Казанский (Приволжский) федеральный университет
СУНЦ IT-лицей КФУ

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

Методическая библиотека

КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Специализированный учебный научный центр –
общеобразовательная школа-интернат IT-лицей

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие

КАЗАНЬ
2021

УДК 51(075)
ББК 22.1я7
А45

Печатается по рекомендации педагогического совета общеобразовательной школы-интерната «IT-лицей» Казанского (Приволжского) федерального университета (протокол № 2 от 15 октября 2021 г.)

Авторы:
Р.Ф. Ахвердиев, кандидат технических наук, учитель математики СУНЦ IT-лицей КФУ, доцент кафедры высшей математики КНИТУ
О.А. Слипченко, учитель математики высшей квалификационной категории СУНЦ IT-лицей КФУ
Д.Н. Бикмухаметова, кандидат технических наук, доцент кафедры высшей математики КНИТУ
А.Р. Миндубаева, кандидат педагогических наук, доцент кафедры высшей математики КНИТУ
Рецензенты:
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры специальной математики КНИТУ-КАИ **А.Ю. Погодина**;
кандидат технических наук, доцент кафедры математики Университета управления «ТИСБИ» **Л.Р. Пантелеева**

А45 **Алгебра и геометрия** [Электронный ресурс]: учебное пособие / Р.Ф. Ахвердиев, О.А. Слипченко, Д.Н. Бикмухаметова и др. – Электронные сетевые данные (1 файл: 1,01 МБ). – Казань: Издательство Казанского университета, 2021. – 62 с. – Системные требования: Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: https://kpfu.ru/portal/docs/F1010042248/Algebra.i.geometriya.pdf. – Загл. с титул. экрана.

ISBN 978-5-00130-538-5

Учебное пособие содержит теоретический материал, разобранные примеры, упражнения для самостоятельного решения по основным темам линейной алгебры. В нем содержатся основные сведения по теории определителей и матриц, систем линейных уравнений, векторной алгебре и аналитической геометрии.

Данное пособие может быть полезно школьникам для углубленного изучения дополнительных разделов математики, студентам, изучающим дисциплины «Алгебра», «Геометрия», «Высшая математика», а также учителям математики.

УДК 51(075)
ББК 22.1я7

ISBN 978-5-00130-538-5

Введение

Линейная алгебра – ветвь математики столь же древняя, как и сама математика.

В линейной алгебре изучаются объекты трех родов: матрицы, пространства и алгебраические формы. Теории этих объектов тесно связаны друг с другом. Матричная формулировка обычно наиболее удобна для вычислений. С другой стороны, в геометрии и механике большинство задач линейной алгебры возникает в виде задач об исследовании алгебраических форм. Тем не менее наиболее отчетливое понимание внутренних связей между различными задачами линейной алгебры достигается лишь при рассмотрении соответствующих линейных пространств, которые и являются поэтому главным объектом изучения линейной алгебры.

С точки зрения теории форм содержание линейной алгебры естественно распадается на теорию линейных, теорию квадратичных и теорию форм высших степеней. К собственно линейной алгебре обычно относят лишь теорию линейных и квадратичных форм.

Первоначальной задачей линейной алгебры можно считать задачу о решении систем уравнений со многими неизвестными.

Важность систем линейных уравнений особенно возросла после создания аналитической геометрии, позволившей свести к исследованию систем линейных уравнений все основные вопросы о расположении плоскостей и прямых в пространстве. Поиски общих формул решения системы n уравнений с n неизвестными уже в XVIII в. привели Лейбница и Крамера к понятию определителя. В XIX в., помимо алгебры и аналитической геометрии, определители проникают и в анализ в работах Остроградского, Якоби (функциональные определители), Вронского и др. Параллельно с этим в аналитической геометрии, теории чисел и особенно в теоретической механике все большую важность приобретала задача преобразования квадратичных форм линейными подстановками переменных. Эта же задача явилась одной из центральных и в разработке геометрических идей Лобачевского и Римана, приведшей к созданию учения о линейных многомерных пространствах. К концу XIX в. были созданы важнейшие разделы матричного исчисления: о нормальной форме матрицы линейного преобразования (Жордан), элементарных делителях (Вейерштрасс), парах квадратичных форм (Вейерштрасс, Кронекер), эрмитовых формах (Эрмит).

Знание основ линейной алгебры является обязательной частью математического образования инженеров и научных работников, признаком их математической культуры.

Также в пособии уделено большое внимание векторной алгебре и аналитической геометрии, разобрано большое количество примеров.

Данное пособие может быть полезно школьникам для углубленного изучения дополнительных разделов математики, а также студентам, изучающим дисциплины «Алгебра», «Геометрия», «Высшая математика». Иногда при решении задач единого государственного экзамена применение методов линейной и векторной алгебры сильно упрощает решение задачи. Пособие также будет полезно учителям математики при организации систематического повторения курса математики.

Алгебра матриц

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк одинаковой длины:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

В сокращенной записи: $A = (a_{ij})$, где a_{ij} – действительные числа, $i = 1, 2,\dots m$; $j = 1, 2,\dots n$ (кратко $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.). Произведение $m \times n$ называют размерностью матрицы.

Матрицы равны между собой, если равны все их соответствующие элементы.

Матрица, у которой число строк и столбцов равно, называется квадратной:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Упорядоченный набор элементов a_{11}, a_{22}, …, a_{nn} называется главной диагональю, в свою очередь, a_{1n}, a_{2n-1}, …, a_{n1} – побочной диагональю матрицы.

Матрица, все элементы которой, кроме элементов главной диагонали, равны нулю, называется диагональной.

Квадратная матрица, элементы которой удовлетворяют условию:

$$a_{ij} = \begin{cases} a_{ij} \neq 0, i = j \\ a_{ij} = 0, i \neq j, \end{cases}$$

называется диагональной, т. е. диагональная матрица имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны единице, называется единичной и обозначается буквой E:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix};$$

Матрица, у которой все элементы по одну сторону от главной диагонали равны нулю, называется треугольной.

Матрица, у которой все элементы равны нулю, называется нулевой и обозначается символом O:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Линейные операции над матрицами

Суммой матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одинаковых размерностей $m \times n$ называется матрица $C = (c_{ij})$ тех же размерностей, такая, что $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ для всех i и j:

$$C = A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, чтобы сложить матрицы A и B, надо сложить их элементы, стоящие на одинаковых местах.

Пример 1: $C = A + B$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$., $B = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 6 & 5 & -3 \end{pmatrix}$.

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 6 & 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 4 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}. = C.$$

Произведением матрицы A на число λ называется матрица $\lambda A = (\lambda a_{ij})$, получаемая умножением всех элементов матрицы A на число λ.

$$\lambda \mathrm{A} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Пример 2: если $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ и $\lambda = 5$, то $5A = \begin{pmatrix} 15 & 35 & -10 \\ 10 & 20 & 5 \end{pmatrix}$.

Разность матриц A и B можно определить равенством $A - B = A + (-1)B$.

Свойства операции сложения матриц и умножения на число

Пусть A, B, C – матрицы одинакового размера, α, β – действительные числа.

1. $A + B = B + A$;

2. $A+(B+C)=(A+B)+C$;

3. $A+0=A$;

4. $(\alpha+\beta)\cdot A=\alpha A+\beta A$;

5. $1\cdot A=A$;

6. $\alpha\cdot(A+B)=\alpha A+\alpha B$;

7. $(\alpha+\beta)\cdot A=\alpha A+\beta A$;

8. $\alpha\cdot(\beta A)=(\alpha\beta)\cdot A$;

Умножение матриц

Произведением матрицы $A=(a_{ij})$ размера $m\times k$ и прямоугольной матрицы $B=(b_{ij})$ размера $k\times n$ называется прямоугольная матрица $C=(c_{ij})$ размера $m\times n$, такая, что $c_{ij}=a_{i1}+b_{1j}+a_{i2}+b_{2j}+\ldots+a_{ik}+b_{kj}$; $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$.

Таким образом, элемент произведения матриц A и B, стоящий в i-ой строке и j-ом столбце, равен сумме произведений элементов i-ой строки первой матрицы A на соответствующие элементы j-ого столбца второй матрицы B, т. е.:

$$c_{ij}=(a_{i1}a_{i2}\ldots a_{ik})\begin{pmatrix} b_{1j}\\ b_{2j}\\ \vdots\\ b_{kj}\end{pmatrix}.$$

Произведение $C=AB$ определено, если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B.

Пример 3: $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6 & 7\\ 8 & 9\end{pmatrix}$.

$$AB=\begin{pmatrix}2\times6+3\times8 & 2\times7+3\times9\\ 4\times6+5\times8 & 4\times7+5\times9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}36 & 41\\ 64 & 73\end{pmatrix}.$$

$$BA=\begin{pmatrix}6\times2+7\times4 & 6\times3+7\times5\\ 8\times2+9\times4 & 8\times3+9\times5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}40 & 53\\ 52 & 69\end{pmatrix}.$$

$$AB\neq BA.$$

Пример 4: $A=\begin{pmatrix}5 & 1 & 4\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6 & 7\\ 8 & 9\\ -2 & -1\end{pmatrix}$.

$$AB=\begin{pmatrix}5\times6+1\times8+4\times(-2) & 5\times7+1\times9+4\times(-1)\\ 0\times6+2\times8+3\times(-2) & 0\times7+2\times9+3\times(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}30 & 40\\ 10 & 15\end{pmatrix}.$$

$$BA=\begin{pmatrix}6\times5+7\times0 & 6\times1+7\times2 & 6\times4+7\times3\\ 8\times5+9\times0 & 8\times1+9\times2 & 8\times4+9\times3\\ -2\times5+(-1)\times0 & -2\times1+(-1)\times2 & -2\times4+(-1)\times3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}30 & 20 & 45\\ 40 & 26 & 59\\ -10 & -4 & -11\end{pmatrix}.$$

$$AB\neq BA.$$

Таким образом, коммутативный (переместительный) закон умножения матриц, вообще говоря, не выполняется, т. е. $AB\neq BA$ В частном случае коммутативным законом обладает произведение любой квадратной матрицы A n-го порядка на единичную матрицу E такого же порядка, т.е. $AE=EA$.

Пример 5: $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 4 & 5\\ 6 & 7 & 8\end{pmatrix}$.

Для этих матриц произведение как AB,так и BA не существует.

Пример 6: $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 4\\ 6 & 1 & 5\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$.

$$AB=\begin{pmatrix}3\times(-2)+0\times6+1\times7 & 3\times0+0\times1+1\times8 & 3\times4+0\times5+1\times9\\ 1\times(-2)+2\times6+0\times7 & 1\times0+2\times1+0\times8 & 1\times4+2\times5+0\times9\end{pmatrix}.$$

Получим $AB=\begin{pmatrix}1 & 8 & 21\\ 10 & 2 & 14\end{pmatrix}$, BA – не существует.

Свойства умножения матриц

Пусть A, B, C – матрицы соответствующих размеров (т. е. произведения матриц определены), λ – действительное число. Тогда на основании определений операций и свойств действительных чисел имеют место следующие свойства:

1. $(AB)C = A(BC)$ – ассоциативность.

2. $(A+B)C = AC + BC$ – дистрибутивность.

3. $A(B+C) = AB + AC$ – дистрибутивность.

4. $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.

