанных свойств операторов Tf, $T_1 f$, Sf, $S_1 f$ и интеграла типа Коши (21) ([7], с. 26).

3. Решение системы уравнений равновесия относительно тангенциальных перемещений и углов поворота. Исследование системы (1) начнем с решения системы (7) относительно тангенциальных перемещений w_1, w_2 и углов ν_1, ν_2, считая прогиб временно известным. С этой целью в систему (9), представляющую собой комплексную форму записи системы (7), вместо w_j, ν_j $(j=1,2)$ и их производных подставим (13), (29), (32), (35). В результате получим систему линейных сингулярных интегральных уравнений по области Ω относительно комплексной вектор-функции $\rho = (\rho_1, \rho_2)$ следующего вида:

$$\rho + P(\rho) + K(\rho) = H(w_3), \tag{36}$$

$$P(\rho) = (P_1(\rho), P_2(\rho)), \quad K(\rho) = (K_1(\rho), K_2(\rho)), \quad H(w_3) = (H_1, H_2),$$

$$H_j(w_3) = -L_j(w_3) - G_j(w_3) - F_j.$$

Здесь операторы $P_j(\rho)$, $K_j(\rho)$, $L_j(w_3)$, $G_j(w_3)$ и функции F_j определены формулами (10), (12), в которых w_j, ν_j $(j = 1, 2)$ и их производные заменены выражениями из (29), (32), (35). С учетом леммы 1 получаем, что $K(\rho)$ — линейный вполне непрерывный, а $P(\rho)$ — линейный ограниченный операторы в $L_p(\Omega)$, $p > 2$, причем

$$\|P(\rho)\|_{L_p} \leq q_p \|\rho\|_{L_p}, \tag{37}$$

где $q_p = \max\limits_{1 \leq k \leq 2} \big[[\|a^{j\delta}_{k,\lambda\mu}\|_C + \|b^{j\delta}_{\lambda\mu}\|_C] 1_{j\delta} \widetilde{p}^{\lambda\mu}_k\big]$ (по k нет суммирования); $\widetilde{p}^{\lambda\lambda}_j = 2p_{j2} + p_{j1} + p_{j3}$ $(\lambda = 1, 2)$, $\widetilde{p}^{12}_j = p_{j1} + p_{j3}$, $\|\rho\|_{L_p} = \|\rho_1\|_{L_p} + \|\rho_2\|_{L_p}$.

При выводе оценки (37) воспользовались (10), (35) и леммой 1.

Предположим, что выполнено условие

$$q_p < 1. \tag{38}$$

Тогда уравнение (36) эквивалентно

$$\rho + K_0(\rho) = H_0(w_3), \tag{39}$$

где $K_0(\rho) = (I + P)^{-1} K(\rho)$, $H_0(w_3) = (I + P)^{-1} H(w_3)$.

Заметим, что $K_0(\rho)$ — линейный вполне непрерывный оператор в $L_p(\Omega)$, $p > 2$. Если $\rho \in L_p(\Omega)$, $p > 2$, — ненулевое решение уравнения $\rho + K_0(\rho) = 0$, то согласно формуле (29) ему соответствует вектор $a_0 = (w_1, w_2, \nu_1, \nu_2)$, который удовлетворяет граничному условию (4) и является решением системы уравнений

$$\begin{aligned} &(D\widetilde{T}^{i\lambda})_{\alpha^\lambda} + DG^i_{\lambda\mu} \widetilde{T}^{\lambda\mu} = 0, \quad i = 1, 2, \\ &(D\widetilde{M}^{i\lambda})_{\alpha^\lambda} - D\widetilde{T}^{i3} + DG^i_{\lambda\mu} \widetilde{M}^{\lambda\mu} = 0, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \tag{40}$$

где $\widetilde{T}^{ij} = D^{ijkn}_0 (t^0_{kn} + \tau^0_{kn}) + D^{ijkn}_1 \gamma^1_{kn}$, $\widetilde{M}^{ij} = D^{ijkn}_1 (t^0_{kn} + \tau^0_{kn}) + D^{ijkn}_2 \gamma^1_{kn}$; t^0_{kn}, τ^0_{kn}, γ^1_{kn} определены в (3), (6).

Равенства в (40) умножим соответственно на w_1, w_2, ν_1, ν_2, после этого их сложим и проинтегрируем по области Ω. Принимая во внимание условия (1), (5), сразу получаем систему равенств $t^0_{\lambda\mu} + \tau^0_{\lambda\mu} = 0$, $\gamma^1_{\lambda\mu} = 0$, $\lambda, \mu = 1, 2$, которую можно переписать в виде

$$\begin{aligned} &w_{1\alpha^1} - w_{2\alpha^2} + (G^\lambda_{22} - G^\lambda_{11}) w_\lambda = 0, \quad w_{1\alpha^2} + w_{2\alpha^1} - 2G^\lambda_{12} w_\lambda = 0; \\ &\nu_{1\alpha^1} - \nu_{2\alpha^2} + (G^\lambda_{22} - G^\lambda_{11}) \nu_\lambda = 0, \quad \nu_{1\alpha^2} + \nu_{2\alpha^1} - 2G^\lambda_{12} \nu_\lambda = 0. \end{aligned} \tag{41}$$

Равенства в (41) означают, что функции $w_1 + iw_2$ и $\nu_1 + i\nu_2$ суть обобщенные аналитические функции в Ω. Так как на границе Γ они обращаются в нуль, то в силу теоремы единственности обобщенных аналитических функций ([7], с. 123) имеем $w_j = \nu_j \equiv 0$ в $\overline{\Omega}$, $j = 1, 2$, следовательно, $\rho_j \equiv 0$ в Ω, $j = 1, 2$, т. е. существует обратный оператор $(I + K_0)^{-1}$, ограниченный в $L_p(\Omega)$, $p > 2$, с помощью которого единственное решение уравнения (39) запишется в виде $\rho = (I + K_0)^{-1} H_0(w_3)$. Принимая во внимание выражения операторов $H_0(w_3)$, $H(w_3)$, это решение в свою очередь представим следующим образом:

$$\rho = \widetilde{L}(w_3) + \widetilde{G}(w_3) + \widetilde{F}, \tag{42}$$

где $\widetilde{L}(w_3) = -(I+K_0)^{-1}(I+P)^{-1}L(w_3)$, $\widetilde{G}(w_3) = -(I+K_0)^{-1}(I+P)^{-1}G(w_3)$, $\widetilde{F} = -(I+K_0)^{-1}(I+P)^{-1}F, L(w_3) = (L_1, L_2)$, $G(w_3) = (G_1, G_2)$, $F = (F_1, F_2)$.

Если теперь (42) подставим в (29), то получим решение системы (7) через прогиб w_3.

Принимая во внимание соотношения (6), (10), легко получаем , что $\widetilde{L}(w_3)$ и $\widetilde{G}(w_3)$ суть соответственно линейный и нелинейный ограниченные операторы из $W_p^{(2)}(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$, $p > 2$, причем

$$\|\widetilde{L}(w_3)\|_{L_p} \le c\|w_3\|_{W_p^{(2)}}, \quad \|\widetilde{G}(w_3)\|_{L_p} \le c\|w_3\|^2_{W_p^{(2)}}. \tag{43}$$

В силу (3) из (12) вытекает, что $\widetilde{F} \in L_p(\Omega)$, $p > 2$.

4. Сведéние системы (1) к одному уравнению относительно прогиба. Прежде чем заменить тангенциальные перемещения и углы поворота в третьем уравнении системы (1) выражениями из (29), представим их в соответствии с (42) в виде

$$\begin{gathered} \omega_j^0(z) = \omega_{j0}^0 + \omega_{j1}^0(w_3) + \omega_{j2}^0(w_3), \quad j = 1,2, \\ \omega_{1k}^0 = w_{2k} + iw_{1k}, \quad \omega_{2k}^0 = \nu_{2k} + i\nu_{1k}, \quad k = 0,1,2, \end{gathered} \tag{44}$$

где ω_{jk}^0 — однородные операторы относительно w_3 порядка k.