5. $EA = AE = A$, для квадратных матриц единичная матрица E играет роль единицы.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Проверьте свойство ассоциативности 1 для матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Задача 2. Проверьте свойство дистрибутивности 2 для матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Найти матрицу A^3, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Определители и их свойства

Рассмотрим квадратную матрицу второго порядка $A \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Определителем матрицы A называется число, которое может быть вычислено по правилу $\Delta \equiv \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$. Рассмотрим квадратную матрицу третьего порядка: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Определителем матрицы A называется число, которое может быть вычислено по правилу: $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$.

Определителем квадратной матрицы А = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ называется число, которое может быть вычислено по элементам матрицы по формуле: $\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{1k} M_{1k}$ где M_{1k} называется минором элемента a_{1k} и представляет собой определитель, получающийся из определителя $\det A$ вычеркиванием 1-й строки и k-го столбца, на пересечении которых находится этот элемент.

Свойства определителей:

1. Если поменять местами две строки определителя (два столбца), то получим новый определитель, равный исходному определителю, умноженному на –1.

2. Определитель, имеющий две равных строки (два равных столбца), равен нулю.

3. Если одну из строк определителя умножить на какое-либо число, то получится определитель, равный исходному, умноженному на это число.

4. Определитель транспонированной матрицы равен определителю исходной матрицы.

5. Если в определителе вместо любой строки записать сумму этой строки и любой другой строки, умноженной на некоторое число, то полученный новый определитель будет равен исходному.

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить определитель разложением по элементам: а) первой строки; б) третьей строки:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}.$$

Ответ: 15.

2. Найти алгебраическое дополнение: а) элемента 6; б) элемента 0 данной матрицы:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -7 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & 6 \\ -7 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: а) $A_{34} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 & -7 \\ 2 & 1 & 5 \\ -7 & 0 & 5 \end{vmatrix}$, б) $A_{42} = \begin{vmatrix} 3 & -7 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ -7 & 4 & 6 \end{vmatrix}$.

3. При каком значении α равны нулю следующие определители:

а) $\begin{vmatrix} 3-\alpha & 2 \\ 2 & -\alpha \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ -1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$,

в) $\begin{vmatrix} 3-\alpha & 0 & 0 \\ 2 & \alpha & 0 \\ 10 & -5 & 1 \end{vmatrix}$.

Ответ: а) $\alpha_1 = -1, \alpha_2 = 4$, б) $\alpha = -3$, в) $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 3$.

4. Используя свойства определителей, вычислить следующие определители:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 8 \\ 5 & 3 & 5 \end{vmatrix}$.

Ответ: –120.

б) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & -2 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

Ответ: 0.

в) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2+\alpha & 4-2\alpha & -3 \end{vmatrix}$.

Ответ: 0.

г) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 3\alpha \\ 2 & 1 & -1+\alpha \\ -3 & 4 & 1+4\alpha \end{vmatrix}$.

Ответ: –2.

5. Вычислить определители, приведя матрицу к треугольному виду (приведение матрицы к треугольному виду – такое преобразование, при котором все элементы, лежащие по одну сторону от главной диагонали, равны нулю):

а) $\begin{vmatrix} -2 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

Ответ: 110.

б) $\begin{vmatrix} -4 & 3 & 7 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & -8 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$.

Ответ: 140.

в) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 8 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

Ответ: 300.

г) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -10 \\ 0 & 1 & 3 & 17 \\ -2 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$.

Ответ: 16.

д) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

Ответ: –3.

е) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

Ответ: –8.

Вырожденные и не вырожденные матрицы

Матрица называется вырожденной, если ее определитель равен нулю, и невырожденной, если определитель матрицы отличен от нуля.

Пример 7: $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$, $|A|$ = 16 – 15 = 1 $\neq$ 0; А – невырожденная матрица.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$, $|A|$ = 12 – 12 = 0; А – вырожденная матрица.

Теорема. Произведение матриц есть вырожденная матрица тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей есть вырожденная матрица.

Операция умножения возможна, если количество столбцов первой матрицы равно количеству строк другой матрицы.

Матрица, полученная заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется матрицей, транспонированной к данной.

Вычисление обратной матрицы

Пусть $A = (a_{ij})$ – квадратная матрица с определителем, не равным нулю. Тогда существует обратная матрица A^{-1}, которая вычисляется по формуле:

$$\mathbf{A}^{-1} = (c_{ij}) = \left(\frac{A_{ji}}{\det \mathrm{A}} \right).$$

Последняя формула означает, что в i-й строке и j-м столбце обратной матрицы располагается алгебраическое дополнение элемента, стоящего в j-ой строке и в i-ом столбце исходной матрицы, деленное на определитель исходной матрицы.

Напомним здесь, что $A_{pq} = (-1)^{p+q} M_{pq}$, где M_{pq} называется минором элемента a_{pq} и представляет собой определитель, получающийся из определителя $det\ A$ вычеркиванием p-ой строки и q-го столбца, на пересечении которых находится этот элемент.

Пример 1:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \text{ detA} = 20 + 6 - 24 = 2;$$

$$\begin{aligned} &A_{11} = 20, \quad A_{12} = -9, \quad A_{13} = -15, \\ &A_{21} = -8, \quad A_{22} = 4, \quad A_{23} = 6, \\ &A_{31} = 2, \quad A_{32} = -1, \quad A_{33} = -1; \end{aligned}$$

Тогда обратная матрица имеет вид:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & -4 & 1 \\ -\frac{9}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{15}{2} & 3 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Еще раз подчеркнем, что обратная матрица существует только для квадратной матрицы с определителем, отличным от нуля.

Ранг матрицы

Рассмотрим матрицу A порядка $m \times n$: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

В матрице A минор порядка r называется базисным, если он не равен нулю, а все миноры порядка $r + 1$ и выше равны нулю, или не существуют вовсе, т. е. r совпадает с меньшим из чисел m или n.

Столбцы и строки матрицы, на которых стоит базисный минор, также называются базисными. В матрице может быть несколько различных базисных миноров, имеющих одинаковый порядок.

Порядок базисного минора матрицы называется **рангом** матрицы и обозначается $Rg\,A$.

Теорема. Наибольшее число линейно независимых столбцов в матрице равно числу линейно независимых строк.

Пример 2. Определить ранг матрицы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = 11 - 10 = 1 \neq 0 \Rightarrow RgA = 2.$$

Пример 3. Определить ранг матрицы.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0 \Rightarrow Rg = 2.$$

Пример 4. Определить ранг матрицы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0. \Rightarrow Rg = 2.$$

Системы линейных алгебраических уравнений

Система m уравнений с n неизвестными в общем виде записывается следующим образом:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \qquad (1)$$

где a_{ij} – коэффициенты, а b_i – постоянные. Решениями системы являются n чисел, которые при подстановке в систему превращают каждое ее уравнение в тождество.

Если система имеет хотя бы одно решение, то она называется совместной.

Если система не имеет ни одного решения, то она называется несовместной.

Система называется определенной, если она имеет только одно решение, и неопределенной, если более одного.

Для системы линейных уравнений вида (1) матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

называется матрицей системы, а матрица

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

называется расширенной матрицей системы.

Если $b_1, b_2, \dots, b_m = 0$, то система называется однородной. Однородная система всегда совместна.

Теорема Кронекера – Капелли. Система совместна (имеет хотя бы одно решение) тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы:

$RgA = RgA^*$.

Пример. Определить совместность системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 2 \\ 2x_1 + 11x_2 + 12x_3 + 25x_4 + 22x_5 = 4, \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 9 & 15 & 21 & 27 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = 1 - 6 = 5 \neq 0$, тогда $RgA = 2$.

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{pmatrix},$$ тогда рассмотрим определитель третьего порядка $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 11 & 4 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow RgA^* = 3$.

Ранг расширенной матрицы не совпадает с рангом матрицы, следовательно, система несовместна.

Пример. Определить совместность системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 = 4 \\ 7x_1 + 10x_2 = 12 \\ 5x_1 + 6x_2 = 8 \\ 3x_1 - 16x_2 = -5 \end{cases},$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \\ 7 & 10 \\ 5 & 6 \\ 3 & -16 \end{pmatrix}.$$

Вычислим определитель $\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 12 = 14 \neq 0$, тогда $RgA = 2$;

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 7 & 10 & 12 \\ 5 & 6 & 8 \\ 3 & -16 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 14 & 7 \\ 0 & 38 & 19 \\ 0 & 26 & 13 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

Вычислим определитель $\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$, тогда $RgA^* = 2$.

Ранг матрицы совпадает с рангом расширенной матрицы, следовательно, система совместна ($x_1 = 1$; $x_2 = 1/2$).

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить обратные матрицы:

а) $A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 5 & 3\end{pmatrix}$.

Ответ: $A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{17} & \frac{4}{17}\\ \frac{5}{17} & -\frac{1}{17}\end{pmatrix}$.

б) $A=\begin{pmatrix}11 & 4\\ 0 & 4\end{pmatrix}$.

Ответ: $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{11} & -\frac{1}{11}\\ 0 & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$.

в) $A=\begin{pmatrix}1 & 6 & 7\\ 0 & 4 & 11\\ 2 & 3 & 5\end{pmatrix}$.

Ответ: $A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{13}{63} & -\frac{1}{7} & \frac{38}{63}\\ \frac{22}{63} & -\frac{1}{7} & -\frac{11}{63}\\ -\frac{8}{63} & \frac{1}{7} & \frac{4}{63}\end{pmatrix}$.

г) $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 1 & 4 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

Ответ: $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1\\ 0 & 0 & 1\\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -5\end{pmatrix}$.

2. Вычислить ранг матрицы:

а) $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\\ 3 & 4\\ 4 & 3\end{pmatrix}$.

Ответ: 2.

б) $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$

Ответ: 3.

в) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \\ 26 & 27 & 28 & 29 & 30 \end{pmatrix}.$

Ответ: 2.

Правило Крамера для решения систем линейных алгебраических уравнений

Пусть мы имеем следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}.$$

Ее можно записать в матричной форме: $AX = B$,

где $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}; x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n. \end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n. \end{pmatrix}..$

Если определитель матрицы A не равен нулю, то система имеет единственное решение, определяемое формулами:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} \\ x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} \\ \ldots\ldots \\ x_n = \dfrac{\Delta_n}{\Delta} \end{cases}.$$

Здесь Δ_i – определитель n-го порядка, получающийся из определителя Δ матрицы A коэффициентов системы заменой i-го столбца столбцом свободных членов.

Пример 1: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \ \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}; \ x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; x_2 = \frac{\Delta_3}{\Delta}; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta};$$

Пример 2. Найти решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4 – 9) + (2 – 12) – (3 – 8) = –25 – 10 + 5 = –30;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 16 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (28 – 48) – (42 – 32) = –20 – 10 = –30.$$

$x_1 = \Delta_1/\Delta = 1;$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 4 & 16 & 2 \end{vmatrix} = 5(28 – 48) – (16 – 56) = –100 + 40 = –60.$$

$x_2 = \Delta_2/\Delta = 2;$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 14 \\ 4 & 3 & 16 \end{vmatrix} = 5(32 - 42) + (16 - 56) = -50 - 40 = -90.$$

$x_3 = \Delta_3/\Delta = 3.$

Метод Гаусса

В отличие от матричного метода и метода Крамера метод Гаусса может быть применен к системам линейных уравнений с произвольным числом уравнений и неизвестных. Суть метода заключается в последовательном исключении неизвестных.

Рассмотрим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Разделим обе части первого уравнения на $a_{11} \neq 0$, затем:

1) умножим на a_{21} и вычтем из второго уравнения;

2) умножим на a_{31} и вычтем из третьего уравнения и т. д.