Используя (44), компоненты деформации запишем в аналогичном виде

$$\gamma_{ij}^m = \gamma_{ij0}^m + \gamma_{ij1}^m(w_3) + \gamma_{ij2}^m(w_3), \quad i,j = \overline{1,3}, \quad m = 0,1, \tag{45}$$

где γ_{ijk}^m — однородные операторы относительно w_3 порядка k $(k = 0,1,2)$.

С помощью (45) усилия T^{ij} и моменты M^{ij}, определенные формулами (2), также представим в виде

$$T^{ij} = T_0^{ij} + T_1^{ij}(w_3) + T_2^{ij}(w_3), \quad M^{ij} = M_0^{ij} + M_1^{ij}(w_3) + M_2^{ij}(w_3), \quad i,j = \overline{1,3}, \tag{46}$$

где T_k^{ij}, M_k^{ij} — однородные операторы от w_3 порядка k.

Заметим, что ω_{j0}^0, γ_{ij0}^m, T_0^{ij} зависят только от тангенциальных внешних сил R^1, R^2 и внешних моментов N^1, N^2.

Подставляя (46) в третье уравнение системы (1), после некоторых преобразований получим

$$a_{11}w_{3\alpha^1\alpha^1} + 2a_{12}w_{3\alpha^1\alpha^2} + a_{22}w_{3\alpha^2\alpha^2} + P_3(w_3) + K_3(w_3) + G_3(w_3) = F^3, \tag{47}$$

где

$$a_{\lambda\mu} = D(T_0^{\lambda\mu} + D_0^{\lambda 3\mu 3}) \ \ (\lambda,\mu = 1,2), \quad P_3(w_3) = DD_m^{\lambda 3\delta\mu}[\gamma_{\delta\mu 1}^m(w_3)]_{\alpha^\lambda},$$

$$\begin{aligned} K_3(w_3) = (DD_m^{\lambda 3\delta\mu})_{\alpha^\lambda}\gamma_{\delta\mu 1}^m(w_3) + (DT_0^{\lambda\mu})_{\alpha^\mu}w_{3\alpha^\lambda} + DD_0^{\lambda 3\mu 3}\nu_{\mu 1\alpha^\lambda}(w_3) + \\ + (DD_0^{\lambda 3\mu 3})_{\alpha^\lambda}\gamma_{\mu 31}^0(w_3) + DB_{\lambda\mu}T_1^{\lambda\mu}(w_3), \end{aligned} \tag{48}$$

$$\begin{aligned} G_3(w_3) = [DD_m^{\lambda 3\delta\mu}\gamma_{\delta\mu 2}^m(w_3)]_{\alpha^\lambda} + [D(T_1^{\lambda\mu}(w_3) + T_2^{\lambda\mu}(w_3))w_{3\alpha^\lambda}]_{\alpha^\mu} + \\ + DD_0^{\lambda 3\mu 3}\nu_{\mu 2\alpha^\lambda}(w_3) + (DD_0^{\lambda 3\mu 3})_{\alpha^\lambda}\gamma_{\mu 32}^0(w_3) + DB_{\lambda\mu}T_2^{\lambda\mu}(w_3), \end{aligned}$$

$$F^3 = -(D_m^{\lambda 3\delta\mu}\gamma_{\delta\mu 0}^m)_{\alpha^\lambda} - DD_0^{\lambda 3\mu 3}\nu_{\mu 0\alpha^\lambda} - (DD_0^{\lambda 3\mu 3})_{\alpha^\lambda}\gamma_{\mu 30}^0 - DB_{\lambda\mu}T_0^{\lambda\mu} - R^3.$$

Справедлива

Лемма 2. *Пусть выполнены условия* (3), (4). *Тогда* 1) $P_3(w_3)$ *и* $K_3(w_3)$ — *линейные (соответственно ограниченный и вполне непрерывный) операторы из* $W_p^{(2)}(\Omega)$ *в* $L_p(\Omega)$, $p>2$, *причем* $\|P_3(w_3)\|_{L_p} \le \|DD_m^{\lambda 3\delta\mu}\|_C q_{\lambda\delta\mu}^m \|w_3\|_{W_p^{(2)}}$, $\|K_3(w_3)\|_{L_p} \le k_3\|w_3\|_{W_p^{(2)}}$, *где* $q_{\lambda\delta\mu}^m$, k_3 — *известные постоянные*; 2) $G_3(w_3)$ — *нелинейный ограниченный оператор из* $W_p^{(2)}(\Omega)$ *в* $L_p(\Omega)$, $p>2$, *причем для любых* $w_3^j \in W_p^{(2)}(\Omega)$ $(j=1,2)$, *принадлежащих шару* $\|w_3\|_{W_p^{(2)}} < r$, *имеет место оценка* $\|G_3(w_3^1) - G_3(w_3^2)\|_{L_p} \le g_3 r(1+r)\|w_3^1 - w_3^2\|_{W_p^{(2)}}$, *где* g_3 — *известная постоянная*; 3) $F^3 \in L_p(\Omega)$, $p>2$.

Справедливость леммы 2 легко следует из представлений (48) с учетом леммы 1, формул (45), (46) и оценок (43).

5. Исследование разрешимости уравнения (47). Пусть тангенциальные внешние силы R^i $(i=1,2)$ и упругие характеристики $D_0^{\lambda 3\mu 3}$ $(\lambda,\mu=1,2)$ в Ω удовлетворяют условию

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \ge \delta_0 > 0, \quad \delta_0 = \mathrm{const}\,. \tag{49}$$

Известно ([7], с. 266–267), что функцию $w_3 \in W_p^{(2)}(\Omega)$, $p>2$, удовлетворяющую граничному условию (4), можно представить в виде

$$w_3(z) = \int_\Omega\!\!\int H(\zeta,z)\rho_3(\zeta)d\xi\,d\eta \equiv \widetilde{T}\rho_3, \quad \zeta = \xi + i\eta, \tag{50}$$

где ρ_3 — вещественная функция пространства $L_p(\Omega)$, $p>2$; $H(\zeta,z)$ — гармоническая функция Грина для единичного круга Ω, которая дается формулой

$$H(\zeta,z) = \frac{1}{2\pi}\ln|(z-\zeta)/(1-z\overline{\zeta})|.$$

Следуя ([7], с. 267), решение уравнения (47) будем искать в виде (50). Дифференцируем (50) по z, $\overline{z}$

$$w_{3z} = \int_\Omega\!\!\int H_z(\zeta,z)\rho_3(\zeta)d\xi\,d\eta = -\frac{1}{4\pi}\int_\Omega\!\!\int\left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{\overline{\zeta}}{1-z\overline{\zeta}}\right)\rho_3(\zeta)d\xi d\eta, \tag{51}$$

$$w_{3\overline{z}} = -\frac{1}{4\pi}\int_\Omega\!\!\int\left(\frac{1}{\overline{\zeta} - \overline{z}} - \frac{\zeta}{1-\overline{z}\zeta}\right)\rho_3(\zeta)d\xi\,d\eta.$$

Продолжая функцию $\rho_3(z)$ на всю плоскость C по закону $\rho_3^*(z) = \rho_3(z)$ при $|z|<1$ и $\rho_3^*(z) = (1/|z|^4)\rho_3(1/\overline{z})$ при $|z|\ge 1$, соотношения (51) представим в виде

$$w_{3z} = T_C\rho_3^*/4, \quad w_{3\overline{z}} = \overline{T}_C\rho_3^*/4, \quad \overline{T}_C f = -\frac{1}{\pi}\int_C\!\!\int \frac{f(\zeta)}{\overline{\zeta} - \overline{z}}d\xi\,d\eta, \tag{52}$$