В результате получаем:

$$\begin{cases} x_1 + d_{12}x_2 + \ldots + d_{1n}x_n = d_1 \\ d_{22}x_2 + d_{23}x_3 + \ldots + d_{2n}x_n = d_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d_{m2}x_2 + d_{m3} + \ldots + d_{mn}x_n = d_m \end{cases}, \quad \text{где } d_{1j} = a_{1j}/a_{11},\ j = 2, 3, \ldots, n + 1.$$

$d_{ij} = a_{ij} - a_{i1}d_{1j} \qquad i = 2, 3, \ldots, n; \qquad j = 2, 3, \ldots, n + 1.$

Далее повторяем эти же действия для второго уравнения системы, потом – для третьего и т. д.

Пример 3. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3, \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10. \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу системы. Далее преобразуем матрицу к треугольному виду, используя элементарные преобразования над строками:

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & -3 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 15 & -22 & 31 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Таким образом, исходная система может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 5x_2 - 7x_3 = 11 \\ -x_3 = -2 \end{cases},$$

откуда получаем: $x_3 = 2$, $x_2 = 5$, $x_1 = 1$.

Пример 4. Решить систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0, \\ x + 2y + 3z = 14, \\ 4x + 3y + 2z = 16. \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу системы:

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \\ 4 & 3 & 2 & 16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 4 & 3 & 2 & 16 \\ 5 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -5 & -10 & -40 \\ 0 & -11 & -16 & -70 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -5 & -10 & -40 \\ 0 & 0 & 6 & 18 \end{pmatrix}$$

Таким образом, исходная система может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 14, \\ -5y - 10z = 40, \\ 6z = 18, \end{cases}$$

откуда получаем: $z = 3$, $y = 2$, $x = 1$.

Полученный ответ совпадает с ответом, полученным для данной системы при решении методом Крамера.

Матричный метод решения систем линейных уравнений

Пусть дана система уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Составим матрицы: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Систему уравнений можно записать: $AX = B$.

Сделаем следующее преобразование: $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$.

Так как $A^{-1} \cdot A = E$, то $E \cdot X = A^{-1} \cdot B$.

Тогда $X = A^{-1} \cdot B$.

Для применения данного метода необходимо находить обратную матрицу, что может быть связано с вычислительными трудностями при решении систем высокого порядка.

Пример 5: $\begin{cases} 5x - y - z = 0, \\ x + 2y + 3z = 14, \\ 4x + 3y + 2z = 16. \end{cases}$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдем обратную матрицу A^{-1}:

$$\Delta = det\, A = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4 - 9) + 1(2 - 12) - 1(3 - 8) = -25 - 10 + 5 = -30.$$

Найдем метрические дополнения каждого элемента матрицы A:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5;\ M_{21} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1;\ M_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1;$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -10;\ M_{22} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 14;\ M_{32} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 16;$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5;\ M_{23} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 19;\ M_{33} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 11;$$

Найдем алгебраические дополнения для каждого элемента матрицы A:

$A_{11} = -5$; $A_{12} = -1$; $A_{13} = -1$;

$A_{21} = 10$; $A_{22} = 14$; $A_{23} = -16$;

$A_{31} = -5$; $A_{32} = -19$; $A_{33} = 11$;

Тогда обратная матрица имеет вид:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{30} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{10}{30} & -\frac{14}{30} & \frac{16}{30} \\ \frac{5}{30} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 25+10-5 & 5+14-19 & 5-16+11 \\ 5-20+15 & 1-28+57 & 1+32-33 \\ 20-30+10 & 4-42+38 & 4+48-22 \end{pmatrix} = E.$$

Находим матрицу X:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}0 + \frac{14}{30} + \frac{16}{30} \\ -\frac{1}{3}0 - \frac{98}{15} + \frac{128}{15} \\ \frac{1}{6}0 + \frac{266}{30} - \frac{176}{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.

Полученный ответ совпадает с ответом, полученным для данной системы при решении методами Крамера и Гаусса.

Задачи для самостоятельного решения

Решите следующие системы линейных алгебраических уравнений, используя методы Крамера, Гаусса и матричный метод:

1) $\begin{cases} 2x-4y+3z=1, \\ x-2y+4z=3, \\ 3x-y+5z=2. \end{cases}$

Ответ: {–1; 0; 1}.

2) $\begin{cases} 2x-y+z=2, \\ 3x+2y+2z=-2, \\ x-2y+z=1. \end{cases}$

Ответ: {2; –1; –3}.

3) $\begin{cases} 2x-y-z=1, \\ x+2y+3z=5, \\ x+3y+4z=6. \end{cases}$

Ответ: {1; –1; 2}.

4) $\begin{cases} 2x-4y+9z=28, \\ 7x+3y-6z=-1, \\ 7x+9y-9z=5. \end{cases}$

Ответ: {2; 3; 4}.

5) $\begin{cases} x+2y-z=1, \\ -3x+y+2z=0, \\ x+4y+3z=2. \end{cases}$

Ответ: {1/6; 13/30; 1/30}.

6) $\begin{cases} x+2y-z=2, \\ 2x-3y+2z=2, \\ 3x+y+z=8. \end{cases}$

Ответ: {1; 2; 3}.

Введение в векторную алгебру

Вектором называется направленный отрезок прямой. Вектор $\bar{a}=\overline{AB}$ определяется начальной точкой *A* и конечной точкой *B*. Длиной (модулем) $|\bar{a}|$ вектора $\overline{\mathbf{AB}}$ называется длина отрезка *AB*. Если $|\bar{a}|=1$, то вектор $|\bar{a}|$ называется единичным.

Два вектора называются коллинеарными, если они лежат на одной или на параллельных прямых.

Три вектора называются компланарными, если они лежат в одной плоскости или параллельны одной и той же плоскости.

Тройка векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ называется правой, если кратчайший поворот от $\bar{a}$ к $\bar{b}$ виден при наблюдении с конца вектора $\bar{\mathbf{c}}$ совершаемым против часовой стрелки, и левой – если по часовой стрелке.

Координатами a_x, a_y, a_z вектора $\bar{a}$ называются проекции этого вектора на оси Оx, Оy, Оz прямоугольной декартовой системы координат в пространстве. В этом случае пишут: $\bar{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$.

Базисными ортами называются единичные векторы $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, направленные соответственно по координатным осям Оx, Оy, Оz. Координаты вектора являются коэффициентами его разложения по ортам: $\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}$.

Если известны координаты точек A (x_1, y_1, z_1) и B (x_2, y_2, z_2), то вектор $\overline{AB} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$.

При сложении (вычитании) векторов их соответствующие координаты складываются (вычитаются):

$$\bar{a} \pm \bar{b} = \{a_x \pm b_x; a_y \pm b_y; a_z \pm b_z\}.$$

При умножении вектора на число $\boldsymbol{\lambda}$ его координаты умножаются на это число:

$$\lambda \bar{a} = \{\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z\}.$$

Длина вектора $\bar{\mathbf{a}}$ вычисляется по формуле:

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Пусть α, β, γ – углы, которые вектор $\bar{\mathbf{a}}$ составляет с координатными осями Оx, Оy, Оz. Косинусы этих углов, т. е. cosα, cosβ, cosγ называются направляющими косинусами вектора $\bar{\mathbf{a}}$. Имеют место соотношения:

$$a_x = |\bar{a}| \cos\alpha, \quad a_y = |\bar{a}| \cos\beta, \quad a_z = |\bar{a}| \cos\gamma,$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Условием коллинеарности двух векторов – $\overline{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ и $\overline{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$ – является пропорциональность их одноименных координат: $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$.

Задания:

1. Вычислить модуль вектора $\overline{a} = \{8; -4; -1\}$.

Решение. По формуле вычисления модуля вектора найдем:

$|\overline{a}| = \sqrt{8^2 + (-4)^2 + (-1)^2} = \sqrt{64 + 16 + 1} = 9.$

2. Найти длину вектора $\overline{AB}$, если даны точки A (1, 3, 5) и B (7, 5, 8).

Решение. По координатам точек A и B найдем вектор $\overline{AB} = \{7-1; 5-3; 8-5\} = \{6; 2; 3\}$.

Тогда $|\overline{AB}| = \sqrt{6^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{49} = 7$.

3. Даны векторы $\overline{a} = \{1; 3; -2\}$ и $\overline{b} = \{2; -4; 5\}$. Найти вектор $3\overline{a} + 2\overline{b}$.

Решение. Так как при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число, то:

$3\overline{a} = \{3; 9; -6\}, \qquad 2\overline{b} = \{4; -8; 10\}.$

Далее при сложении векторов их соответствующие координаты складываются, следовательно:

$3\overline{a} + 2\overline{b} = \{3+4; 9-8; -6+10\} = \{7; 1; 4\}.$

4. Вектор $\mathbf{a}$ образует с координатными осями Оx, Оy, Оz соответственно углы $\alpha = 120^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 60^\circ$. Найти проекции вектора $\mathbf{a}$ на координатные оси, если $|\overline{a}| = 6$.

Решение. Используем соотношения, связывающие координаты вектора с направляющими косинусами:

$a_x = 6\cos 120^\circ = -3,\ a_y = 6\cos 45^\circ = 3\sqrt{2},\ a_z = 6\cos 60^\circ = 3.$

5. Вычислить направляющие косинусы вектора $\overline{a} = \{3; 2; -6\}$.

Решение. Предварительно вычислим модуль вектора $\overline{a}$:

$|\overline{a}| = \sqrt{3^2 + 2^2 + (-6)^2} = 7.$

Далее из соотношений для направляющих косинусов окончательно найдем:

$$\cos\alpha = \frac{3}{7}, \qquad \cos\beta = \frac{2}{7}, \qquad \cos\gamma = -\frac{6}{7}.$$

6. Может ли вектор составлять с координатными осями углы α = 30°, β = 60°, γ = 90°?

Решение. Может, так как

$$\cos^2 30^o + \cos^2 60^o + \cos^2 90^o = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \equiv 1.$$

7. Может ли вектор составлять с координатными осями углы α = 30°, β = 45°, γ = 60°?

Решение. Не может, так как

$$\cos^2 30^o + \cos^2 45^o + \cos^2 60^o = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{2} \neq 1.$$

8. Даны точки *A* (2, 1, 0), *B* (0, 4, –3), *C* (–2, 3, –5) и *D* (2, –3, 1). Будут ли векторы $\overline{\mathbf{AB}}$ и $\overline{CD}$ коллинеарными?

Решение. Найдем координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$:

$$\overline{AB} = \{-2; 3; -3\}, \quad \overline{CD} = \{4; -6; 6\}.$$

Координаты этих векторов пропорциональны: $\frac{-2}{4} = \frac{3}{-6} = \frac{-3}{6}$; следовательно, векторы коллинеарны.

9. Найти значения **α** и **β**, при которых векторы $\bar{a} = \{-3; \alpha; 9\}$ и $\bar{b} = \{2; -8; \beta\}$ являются коллинеарными.

Решение. Условием коллинеарности векторов $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ будет $\frac{-3}{2} = \frac{\alpha}{-8} = \frac{9}{\beta}$.

Отсюда получим $\frac{-3}{2} = \frac{\alpha}{-8} \;\Rightarrow\; 2\alpha = 24 \;\Rightarrow\; \alpha = 12,$

$$\frac{-3}{2} = \frac{9}{\beta} \;\Rightarrow\; -3\beta = 18 \;\Rightarrow\; \beta = -6.$$

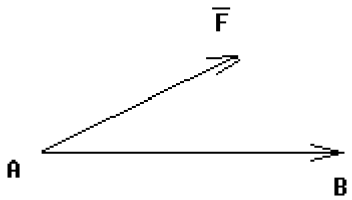
Скалярное произведение

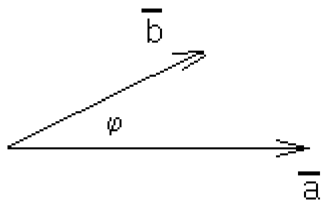
Скалярным произведением $\overline{a}\cdot\overline{b}$ двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется число, равное произведению этих векторов на косинус угла между ними: $\overline{a}\cdot\overline{b}=|\overline{a}||\overline{b}|\cos\phi$.

Свойства:

1°. $\overline{a}\cdot\overline{b}=\overline{b}\cdot\overline{a}$.

2°. $(\lambda\overline{a})\cdot\overline{b}=\lambda(\overline{a}\cdot\overline{b})$.





3°. $\overline{a}\cdot(\overline{b}+\overline{c})=\overline{a}\cdot\overline{b}+\overline{a}\cdot\overline{c}$.

4°. $\overline{a}^2=|\overline{a}|^2$.

5°. $\overline{a}\perp\overline{b}\quad\Leftrightarrow\quad\overline{a}\cdot\overline{b}=0$.

Работа **E**, производимая силой $\overline{\mathbf{F}}$ на перемещении $\overline{\mathbf{AB}}$, определяется через скалярное произведение равенством:

$$E=\overline{F}\cdot\overline{AB}.$$

Проекция одного из векторов $\overline{\mathbf{b}}$ на другой $\overline{\mathbf{a}}$ определяется формулой:

$$np_{\overline{a}}\overline{b}=\frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}|}.$$

Если векторы $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$ заданы своими координатами: $\overline{a}=\{a_x;a_y;a_z\}$, $\overline{b}=\{b_x;b_y;b_z\}$,

то их скалярное произведение находится по формуле $\overline{a}\cdot\overline{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$.

Задания:

1. Вычислить скалярное произведение $\overline{a}\cdot\overline{b}$, если $|\overline{a}|=3, |\overline{b}|=4$, а угол между векторами равен 60°.

Решение. По определению скалярного произведения найдем:

$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}| \cos 60^{\circ} = 3 \cdot 4 \cdot 0.5 = 6$.

2. Даны векторы $\bar{a} = \{2; -3; 4\}$ и $\bar{b} = \{3; -5; -5\}$. Вычислить $\bar{a} \cdot \bar{b}$.

Решение. По формуле вычисления скалярного произведения через координаты векторов найдем:

$\bar{a} \cdot \bar{b} = 2 \cdot 3 + (-3) \cdot (-5) + 4 \cdot (-5) = 6 + 15 - 20 = 1$.

3. Вычислить косинус угла, образованного векторами $\bar{a} = \{4; 2; -4\}$ и $\bar{b} = \{3; 6; 2\}$.

Решение. Предварительно вычислим модули векторов:

$|\bar{a}| = \sqrt{4^2 + 2^2 + (-4)^2} = \sqrt{36} = 6$,

$|\bar{b}| = \sqrt{3^2 + 6^2 + 2^2} = \sqrt{49} = 7$,

и их скалярное произведение:

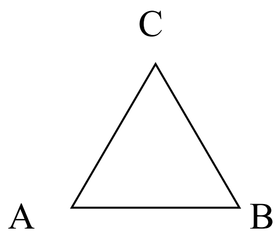
$\bar{a} \cdot \bar{b} = 4 \cdot 3 + 2 \cdot 6 + (-4) \cdot 2 = 16$.

Косинус угла между векторами **a** и **b** вычислим в соответствии с определением скалярного произведения в виде:

$$\cos \phi = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|} = \frac{16}{6 \cdot 7} = \frac{8}{21}.$$

4. Найти угол ***C*** в треугольнике с вершинами в точках *A* (–1, –4, 0), *B* (–2, –2, –2) и *C* (–3, –3, 2).

Решение. Угол ***C*** – это угол между векторами $\bar{a} = \overline{CA} = \{2; -1; -2\}$ и $\bar{b} = \overline{CB} = \{1; 1; -4\}$:



$|\bar{a}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = 3$,

$|\bar{b}| = \sqrt{1 + 1 + (-4)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$,

$\bar{a} \cdot \bar{b} = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + (-2) \cdot (-4) = 9$,

$\cos C = \dfrac{9}{3 \cdot 3\sqrt{2}} \Rightarrow \angle C = \dfrac{\pi}{4}$.

5. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют угол φ = 60°. Найти длину вектора $\bar{c} = 2\bar{a} - 3\bar{b}$, если $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 1$.

Решение. Согласно свойству 4° скалярного произведения квадрат длины вектора $|\mathbf{c}|^2$ равен его скалярному квадрату $\bar{\mathbf{c}}^2$. Предварительно вычислим

$\bar{a}^2 = 2^2 = 4, \quad \bar{b}^2 = 1, \quad \bar{a} \cdot \bar{b} = 2 \cdot 1 \cdot \cos 60^{\circ} = 1$.

Тогда $|\bar{c}|^2 = \bar{c}^2 = \left(2\bar{a} - 3\bar{b}\right)^2 = 4\bar{a}^2 - 12\bar{a} \cdot \bar{b} + 9\bar{b}^2 = 16 - 12 + 9 = 13$,

$|\bar{c}| = \sqrt{13}$.

6. Найти скалярное произведение $\left(3\bar{a} - 5\bar{b}\right) \cdot \left(2\bar{a} + 7\bar{b}\right)$, если $|\bar{a}| = 3, |\bar{b}| = 1, \bar{a} \perp \bar{b}$.

Решение. Согласно свойствам 1°–5° найдем

$$\left(3\bar{a} - 5\bar{b}\right) \cdot \left(2\bar{a} + 7\bar{b}\right) = 6\bar{a}^2 + 11\bar{a} \cdot \bar{b} - 35\bar{b}^2 =$$
$$= 6 \cdot 3^2 + 0 - 35 \cdot 1^2 = 54 - 35 = 19$$

7. При каком значении $\boldsymbol{\alpha}$ векторы $\bar{a} = \alpha\bar{i} - 5\bar{j} - 3\bar{k}$ и $\bar{b} = 2\bar{i} + 3\bar{j} - \alpha\bar{k}$ будут взаимно перпендикулярны?

Решение. Условием перпендикулярности двух векторов является равенство нулю их скалярного произведения (свойство 5°):

$\bar{a} \cdot \bar{b} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha \cdot 2 + (-5) \cdot 3 + (-3) \cdot (-\alpha) = 0 \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad 2\alpha - 15 + 3\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad 5\alpha = 15 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 3$.

8. Вычислить проекцию вектора $\bar{b} = \{5; 2; 5\}$ на направление вектора $\bar{a} = \{2; -1; 2\}$.

Решение. Предварительно вычислив

$\bar{a} \cdot \bar{b} = 2 \cdot 5 - 1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 = 18$,

$|\bar{a}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = 3$,

найдем

$$np_{\bar{a}}\bar{b} = \frac{18}{3} = 6.$$

9. Даны три вектора: $\bar{a} = \{1; -3; 4\}$, $\bar{b} = \{3; -4; 2\}$ и $\bar{c} = \{-1; 1; 4\}$. Вычислить проекцию вектора $\bar{\mathbf{a}}$ на вектор $\bar{b} + \bar{c}$.

Решение. Предварительно найдем

$\bar{b} + \bar{c} = \{2; -3; 6\}$,

$\left|\overline{b}+\overline{c}\right|=\sqrt{2^2+(-3)^2+6^2}=7$,

$\overline{a}\cdot\left(\overline{b}+\overline{c}\right)=1\cdot 2+(-3)\cdot(-3)+4\cdot 6=35$.

Тогда

$$np_{\overline{b}+\overline{c}}\overline{a}=\frac{\overline{a}\cdot\left(\overline{b}+\overline{c}\right)}{\left|\overline{b}+\overline{c}\right|}=\frac{35}{7}=5 .$$

10. Найти работу силы $\overline{F}=\{1;-2;6\}$, если точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из точки A (1, 2, –2) в точку B (4, 3, –1) .

Решение. Вычислив $\overline{AB}=\{3;1;1\}$, найдем работу:

$E=\overline{F}\cdot\overline{AB}=1\cdot 3-2\cdot 1+6\cdot 1=7$.

Векторное произведение

Векторным произведением вектора $\overline{\mathbf{a}}$ на вектор $\overline{\mathbf{b}}$ называется вектор, обозначаемый $\overline{\mathbf{a}}\times\overline{\mathbf{b}}$ и определяемый тремя условиями:

1) $\overline{\mathbf{a}}\times\overline{\mathbf{b}}\perp\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{a}\times\overline{b}\perp\overline{b}$;

2) $\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|=\left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|\sin\phi$, где $\boldsymbol{\varphi}$ – угол между $\overline{a}$ и $\overline{b}$;

3) $\overline{a},\overline{b},\overline{a}\times\overline{b}$ – правая тройка векторов.

Свойства:

1°. $\overline{a}\times\overline{b}=-\overline{b}\times\overline{a}$.

2°. $(\lambda\overline{a})\times\overline{b}=\lambda\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)$.

3°. $\overline{a}\times\left(\overline{b}+\overline{c}\right)=\overline{a}\times\overline{b}+\overline{a}\times\overline{c}$.

4°. $\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|=S$ – площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

5°. Условием коллинеарности двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ является равенство их векторного произведения нулю:

$\overline{a}\,//\,\overline{b}\Leftrightarrow\overline{a}\times\overline{b}=0$.

Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ заданы своими координатами:

$\overline{a}=\{a_x;a_y;a_z\}$, $\overline{b}=\{b_x;b_y;b_z\}$,

то их векторное произведение вычисляется по формуле:

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}.$$

Задания:

1. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют угол φ = π/6. Зная, что $|\bar{a}|=5, |\bar{b}|=4$, вычислить $|\bar{a}\times\bar{b}|$.

Решение. В соответствии с определением векторного произведения найдем

$$|\bar{a}\times\bar{b}|=|\bar{a}||\bar{b}|\sin\frac{\pi}{6}=5\cdot 4\cdot\frac{1}{2}=10.$$

2. Даны векторы $\bar{a}=\{5;4;2\}$ и $\bar{b}=\{3;1;1\}$. Найти векторное произведение $\bar{a}\times\bar{b}$.

Решение. По формуле вычисления векторного произведения через координаты векторов найдем

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 5 & 4 & 2\\ 3 & 1 & 1\end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix}4 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}5 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}5 & 4\\ 3 & 1\end{vmatrix}=$$

$$=(4-2)\bar{i}-(5-6)\bar{j}+(5-12)\bar{k}=2\bar{i}+\bar{j}-7\bar{k}=\{2;1;-7\}.$$

3. Даны точки A (1, 2, –1), B (3, 1, 2) и C (2, 5, 1). Найти векторное произведение $\overline{AB}\times\overline{AC}$.

Решение. Предварительно вычислив координаты векторов

$$\overline{AB}=\{2;-1;3\},\quad \overline{AC}=\{1;3;2\},$$

найдем

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & -1 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{vmatrix}=-11\bar{i}-\bar{j}+7\bar{k}=\{-11;-1;7\}.$$

4. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}=\{4;6;-3\}$ и $\bar{b}=\{1;2;0\}$.