где оператор $T_C f$ определен в (14). Соотношения (52) еще раз дифференцируем по z, $\overline{z}$

$$w_{3zz} = S_C\rho_3^*/4, \quad w_{3\overline{z}\,\overline{z}} = \overline{S}_C\rho_3^*/4, \quad w_{3z\overline{z}} = \rho_3^*/4, \tag{53}$$

где оператор $S_C f$ определен в (15), причем ([7], с. 267)

$$\|S_C f\|_{L_p(\Omega)} \le \Lambda_p\|f\|_{L_p(\Omega)}. \tag{54}$$

Так как $w_{3\alpha^k\alpha^k} = 2w_{3z\overline{z}} + (-1)^{k-1}(w_{3zz} + w_{3\overline{z}\,\overline{z}})$ $(k=1,2)$, $w_{3\alpha^1\alpha^2} = 2\,\mathrm{Im}\,w_{3\overline{z}\,\overline{z}}$, то с учетом (53)почти всюду в Ω имеем

$$w_{3\alpha^k\alpha^k} = \rho_3/2 + (-1)^{k-1}\,\mathrm{Re}\,S_C\rho_3^*/2, \quad k=1,2, \tag{55}$$

$$w_{3\alpha^1\alpha^2} = \mathrm{Im}\,\overline{S}_C\rho_3^*/2, \quad w_{3\alpha^k} = \mathrm{Re}(i^{k-1}T_C\rho_3^*), \quad k=1,2.$$

Теперь (50), (55) подставим в уравнение (47). После несложных преобразований получаем нелинейное сингулярное интегральное уравнение относительно ρ_3

$$\rho_3 + \widetilde{S}(\rho_3) + \widetilde{P_3}(\rho_3) + \widetilde{K_3}(\rho_3) + \widetilde{G_3}(\rho_3) = \widetilde{F_3}, \tag{56}$$

где $\widetilde{S}(\rho_3) = \mathrm{Re}(qS_C\rho_3^*)$, $q(z) = (a_{11} - a_{22} + 2ia_{12})/(a_{11} + a_{22})$,

$$(\widetilde{P_3}, \widetilde{K_3}, \widetilde{G_3}, \widetilde{F_3}) = 2(P_3, K_3, G_3, F^3)/(a_{11} + a_{22}),$$

$P_3(\rho_3) \equiv P_3(\widetilde{T}\rho_3)$, $K_3(\rho_3) \equiv K_3(\widetilde{T}\rho_3)$, $G_3(\rho_3) \equiv G_3(\widetilde{T}\rho_3)$.

Для оператора $\widetilde{S}(\rho_3)$ с учетом (54) имеем оценку $\|\widetilde{S}(\rho_3)\|_{L_p} \leq \|q\|_C \Lambda_p \|\rho_3\|_{L_p}$.

Легко показать, что в силу условия (49) справедливо неравенство $\|q\|_C \leq q_0 = \mathrm{const} < 1$. Так как ([7], с. 270) $\Lambda_p = \|S\|_{L_p}$ непрерывна по p и $\Lambda_2 = 1$, то найдется такое $\varepsilon > 0$, что выполняется неравенство $q_0\Lambda_p < 1$, если $2 < p \leq 2+\varepsilon$. Следовательно, существует обратный оператор $(I + \widetilde{S})^{-1}$, ограниченный в $L_p(\Omega)$, $2 < p \leq 2 + \varepsilon$, применив который к уравнению (56), придем к эквивалентному уравнению

$$\rho_3 + P_3^0(\rho_3) + K_3^0(\rho_3) + G_3^0(\rho_3) = F_3^0, \tag{57}$$

в котором приняты обозначения $(P_3^0, K_3^0, G_3^0, F_3^0) = (I + \widetilde{S})^{-1}(\widetilde{P}_3, \widetilde{K}_3, \widetilde{G}_3, \widetilde{F}_3)$.

Заметим, что $P_3^0(\rho_3)$ и $K_3^0(\rho_3)$ — линейные соответственно ограниченный и вполне непрерывный операторы в $L_p(\Omega)$, $2 < p \leq 2 + \varepsilon$, а $G_3^0(\rho_3)$ — нелинейный ограниченный оператор в $L_p(\Omega)$, $2 < p \leq 2 + \varepsilon$, причем в силу леммы 2 для оператора $P_3^0(\rho_3)$ имеем

$$\|P_3^0(\rho_3)\|_{L_P} \leq \|DD_m^{\lambda 3\delta\mu}\|_C q^m_{\lambda\delta\mu} \|(I + \widetilde{S})^{-1}\|_{L_P} \|\rho_3\|_{L_P} \equiv p_3^0 \|\rho_3\|_{L_p}. \tag{58}$$

Предположим, что выполняется условие

$$p_3^0 < 1. \tag{59}$$

Тогда уравнение (57) сведется к эквивалентному уравнению

$$\rho_3 + K_3^1(\rho_3) + G_3^1(\rho_3) = F_3^1, \tag{60}$$

где $(K_3^1, G_3^1, F_3^1) = (I + P_3^0)^{-1}(K_3^0, G_3^0, F_3^0)$, при этом $K_3^1(\rho_3)$ — линейный вполне непрерывный, $G_3^1(\rho_3)$ — нелинейный ограниченный операторы в $L_p(\Omega)$, $2 < p \leq 2 + \varepsilon$.

Покажем, что уравнение

$$\rho_3 + K_3^1(\rho_3) = 0 \tag{61}$$

имеет лишь тривиальное решение в $L_p(\Omega)$, $2 < p \leq 2 + \varepsilon$. От противного: пусть $\rho_3 \in L_p(\Omega)$, $2 < p \leq 2+\varepsilon$, есть ненулевое решение уравнения (61). Этому решению по формуле (50) соответствует нормальное перемещение $w_3 \in W_p^{(2)}(\Omega)$, $2 < p \leq 2 + \varepsilon$, которое по формулам (29) с плотностью $\rho = \widetilde{L}(w_3)$ (см. (42)) определяет тангенциальные перемещения и углы поворота. Полученные таким образом обобщенные перемещения w_1, w_2, w_3, ν_1, ν_2 удовлетворяют однородным граничным условиям (4) и системе линейных однородных уравнений

$$\begin{gathered}
(DT_1^{i\lambda})_{\alpha^\lambda} + DG^i_{\lambda\mu} T_1^{\lambda\mu} = 0, \quad i = 1, 2, \\
(DT_0^{\lambda\mu} w_{3\alpha^\lambda})_{\alpha^\mu} + (DT_1^{\lambda 3})_{\alpha^\lambda} + DB_{\lambda\mu} T_1^{\lambda\mu} = 0, \\
(DM_1^{i\lambda})_{\alpha^\lambda} - DT_1^{i3} + DG^i_{\lambda\mu} M_1^{\lambda\mu} = 0, \quad i = 1, 2.
\end{gathered} \tag{62}$$

Умножим равенства (62) соответственно на w_1, w_2, w_3, ν_1, ν_2. Затем сложим их и проинтегрируем по области Ω. В результате после несложных преобразований приходим к интегральному равенству

$$\int_\Omega\!\!\int [T_0^{\lambda\mu} w_{3\alpha^\lambda} w_{3\alpha^\mu} + D_0^{ijkn}\gamma^0_{ij1}\gamma^0_{kn1} + D_1^{ijkn}(\gamma^0_{ij1}\gamma^1_{kn1} + \gamma^1_{ij1}\gamma^0_{kn1}) + D_2^{ijkn}\gamma^1_{ij1}\gamma^1_{kn1}] d\Omega = 0. \tag{63}$$