Решение. Предварительно вычислим вектор

$$\overline{a}\times\overline{b}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 4 & 6 & -3\\ 1 & 2 & 0\end{vmatrix}=6\overline{i}-3\overline{j}+2\overline{k}=\{6;-3;2\}.$$

Согласно свойству 4° векторного произведения площадь параллелограмма будет равна длине этого вектора:

$$S_{пар}=\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|=\sqrt{6^2+(-3)^2+2^2}=7.$$

5. Найти синус угла между векторами $\overline{a}=\{1;4;8\}$ и $\overline{b}=\{2;-1;-2\}$.

Решение. Предварительно вычислим модули векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{a}\times\overline{b}$:

$$|\overline{a}|=\sqrt{1^2+4^2+8^2}=9,$$

$$\left|\overline{b}\right|=\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}=3,$$

$$\overline{a}\times\overline{b}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 1 & 4 & 8\\ 2 & -1 & -2\end{vmatrix}=18\overline{j}-9\overline{k}=\{0;18;-9\}=9\{0;2;-1\},$$

$$\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|=9\sqrt{0^2+2^2+(-1)^2}=9\sqrt{5}.$$

Синус угла между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ найдем в соответствии с определением векторного произведения как

$$\sin\phi=\frac{\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|}{|\overline{a}|\left|\overline{b}\right|}=\frac{9\sqrt{5}}{9\cdot 3}=\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

6. Вычислить площадь треугольника с вершинами A (–1, 2, –2), B (3, 2, 4) и C (1, 4, 7).

Решение. Площадь треугольника ABC равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$. Так как

$$\overline{AB}=\{4;0;6\},\qquad \overline{AC}=\{2;2;9\},$$

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 4 & 0 & 6\\ 2 & 2 & 9\end{vmatrix}=\{-12;-24;8\}=4\{-3;-6;2\},$$

то $S_{пар}=\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=4\sqrt{(-3)^2+(-6)^2+2^2}=28$,

$$S_{\Delta ABC}=14.$$

Смешанное произведение

Смешанным произведением $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ трех векторов $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$ называется число, равное векторному произведению $\bar{a} \times \bar{b}$, умноженному скалярно на вектор $\bar{\mathbf{c}}$, т. е. $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \left(\bar{a} \times \bar{b}\right) \cdot \bar{c}$.

Свойства:

1°. $\left(\bar{a} \times \bar{b}\right) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot \left(\bar{b} \times \bar{c}\right)$.

2°. $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = -\bar{b}\bar{a}\bar{c} = -\bar{c}\bar{b}\bar{a} = -\bar{a}\bar{c}\bar{b}$.

3°. $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \bar{b}\bar{c}\bar{a} = \bar{c}\bar{a}\bar{b} = \ldots$

4°. $\bar{a}\bar{b}\bar{c} > 0 \Leftrightarrow \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – правая тройка, $\bar{a}\bar{b}\bar{c} < 0 \Leftrightarrow \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – левая тройка.

5°. Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$, равен модулю смешанного произведения этих векторов: $V_{пар} = \left|\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right|$.

6°. $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = 0 \Leftrightarrow \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – компланарны.

Если векторы $\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}$ и $\bar{\mathbf{c}}$ заданы своими координатами:

$\bar{a} = \{a_x; a_y; a_z\}, \quad \bar{b} = \{b_x; b_y; b_z\}, \quad \bar{c} = \{c_x; c_y; c_z\},$

то их смешанное произведение вычисляется по формуле:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Задания:

1. Найти смешанное произведение $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ векторов $\bar{a} = \{1;1;4\}, \bar{b} = \{3;-1;2\}$ и $\bar{c} = \{5;2;-3\}$.

Решение. По формуле вычисления смешанного произведения через координаты векторов найдем

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 62.$$

2. Определить, какой тройкой (правой или левой) является тройка векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, если $\bar{a} = \{1;-3;-5\}, \bar{b} = \{2;1;3\}, \bar{c} = \{-3;4;1\}$.

Решение. Вычислим смешанное произведение векторов:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -5 \\ 2 & 1 & 3 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = -33.$$

Так как $\bar{a}\bar{b}\bar{c} < 0$, то $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ – левая тройка.

3. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a} = \{2;-4;1\}$, $\bar{b} = \{3;1;1\}$ и $\bar{c} = \{1;5;-2\}$.

Решение. Вычислим смешанное произведение векторов:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -28.$$

Согласно свойству 5° смешанного произведения найдем

$V_{пар} = |-28| = 28$.

4. Показать, что векторы $\bar{a} = \{7;-1;3\}$, $\bar{b} = \{2;5;-4\}$ и $\bar{c} = \{11;9;-5\}$ компланарны.

Решение. Согласно свойству 6° условием компланарности трех векторов является равенство их смешанного произведения нулю:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} 7 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \\ 11 & 9 & -5 \end{vmatrix} = 7\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 9 & -5 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 11 & -5 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 11 & 9 \end{vmatrix} =$$
$$= 77 + 34 - 111 = 0.$$

5. Доказать, что четыре точки – A (1, 1, 1), B (3, –2, –4), C (6, 2, –1) и D (2, 8, 9) – лежат в одной плоскости.

Решение. Достаточно показать компланарность векторов $\overline{AB} = \{2;-3;-5\}$, $\overline{AC} = \{5;1;-2\}$ и $\overline{AD} = \{1;7;8\}$:

$$\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 5 & 1 & -2 \\ 1 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} =$$
$$= 44 + 126 - 170 = 0.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Даны точки A (–7, 3, –6) и B (–3, –5, 2). Найдите длину вектора $\overline{AB}$.

Ответ: 12.

2. Даны векторы $\overline{a}=\{-3;4;-1\}, \overline{b}=\{-1;2;3\}$ и $\overline{c}=\{-4;-2;1\}$. Найти вектор $4\overline{a}+3\overline{b}-2\overline{c}$.

Ответ: $\{-7;26;3\}$.

3. Даны точки *A* (3, –4, 6) и *B* (1, 2, 3). Найти направляющие косинусы вектора $\overline{AB}$.

Ответ: $\frac{-2}{7},\frac{6}{7},\frac{-3}{7}$.

4. Может ли вектор составлять с координатными осями углы:

1) $\alpha=60^{\circ},\beta=90^{\circ},\gamma=120^{\circ}$;

2) $\alpha=45^{\circ},\beta=60^{\circ},\gamma=135^{\circ}$?

Ответ: 1) да; 2) нет.

5. Лежат ли точки *A* (3, 4, 1), *B* (1, 0, –1) и *C* (–2, –6, –4) на одной прямой?

Ответ: да.

6. Дан треугольник с вершинами *A* (–1, 7, 8), *B* (3, –3, 9) и *C* (10, –1, 1). Найти угол при вершине *A*.

Ответ: 45°.

7. При каком значении α векторы $\overline{a}=\{5;-3;\alpha\}$ и $\overline{b}=\{\alpha;7;2\}$ взаимно перпендикулярны?

Ответ: 3.

8. Даны векторы $\overline{a}=\{3;-6;-1\}, \overline{b}=\{1;4;-5\}$ и $\overline{c}=\{3;-4;12\}$. Найти проекцию вектора $\overline{a}+\overline{b}$ на вектор $\overline{\mathbf{c}}$.

Ответ: –4.

9. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}=\{3;0;-4\}$ и $\overline{b}=\{1;-2;2\}$.

Ответ: $10\sqrt{2}$.

10. Найти площадь треугольника с вершинами *A* (1, 2, 0), *B* (3, 0, –3) и *C* (5, 2, 6).

Ответ: 14.

11. Даны векторы $\overline{a}=\{1;-1;3\}, \overline{b}=\{-2;2;1\}$ и $\overline{c}=\{3;-2;5\}$. Вычислить $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$.

Ответ: –7.

12. Установить, компланарны ли векторы $\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}$, если:

1) $\bar{a} = \{2;3;-1\}, \bar{b} = \{1;-1;3\}, \bar{c} = \{1;9;-11\}$;

2) $\bar{a} = \{3;-2;1\}, \bar{b} = \{2;1;2\}, \bar{c} = \{3;-1;-2\}$.

Ответ: 1) да; 2) нет.

Уравнение прямой на плоскости

1. Общее уравнение прямой на плоскости имеет следующий вид:

$$Ax + By + C = 0, \tag{1}$$

где постоянные A и B не равны нулю одновременно, т. е. $A^2 + B^2 \neq 0$.

Частные случаи уравнения прямой

1. $C = 0$, $A \neq 0$, $B \neq 0$ – прямая проходит через начало координат.

2. $A = 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$ $\{By + C = 0\}$ – прямая параллельна оси Оx.

3. $B = 0$, $A \neq 0$, $C \neq 0$ $\{Ax + C = 0\}$ – прямая параллельна оси Оy.

4. $B = C = 0$, $A \neq 0$ – прямая совпадает с осью Оy.

5. $A = C = 0$, $B \neq 0$ – прямая совпадает с осью Оx.

Уравнение прямой по точке и вектору нормали

В декартовой прямоугольной системе координат вектор $\vec{n}$ с компонентами (A, B) перпендикулярен прямой, заданной уравнением $Ax + By + C = 0$.

Задача 1. Найти уравнение прямой, проходящей через точку A (1, 2) перпендикулярно вектору $\vec{n}$(3,-1).

Решение. Составим при $A = 3$ и $B = -1$ уравнение прямой: $3x - y + C = 0$. Для нахождения коэффициента C подставим в полученное выражение координаты заданной точки A. Получаем: $3 - 2 + C = 0$, следовательно $C = -1$. Искомое уравнение: $3x - y - 1 = 0$.

Каноническое уравнение прямой на плоскости

Пусть на плоскости заданы две точки – $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, тогда уравнение прямой, проходящей через эти точки, будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \tag{2}$$

Если какой-либо из знаменателей равен нулю, следует приравнять к нулю и соответствующий числитель.

Уравнение (2) называют каноническим уравнением прямой на плоскости.

Разрешая уравнение (2) относительно y, получим:

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1, \tag{3}$$

если $x_1 \neq x_2$, и $x = x_1$, если $x_1 = x_2$.

Дробь $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = k$ называется угловым коэффициентом прямой.

Задача 2. Найти уравнение прямой, проходящей через точки A (1, 2) и B (3, 4).

Решение. Применяя формулу (3), получаем:

$$y - 2 = \frac{4-2}{3-1}(x-1),$$
$$y - 2 = x - 1,$$
$$x - y + 1 = 0.$$

Уравнение прямой с заданным угловым коэффициентом

Если общее уравнение прямой $Ax + By + C = 0$ разрешить относительно y, получим:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Обозначим $-\frac{A}{B} = k,\quad -\frac{C}{B} = b,$ тогда уравнение будет иметь вид:

$$y = kx + b. \tag{4}$$

Уравнение (4) называется уравнением прямой с угловым коэффициентом k.

Уравнение прямой по точке и направляющему вектору

Каждый ненулевой вектор $\vec{a}$ (α_1, α_2), компоненты которого удовлетворяют условию $A\alpha_1 + B\alpha_2 = 0$, называется направляющим вектором прямой (1).

Задача 3. Найти уравнение прямой с направляющим вектором $\vec{a}$ (1, –1), проходящей через точку A (1, 2).