Пусть выполняется условие

$$\iint_{\Omega} T_0^{\lambda\mu} w_{3\alpha^\lambda} w_{3\alpha^\mu} d\Omega \geq 0. \tag{64}$$

Тогда из (63) с учетом условия (1) получим систему равенств

$$\begin{aligned} &w_{j\alpha^j} - G_{jj}^{\lambda} w_\lambda - B_{jj} w_3 = 0, \ \ j = 1,2, \ \ w_{1\alpha^2} + w_{2\alpha^1} - 2G_{12}^{\lambda} w_\lambda - 2B_{12} w_3 = 0, \\ &\nu_{j\alpha^j} - G_{jj}^{\lambda} \nu_\lambda = 0, \qquad\qquad\quad j = 1,2, \ \ \nu_{1\alpha^2} + \nu_{2\alpha^1} - 2G_{12}^{\lambda}\nu_\lambda = 0, \\ &\qquad\qquad w_{3\alpha^j} + \nu_j = 0, \ \ j = 1,2. \end{aligned} \tag{65}$$

Рассуждая как в случае системы (41), получаем $\nu_1 = \nu_2 \equiv 0$. Из последних двух равенств в (65) следует $w_3 \equiv 0$ в $\overline{\Omega}$. Если принять во внимание формулу $w_{3z\overline{z}} = \rho_3^*/4$, то будем иметь $\rho_3 \equiv 0$ в Ω. Следовательно, уравнение (60) эквивалентно

$$\rho_3 + G_3^*(\rho_3) = F_3^*, \tag{66}$$

где $G_3^*(\rho_3) = (I + K_3^1)^{-1} G_3^1(\rho_3)$, $F_3^* = (I + K_3^1)^{-1} F_3^1$. Согласно лемме 2 для любых ρ_3^j $(j = 1,2) \in L_p(\Omega)$, $2 < p \leq 2 + \varepsilon$, принадлежащих шару $\|\rho_3\|_{L_p} < r$, будем иметь $\|G_3^*(\rho_3^1) - G_3^*(\rho_3^2)\|_{L_p} \leq g_3^* r(1+r)\|\rho_3^1 - \rho_3^2\|_{L_p}$, где g_3^* — известная постоянная, зависящая от физико-геометрических характеристик оболочки, норм операторов Tf, Sf.

Радиус r шара возьмем так, чтобы имело место неравенство

$$q^* \equiv g_3^* r(1+r) < 1. \tag{67}$$

Далее, предположим, что внешние силы, действующие на оболочку таковы, что выполняется условие

$$\|F_3^*\|_{L_p} < (1 - q^*) r. \tag{68}$$

В этих условиях к уравнению (66) можно применить принцип сжатых отображений ([9], с. 146), согласно которому уравнение (66) в шаре $\|\rho_3\|_{L_p} < r$ имеет единственное решение $\rho_3 \in L_p(\Omega)$, $2 < p \leq 2 + \varepsilon$.

Зная ρ_3, по формуле (50) находим нормальное перемещение w_3. Затем по (42) определяем ρ и, подставляя ρ в (29), получаем тангенциальные перемещения w_1, w_2 и углы поворота ν_1, ν_2.

Таким образом, доказана основная

Теорема. *Пусть выполнены условия* (1)–(5) *и неравенства* (38), (49), (59), (64), (67), (68). *Тогда задача равновесия для пологих упругих анизотропных оболочек типа Тимошенко с жестко защемленными краями в шаре радиуса r пространства $W_p^{(2)}(\Omega)$, $2 < p \leq 2 + \varepsilon$, имеет единственное обобщенное решение $a = (w_1, w_2, w_3, \nu_1, \nu_2)$.*