Решение. Уравнение искомой прямой будем искать в виде: $Ax + By + C = 0$. В соответствии с определением коэффициенты должны удовлетворять условиям: $1 \cdot A + (-1)B = 0$, т. е. $A = B$.

Тогда уравнение прямой будет иметь вид: $Ax + Ay + C = 0$, или $x + y + C / A = 0$. При $x = 1$, $y = 2$ получаем $C / A = -3$, т. е. искомое уравнение: $x + y - 3 = 0$.

Уравнение прямой в отрезках

Уравнение прямой вида

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (5)$$

называется уравнением прямой в отрезках, где a является координатой точки пересечения прямой с осью Оx, а b – координатой точки пересечения прямой с осью Оy.

Задача 4. Задано общее уравнение прямой $x - y + 1 = 0$. Найти уравнение этой прямой в отрезках.

Решение. $C = 1$, $-\frac{x}{1} + \frac{y}{1} = 1$, $a = -1$, $b = 1$.

Задача 5. Прямая отсекает на координатных осях равные положительные отрезки. Составить уравнение прямой, если площадь треугольника, образованного этими отрезками, равна 8 см^2.

Решение. Уравнение прямой имеет вид: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, $a = b = 1$, $ab / 2 = 8$, $a = 4, -4$, $a = -4$ не подходит по условию задачи. Следовательно $\frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1$, или $x + y - 4 = 0$.

Задача 6. Составить уравнение прямой, проходящей через точку A (–2, –3) и начало координат.

Решение. Уравнение прямой имеет вид: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$, где $x_1 = y_1 = 0$, $x_2 =$ –2; $y_2 = –3$. Следовательно $\frac{x-0}{-2-0}=\frac{y-0}{-3-0};\Rightarrow\frac{x}{-2}=\frac{y}{-3};\Rightarrow 3x-2y=0.$

Угол между прямыми на плоскости

Пусть заданы две прямые – $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$, тогда угол между этими прямыми находим по формуле:

$$tg\alpha=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2} \tag{6}$$

Две прямые параллельны, если $k_1 = k_2$.

Две прямые перпендикулярны, если $k_1 = –1 / k_2$.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно (параллельно) данной прямой

Прямая, проходящая через точку M_1 (x_1, y_1) и перпендикулярная к прямой $y = kx + b$, представляется уравнением $y-y_1=-\frac{1}{k}(x-x_1)$.

Прямая, проходящая через точку M_1 (x_1, y_1) и параллельная к прямой $y = kx + b$, представляется уравнением $y-y_1=k(x-x_1)$.

Расстояние от точки до прямой

Расстояние от точки M (x_0, y_0) до прямой $Ax + By + C = 0$ определяется по формуле:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \tag{7}$$

Задача 6. Определить угол между прямыми: $y = –3x + 7$, $y = 2x + 1$.

Решение. $k_1 = –3$, $k_2 = 2$, тогда tgφ $=\left|\frac{2-(-3)}{1-(-3)2}\right|=1$. Следовательно φ = π/4.

Задача 7. Показать, что прямые $3x - 5y + 7 = 0$ и $10x + 6y - 3 = 0$ перпендикулярны.

Решение. Находим: $k_1 = 3 / 5$, $k_2 = -5 / 3$, $k_1 k_2 = -1$, следовательно прямые перпендикулярны.

Задача 8. Даны вершины треугольника A (0, 1), B (6, 5), C (12, –1). Найти уравнение высоты, проведенной из вершины C.

Решение. Находим уравнение стороны AB:

$$\frac{x-0}{6-0} = \frac{y-1}{5-1} \Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{y-1}{4} \Rightarrow 4x = 6y - 6 \Rightarrow 2x - 3y + 3 = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{3}x + 1.$$

Искомое уравнение высоты имеет вид: $Ax + By + C = 0$, или $y = kx + b$, $k = -\frac{3}{2}$. Тогда $y = -\frac{3}{2}x + b$. Так как высота проходит через точку C, то ее координаты удовлетворяют данному уравнению: $-1 = -\frac{3}{2}12 + b$, откуда $b = 17$. Следовательно $y = -\frac{3}{2}x + 17$, или $3x + 2y - 34 = 0$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Составить уравнения прямых, проходящих через точку M (–3, –4) и параллельных осям координат.

Ответ: $x + 3 = 0$, $y + 4 = 0$.

Задача 2. Даны стороны треугольника: $x + y - 6 = 0$, $3x - 5y + 15 = 0$, $5x - 3y - 14 = 0$. Составить уравнения высот треугольника.

Ответ: $x - y = 0$; $5x + 3y - 26 = 0$; $3x + 5y - 26 = 0$.

Задача 3. Составить уравнение прямой, проходящей через точки M (1, 3) и N (2, 5).

Ответ: $y = 2x + 1$.

Задача 4. Составить уравнение прямой, параллельной данной прямой $y = 3x - 5$ и проходящей через точку M (6, 7).

Ответ: $y = 3x - 11$.

Задача 5. Составить уравнения прямых, отсекающих на оси Оx отрезок, равный 4, а на оси Оy – отрезок, равный 2.

Ответ: $x + 2y - 4 = 0$, $x - 2y + 4 = 0$, $x + 2y + 4 = 0$, $x - 2y - 4 = 0$.

Плоскость в пространстве

1. Общее уравнение плоскости в пространстве имеет вид:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{1}$$

где A, B, C, D – заданные постоянные; A, B, C – координаты вектора $\vec{\mathrm{N}}\{\mathrm{A,B.C}\}$, перпендикулярного плоскости (нормальный вектор плоскости); D – свободный член, причем $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Частные случаи уравнения плоскости:

1. $A = 0$, $By + Cz + D = 0$ – плоскость параллельна оси Оx.

2. $B = 0$, $Ax + Cz + D = 0$ – плоскость параллельна оси Оy.

3. $C = 0$, $Ax + By + D = 0$ – плоскость параллельна оси Оz.

4. $D = 0$, $Ax + By + Cz = 0$ – плоскость проходит через начало координат.

5. $A = 0$, $B = 0$, $Cz + D = 0$ – плоскость параллельна плоскости xОy.

6. $A = 0$, $C = 0$, $By + D = 0$ – плоскость параллельна плоскости xОz.

7. $B = 0$, $C = 0$, $Ax + D = 0$ – плоскость параллельна плоскости yОz.

8. $A = 0$, $D = 0$, $By + Cz = 0$ – плоскость проходит через ось Оx.

9. $B = 0$, $D = 0$, $Ax + Cz = 0$ – плоскость проходит через ось Оy.

10. $C = 0$, $D = 0$, $Ax + By = 0$ – плоскость проходит через ось Оz.

11. $A = B = D = 0$ – плоскость совпадает с плоскостью xОy ($z = 0$).

12. $A = C = D = 0$ – плоскость совпадает с плоскостью xОz ($y = 0$).

13. $B = C = D = 0$ – плоскость совпадает с плоскостью yОz (= 0).

2. Уравнение плоскости в отрезках имеет следующий вид:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \tag{2}$$

где a, b, c – отрезки, отсекаемые на осях Оx, Оy, Оz соответственно.

3. Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку M (x_0, y_0, z_0) перпендикулярно заданному вектору $\overline{N}\{A, B, C\}$, имеет вид:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \qquad (3)$$

4. Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки M_1 (x_1, y_1, z_1), M_2 (x_2, y_2, z_2) и M_3 (x_3, y_3, z_3), может быть записано виде:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ x_1-x_3 & y_1-y_3 & z_1-z_3 \end{vmatrix}=0 \qquad (4)$$

5. Угол φ между плоскостями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ определяется по формуле:

$$\cos\varphi=\pm\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}} \qquad (5)$$

Условие параллельности двух плоскостей:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}. \qquad (6)$$

Условие перпендикулярности двух плоскостей:

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0. \qquad (7)$$

6. Расстояние от точки M (x_0, y_0, z_0) до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ определяется по формуле:

$$\mathrm{d}=\frac{|\mathrm{A}x_0+\mathrm{B}y_0+\mathrm{C}z_0+\mathrm{D}|}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2}} \qquad (8)$$

Далее приведем примеры решения задач с применением формул (1) – (8).

Задача 1. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 (2, 3, 5) и перпендикулярной вектору $\overline{N}=4\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}$.

Решение. Воспользуемся формулой (3), тогда $4(x-2)+3(y-3)+2(z-5)=0$, $\Rightarrow$ $4x+3y+2z-27=0$.

Задача 2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 (2, 3, –1) и параллельной к плоскости $5x-3y+2z-10=0$.

Решение. За нормальный вектор плоскости можно взять вектор данной плоскости $5x-3y+2z-10=0$, т. е. вектор $\overline{N}\{5,-3,2\}$. Тогда, используя формулу (3), записываем уравнение искомой плоскости:

$5(x-2)-3(y-3)+2(z+1)=0$,

$5x - 3y + 2z + 1 = 0.$

Задача 3. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки M_1 (2, –1, 4) и M_2 (3, 2, –1) и перпендикулярной плоскости $x + y + 2z - 3 = 0$.

Решение. В качестве нормального вектора $\overline{N}$ искомой плоскости можно взять вектор, перпендикулярный вектору $\overline{M_1M_2}\{1,3,-5\}$ и нормальному вектору $\overline{N_0}\{1,1,2\}$ данной плоскости. Поэтому вектор $\overline{N}$ определяем следующим образом:

$$\overline{N} = \overline{M_1M_2} \times \overline{N_0} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 11\bar{i} - 7\bar{j} - 2\bar{k}.$$

Далее воспользуемся формулой (3) (записываем уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 или M_2 и перпендикулярной вектору $\overline{N}\{11,-7,-2\}$, и находим уравнение искомой плоскости, для определенности возьмем точку M_1):

$11(x - 2) - 7(y + 1) - 2(z - 4) = 0,$

$11x - 7y - 2z - 21 = 0.$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Даны точки M_1 (0, –1, 3) и M_2 (1, 3, 5). Написать уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 и перпендикулярной вектору $\overline{N} = \overline{M_2M_2}$.

Ответ: $x + 4y + 2z - 2 = 0.$

Задача 2. Найти угол между плоскостями $x - 2y + 2z - 8 = 0$ и $x + 2y - 2z + 4 = 0$.

Ответ: $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

Задача 3. Написать уравнение плоскости, проходящей через данную точку M_0 (–1, –1, 2) и перпендикулярной к плоскостям $x - 2y + z - 4 = 0$ и $x + 2y - 2z + 4 = 0$.

Ответ: $2x + 3y + 4z - 3 = 0.$

Задача 4. Написать уравнение плоскости, проходящей через заданные точки M_1 (–1, –2, 0), M_2 (1, 1, 2) и перпендикулярной к плоскости $x + 2y + 2z - 4 = 0$.

Ответ: $2x - 2y + z - 2 = 0.$

Задача 5. Найдите длину перпендикуляра, опущенного из точки M_0 (5, 1, –1) на плоскость $x - 2y + z - 1 = 0$.

Ответ: $d = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

Прямая в пространстве

1. Общее уравнение прямой. Прямая может быть задана как линия пересечения двух плоскостей:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \tag{9}$$

2. Каноническое уравнение прямой:

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}, \tag{10}$$

где x_1, y_1, z_1 – координаты точки M_0, через которую проходит прямая; m, n, p – координаты вектора $\bar{l}$, параллельного к прямой и называемого направляющим вектором.

3. Вводя параметр t, от канонических уравнений (10) можно перейти к параметрическим уравнениям прямой:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt. \end{cases} \tag{11}$$

4. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки – M_1 (x_1, y_1, z_1) и M_2 (x_2, y_2, z_2):

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \tag{12}$$

5. Угол между прямыми $\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}$ и $\frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$ определяется по формуле:

$$\cos\varphi = \pm\frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}. \tag{13}$$

Условие параллельности двух прямых:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Условие перпендикулярности двух прямых:

$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0.$

Далее приведем примеры решения задач с применением формул (9) – (13).

Задача 1. Написать уравнение прямой, проходящей через точку M_0 (4, 3, 0) и параллельной вектору $\bar{l}\{-1{,}1{,}4\}$.

Решение. Воспользуемся формулой (10) и запишем искомое уравнение прямой:

$$\frac{x-4}{-1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-0}{4}, \text{ т.е. } \frac{x-4}{-1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{4}.$$

Задача 2. Уравнение прямой $\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0 \\ 5x + 4y - z - 7 = 0 \end{cases}$ привести к каноническому виду.

Решение. Найдем направляющий вектор прямой. Этот вектор $\bar{l}$ должен быть перпендикулярен нормальным векторам $\overline{N_1}\{2,-1,3\}$ и $\overline{N_2}\{5,4,-1\}$ заданных плоскостей $2x - y + 3z - 1 = 0$ и $5x + 4y - z - 7 = 0$. Поэтому вектор определяем следующим образом:

$$\bar{l} = \overline{N_1} \times \overline{N_2} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -11\bar{i} + 17\bar{j} + 13\bar{k}.$$

Таким образом, за направляющий вектор прямой берем вектор $\bar{l}\{-11{,}17{,}13\}$. Точку, через которую проходит прямая, определяем следующим образом. Пусть $x = 0$ (можно положить либо $y = 0$, либо $z = 0$), тогда получаем систему:

$$\begin{cases} -y + 3z - 1 = 0 \\ 4y - z - 7 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим: $y = 2$, $z = 1$. Таким образом, получаем точку M_0 (0, 2, 1), через которую проходит прямая. Итак, используя формулу (10), записываем каноническое уравнение прямой:

$$\frac{x}{11} = \frac{y-2}{17} = \frac{z-1}{13}.$$

Задача 3. Написать каноническое уравнение прямой, проходящей через точки M_1 (3, –1, 4) и M_2 (1, 1, 2).

Решение. Воспользуемся формулой (12) и запишем: $\frac{x-3}{1-3}=\frac{y+1}{1+1}=\frac{z-4}{2-4}$ или $\frac{x-3}{-2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-4}{-2}$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Написать уравнение прямой, проходящей через точку M_0 (–1, 2, –2) и параллельной прямой $\begin{cases} x-y=2 \\ y-2z=1. \end{cases}$

Ответ: $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+2}{1}$.

Задача 2. Написать уравнение прямой, проходящей через точки M_1 (1, 2, 3) и M_2 (2, 6, –1), и найти ее направляющие косинусы.

Ответ: $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{-5}$, $\cos\alpha=\frac{3}{5\sqrt{2}}$, $\cos\beta=\frac{2\sqrt{2}}{5}$, $\cos\gamma=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Задача 3. Найти угол между прямыми $\begin{cases} x-y+z-4=0 \\ 2x+y-2z+5=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x+y+z-4=0 \\ 2x+3y-z-6=0 \end{cases}$

Ответ: $\varphi=\arccos\frac{11}{26}$.

Прямая и плоскость в пространстве

1. Угол φ между прямой $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ и плоскостью $Ax + By + Cz + D = 0$ определяется следующей формулой (для определенности берем острый угол):

$$\sin\varphi=\frac{\left|\overline{N}\bar{l}\right|}{\left|\overline{N}\right|\left|\bar{l}\right|}=\frac{\left|Am+Bn+Cp\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}. \tag{14}$$

Условие параллельности прямой и плоскости $\left(\overline{N}\perp\bar{l}\right)$:

$Am + Bn + Cp = 0$.

Условие перпендикулярности прямой и плоскости $\left(\overline{N} \parallel \bar{l}\right)$:

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}.$$

2. Точка пересечения прямой $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$ и плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ определяется следующим образом: уравнение прямой записывается в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt, \end{cases}$$

затем решается система уравнений:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ \begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt. \end{cases} \end{cases}$$

Решая систему, находим значение параметра $t = t'$ и, подставляя в уравнения $x = x_0 + mt$, $y = y_0 + nt$, $z = z_0 + pt$, определяем координаты точки пресечения $x' = x_0 + mt'$, $y' = y_0 + nt'$, $z' = z_0 + pt'$.

Возможны следующие случаи:

а) если $Am + Bn + Cp \neq 0$, то прямая пересекает плоскость;

б) если $Am + Bn + Cp = 0$, а $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$, то прямая параллельна плоскости;

в) если $Am + Bn + Cp = 0$, а $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, то прямая лежит в плоскости.

3. Условие нахождения двух прямых – $\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}$ и $\frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$ – на плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \\ m_1 & n_1 & p_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Приведем решения задач.

Задача 1. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 (3, 4, 0) и перпендикулярной к прямой $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{-4}$.

Решение. За нормальный вектор $\overline{N}$ искомой плоскости берем направляющий вектор прямой, т. е. $\overline{N}=\bar{l}\{1,2,-4\}$. Используя формулу (3), записываем уравнение искомой плоскости:

$1(x-3)+2(y-4)-4(z-0)=0,$

$x+2y-4z-11=0.$

Задача 2. Написать уравнение прямой, проходящей через точку M_0 (2, –3, 5) и перпендикулярной к плоскости $3x+4y-7z=0$.

Решение. За направляющий вектор $\bar{l}$ искомой прямой берем нормальный вектор плоскости, т. е. $\bar{l}=\overline{N}\{3,4,-7\}$. Далее, используя формулу (10), записываем уравнения искомой прямой:

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+3}{4}=\frac{z-5}{-7}.$$

Задача 3. Найти точку пересечения прямой $\begin{cases} x=2t-1 \\ y=t+2 \\ z=1-t, \end{cases}$ и плоскости $3x-2y+z=3$.

Решение. Решаем систему $\begin{cases} 3x-2y+z=3 \\ \begin{cases} x=2t-1 \\ y=t+2 \\ z=1-t, \end{cases} \end{cases}$

$3(2t-1)-2(t+2)+1(1-t)=3 \Rightarrow t=3.$

Таким образом $\begin{cases} x'=2*3-1=5 \\ y'=3+2=5 \\ z'=1-3=-2, \end{cases}$

т. е. M' (5, 5, –2).

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Показать, что прямая $\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-3}{3}$ параллельна плоскости $2x + y - z = 0$.

Ответ: $Am + Bn + Cp = 2*2 + (-1)*1 + 3*(-1) = 0$.

Задача 2. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+2}{2}$ и перпендикулярной плоскости $2x + 3y - z = 4$.

Ответ: $3x - 5y + z - 11 = 0$.

Задача 3. Найти проекцию точки M (3, 1, – 1) на плоскость $x + 2y + 3z - 30 = 0$.

Ответ: M' (5, 5, 5).

Задача 4. Найти точку пересечения прямой, проходящей через точки M_1 (0, 0, 4) и M_2 (2, 2, 0), с плоскостью $x + y - z = 0$. Определить также угол, образованный прямой и плоскостью.

Ответ: M (1, 1, 2), $\varphi = \arcsin\left(\frac{\sqrt{8}}{3}\right)$.

Задача 5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 (1, 1, – 5) и параллельной прямым $\frac{x-3}{-4}=\frac{y+5}{1}=\frac{z}{1}$ и $\frac{x}{1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{4}$.

Ответ: $7x + 15y + 13z + 43 = 0$.

Кривые второго порядка

Кривая второго порядка может быть задана следующим уравнением:

$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$.

Существует система координат (не обязательно декартова (прямоугольная)), в которой данное уравнение может быть представлено в одном из видов, приведенных ниже:

1. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ – уравнение эллипса.
2. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ – уравнение «мнимого» эллипса.

3. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ – уравнение гиперболы.

4. $a^2x^2 – c^2y^2 = 0$ – уравнение двух пересекающихся прямых.

5. $y^2 = 2px$ – уравнение параболы.

6. $y^2 – a^2 = 0$ – уравнение двух параллельных прямых.

7. $y^2 + a^2 = 0$ – уравнение двух «мнимых» параллельных прямых.

8. $y^2 = 0$ – пара совпадающих прямых.

9. $(x – a)^2 + (y – b)^2 = R^2$ – уравнение окружности.

Окружность

В окружности $(x – a)^2 + (y – b)^2 = R^2$ центр имеет координаты $(a; b)$.

Пример 1. Найти координаты центра и радиус окружности, если ее уравнение задано в виде:

$2x2 + 2y2 – 8x + 5y – 4 = 0.$

Решение. Для нахождения координат центра и радиуса окружности данное уравнение необходимо привести к виду, указанному выше, в п. 9. Для этого выделим полные квадраты:

$x^2 + y^2 – 4x + 2{,}5y – 2 = 0,$

$x^2 – 4x + 4 – 4 + y^2 + 2{,}5y + 25/16 – 25/16 – 2 = 0,$

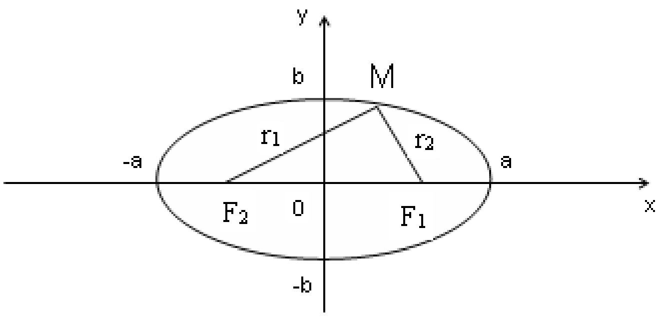
$(x – 2)2 + (y + 5/4)2 – 25/16 – 6 = 0,$

$(x – 2)2 + (y + 5/4)2 = 121/16.$

Отсюда находим O (2; – 5/4); $R = 11/4$.

Эллипс

Эллипсом называют геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух данных точек F_1 и F_2, называемых фокусами, есть величина постоянная и равная $2a$. Если фокальное расстояние $|F_1F_2| = 2c$, то $2c < 2a$.



F_1, F_2 – фокусы: $F_1 = (c;\ 0)$; $F_2 = (–c;\ 0)$; c – половина расстояния между фокусами; a – большая полуось; b – малая полуось.

Теорема. Фокусное расстояние и полуоси эллипса связаны соотношением $a^2 = b^2 + c^2$.

Доказательство. В случае если точка M находится на пересечении эллипса с вертикальной осью, $r_1 + r_2 = 2\sqrt{b^2 + c^2}$ (по теореме Пифагора). В случае если точка M находится на пересечении эллипса с горизонтальной осью, $r_1 + r_2 = a – c + a + c$. Так как по определению сумма $r_1 + r_2$ – постоянная величина, то, приравнивая, получаем $a^2 = b^2 + c^2$.

Форма эллипса определяется характеристикой, которая является отношением фокусного расстояния к большей оси и называется эксцентриситетом.

$E = c/a$. Так как $c < a$, то $e < 1$.

Величина $k = b/a$ называется коэффициентом сжатия эллипса, а величина $1 – k = (a – b)/a$ – сжатием эллипса.