В заключение остановимся на некоторых условиях разрешимости задачи. В первую очередь, рассмотрим условие (68), накладывающее ограничения на внешние силы, действующие на оболочку. Легко видеть, что F_3^* можно представить в виде $F_3^* = A(\widetilde{F}_3)$, где A — линейный ограниченный оператор в $L_p(\Omega)$, $p > 2$, относительно $\widetilde{F}_3 = 2F^3/(a_{11} + a_{22})$; a_{jj}, F^3 определены в (48). Поэтому при достаточно малых $\|\widetilde{F}_3\|_{L_p}$ условие (68) будет выполняться. В частности, (68) имеет место, если почти всюду в Ω $F^3 = 0$. В этом случае получим безмоментное напряженно-деформированное состояние. Таким образом, условие (68), вообще говоря, не означает малость компонент внешней нагрузки. Для иллюстрации выполнения других условий разрешимости задачи равновесия рассмотрим частный случай изотропной оболочки типа Тимошенко. Для этого случая имеем $D_0^{1111} = D_0^{2222} = 2hE/(1-\mu^2)$, $D_0^{1122} = 2hE\mu/(1-\mu^2)$, $D_0^{1212} = hE/(1+\mu)$, $D_0^{1313} = D_0^{2323} = k^2 Eh/(2(1+\mu))$,

$D_2^{1111} = D_2^{2222} = 2h^3E/(3(1-\mu^2))$, $D_2^{1122} = 2h^3E\mu/(3(1-\mu^2))$; $D_2^{1212} = h^3E/(3(1+\mu))$; $D_1^{ijkn} = 0$ $(i,j,k,n = \overline{1,3})$ и остальные $D_{0,2}^{ijkn}$ также равны нулю. Здесь E — модуль Юнга, μ — коэффициент Пуассона, k^2 — коэффициент сдвига. По формулам (11) непосредственно находим $a_{k,ij}^{nm} = 0$, $b_{ij}^{kn} = 0$, $k,i,j,n,m = 1,2$. Поэтому $q = 0$ и условие (38) выполняется. Так как $D_m^{\lambda 3\delta\mu} = 0$, $\lambda,\delta,\mu = 1,2$, $m = 0,1,2$, то из (58) получаем $p_3^0 = 0$, т.е. условие (59) также имеет место.

Литература

[1] Ворович И.И. *Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек* (Наука, М., 1989).

[2] Карчевский М.М. *Нелинейные задачи теории пластин и оболочек и их сеточные аппроксимации*, Изв. вузов. Матем., №10, 17–30 (1985).

[3] Карчевский М.М. *О разрешимости вариационных задач нелинейной теории пологих оболочек*, Дифференц. уравнения **27** (7), 1196–1203 (1991).

[4] Тимергалиев С.Н. *Теоремы существования в нелинейной теории тонких упругих оболочек*: Дис. ... д-ра ф.-м.н. (Казань, 2003).

[5] Тимергалиев С.Н. *К вопросу о разрешимости краевых задач нелинейной теории пологих оболочек типа Тимошенко*, Учен. зап. Казанск. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки **150** (1), 115–123 (2008).

[6] Галимов К.З. *Основы нелинейной теории тонких оболочек* (Изд-во Казанск. ун-та, Казань, 1975).

[7] Векуа И.Н. *Обобщенные аналитические функции* (Наука, М., 1988).

[8] Гахов Ф.Д. *Краевые задачи*, 2-е изд. (Физматгиз, М., 1963).

[9] Красносельский М.А. *Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений* (Гостехиздат, М., 1956).

С.Н. Тимергалиев

заведующий кафедрой прикладной математики,
Камская государственная инженерно-экономическая академия,
проспект Мира, д. 68/19, г. Набережные Челны, 423810,

e-mail: Samat_tim@mail.ru

S.N. Timergaliev

Head of the Chair of Applied Mathematics,
Kama State Engineering Economic Academy,
68/18 Mira Ave., Naberezhnye Chelny, 423810 Russia,

e-mail: Samat_tim@mail.ru