Коэффициент сжатия и эксцентриситет связаны соотношением $k^2 = 1 – e^2$.

Если $a = b$ ($c = 0$, $e = 0$, фокусы сливаются), то эллипс превращается в окружность.

Если для точки M (x_1, y_1) выполняется условие $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} < 1$, то она находится внутри эллипса, а если $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} > 1$, то вне его.

Теорема. Для произвольной точки M (x, y), принадлежащей эллипсу, верны соотношения $r_1 = a – ex$, $r_2 = a + ex$.

Доказательство. Выше было показано, что $r_1 + r_2 = 2a$. Кроме того, из геометрических соображений можно записать:

$$r_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$
$$r_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$
$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a.$$

После возведения в квадрат и приведения подобных слагаемых мы получаем:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$4cx = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y} = a - \frac{c}{a}x = a - ex.$$

Аналогично доказывается, что $r_2 = a + ex$. Теорема доказана.

С эллипсом связаны две прямые, называемые директрисами. Их уравнения: $x = a/e$, $x = –a/e$.

Теорема. Для того чтобы точка лежала на эллипсе, необходимо и достаточно, чтобы отношение расстояния до фокуса к расстоянию до соответствующей директрисы равнялось эксцентриситету e.

Пример 2. Составить уравнение прямой, проходящей через левый фокус и нижнюю вершину эллипса, заданного уравнением: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Решение:

1. Координаты нижней вершины: $x = 0$, $y^2 = 16$, $y = –4$.

2. Координаты левого фокуса: $c^2 = a^2 – b^2 = 25 – 16 = 9$, $c = 3$, $F_2\,(–3; 0)$.

3. Уравнение прямой, проходящей через две точки:

$$\frac{x-0}{-3-0} = \frac{y+4}{0+4}; \qquad \frac{x}{-3} = \frac{y+4}{4};$$
$$4x = -3y - 12; \qquad 4x + 3y + 12 = 0$$

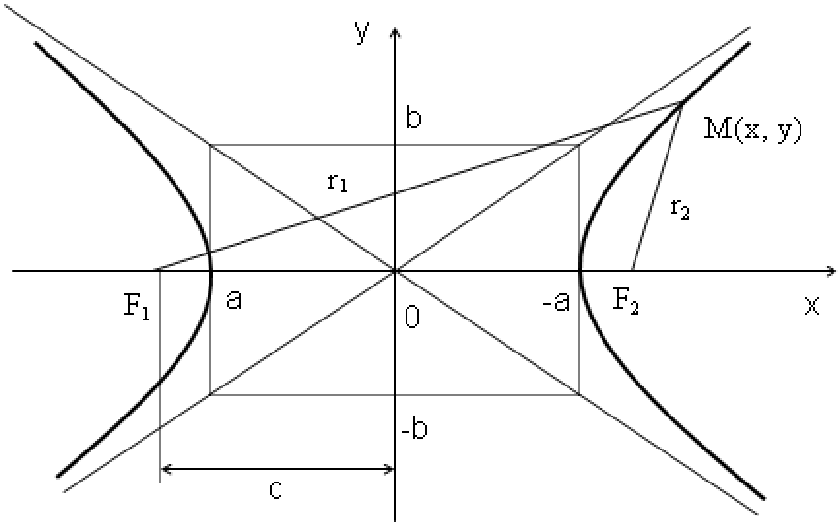
Пример 3. Составить уравнение эллипса, если его фокусы $F_1\,(0; 0)$, $F_2\,(1; 1)$, а большая ось равна 2.

Решение. Уравнение эллипса имеет вид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Расстояние между фокусами: $2c$ = $\sqrt{(1-0)^2+(1-0)^2}=\sqrt{2}$, таким образом, $a^2 - b^2 = c^2 = ½$, по условию $2a = 2$, следовательно $a = 1$, b = $\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{1-1/2}=\sqrt{2}/2$.

Уравнение эллипса имеет вид $\frac{x^2}{1^2}+\frac{y^2}{1/2}=1$.

Гипербола

Гиперболой называется множество точек плоскости, для которых модуль разности расстояний от двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.



По определению $|r_1 - r_2| = 2a$. F_1, F_2 – фокусы гиперболы. $F_1F_2 = 2c$.

Выберем на гиперболе произвольную точку $M\,(x, y)$. Тогда:

$$r_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2};r_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

$$(x+c)^2+y^2=4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=-4a^2+4xc$$

$$a^2(x-c)^2+a^2y^2=a^4-2a^2xc+x^2c^2$$

$$a^2x^2-2a^2xc+a^2c^2+a^2y^2=a^4-2a^2xc+x^2c^2$$

$$a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2-a^4-x^2c^2=0$$

$$-x^2(c^2-a^2)+a^2(c^2-a^2)+a^2y^2=0$$

$$x^2(c^2-a^2)-a^2y^2=a^2(c^2-a^2),$$

обозначим $c^2 - a^2 = b^2$ (геометрически эта величина – меньшая полуось):

$$a^2b^2=b^2x^2-a^2y^2,$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

В итоге мы получили каноническое уравнение гиперболы.

Гипербола симметрична относительно середины отрезка, соединяющего фокусы, и относительно осей координат.

Ось $2a$ называется действительной осью гиперболы.

Ось $2b$ называется мнимой осью гиперболы.

Гипербола имеет две асимптоты, уравнение которых: $y=\pm\frac{b}{a}x.$

Отношение $e = c/a$ ($e > 1$) называется эксцентриситетом гиперболы, где c – половина расстояния между фокусами, a – действительная полуось.

С учетом того, что $c^2 - a^2 = b^2$:

$$e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2}=\frac{b^2}{a^2},\ \frac{b}{a}=\sqrt{e^2-1}.$$

Если $a = b$, $e=\sqrt{2}$, то гипербола называется равнобочной (равносторонней).

Две прямые, перпендикулярные действительной оси гиперболы и расположенные симметрично относительно центра на расстоянии a/e от него, называются директрисами гиперболы. Их уравнение: $x=\pm\frac{a}{e}.$

Теорема. Если r – расстояние от произвольной точки M гиперболы до какого-либо фокуса, d – расстояние от той же точки до соответствующей этому фокусу директрисы, то отношение r/d – величина постоянная, равная эксцентриситету.

Пример 4. Найти уравнение гиперболы, вершины и фокусы которой находятся в соответствующих вершинах и фокусах эллипса $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{5}=1.$

Решение. Для эллипса: $c^2 = a^2 - b^2$. Для гиперболы: $c^2 = a^2 + b^2$. Уравнение гиперболы: $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{5} = 1$.

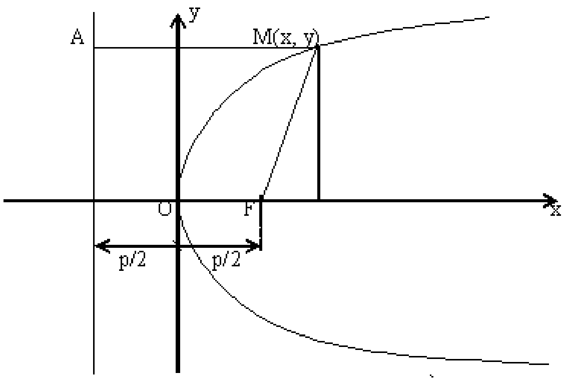
Пример 5. Составить уравнение гиперболы, если ее эксцентриситет равен 2, а фокусы совпадают с фокусами эллипса с уравнением $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Решение. Находим фокусное расстояние: $c^2 = 25 - 9 = 16$. Для гиперболы: $c^2 = a^2 + b^2 = 16$; $e = c/a = 2$; $c = 2a$; $c^2 = 4a^2$; $a^2 = 4$; $b^2 = 16 - 4 = 12$. Тогда уравнение гиперболы имеет вид $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$.

Парабола

Параболой называется множество точек плоскости, каждая из которых находится на одинаковом расстоянии от данной точки, называемой фокусом, и от данной прямой, называемой директрисой и не проходящей через фокус.

Расположим начало координат посередине между фокусом и директрисой.



Величина p (расстояние от фокуса до директрисы) называется параметром параболы. Выведем каноническое уравнение параболы, из геометрических соотношений: $AM = MF$; $AM = x + p/2$; $MF^2 = y^2 + (x - p/2)^2$; $(x + p/2)^2 = y^2 + (x - p/2)^2$; $x^2 + xp + p^2/4 = y^2 + x^2 - xp + p^2/4$. Тогда каноническое уравнение параболы будет иметь вид $y^2 = 2px$, а уравнение директрисы – $x = -p/2$.

Пример 5. На параболе $y^2 = 8x$ найти точку, расстояние которой от директрисы равно 4.

Решение. Из уравнения параболы получаем, что $p = 4$; $r = x + p/2 = 4$, следовательно $x = 2$, $y^2 = 16$, $y = \pm 4$. Искомые точки: $M_1(2; 4)$, $M_2(2; -4)$.

Пятичленное уравнение кривой второго порядка

Уравнение второй степени вида $Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ (не содержащее члена xy с произведением координат) называется пятичленным уравнением кривой второго порядка. Оно определяет на плоскости $x\text{O}y$ эллипс, гиперболу или параболу (с возможными случаями распада и вырождения этих кривых) с осями симметрии, параллельными осям координат, в зависимости от знака произведения коэффициентов A и C.

1. Пусть $AC > 0$, тогда определяемая этим уравнением кривая есть эллипс (действительный, мнимый или выродившийся в точку), при $A = C$ эллипс превращается в окружность.

2. Пусть $AC < 0$, тогда соответствующая кривая является гиперболой, которая может вырождаться в две пересекающиеся прямые, если левая часть уравнения распадается на произведение двух линейных множителей, $Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = (a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2)$.

3. Пусть $AC = 0$ (т. е. либо $A = 0$, либо $C = 0$), тогда уравнение определяет параболу, которая может вырождаться в две параллельные прямые (действительные различные, действительные слившиеся воедино или мнимые), если левая часть уравнения не содержит либо x, либо y (т. е. уравнение имеет вид $Ax^2 + 2Dx + F = 0$ или $Cy^2 + 2Ey + F = 0$).

Вид кривой и расположение на плоскости легко определяется преобразованием уравнения к виду $A(x - x_0)^2 + C(y - y_0)^2 = f$ (в случае если $AC > 0$ или $AC < 0$), по виду полученного уравнения обнаруживаются случаи распада или вырождения эллипса или гиперболы.

В случае невырожденных кривых переносом начала координат в точку $\text{O}_1(x_0; y_0)$ полученное уравнение эллипса или гиперболы можно привести к каноническому виду.

Пример 6. Привести к каноническому виду уравнение кривой:

$4x^2 + 9y^2 – 8x – 36y + 4 = 0.$

Решение. Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$4(x^2 – 2x) + 9(y^2 – 4y) + 4 = 0,$

$4(x^2 – 2x + 1 – 1) + 9(y^2 – 4y + 2 – 2) + 4 = 0,$

$4(x – 1)^2 + 9(y – 2)^2 = –4 + 4 + 36,$

$4(x – 1)^2 + 9(y – 2)^2 = 36.$

Произведем параллельный перенос осей координат, приняв за новое начало координат точку O'(1; 2). Воспользуемся формулами преобразования координат $x = x' + 1$, $y = y' + 2$.

Относительно новых осей уравнение кривой примет вид $4x'^2 + 9y'^2 = 36$ или $\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1.$

Таким образом, заданная кривая является эллипсом.

Задачи для самостоятельного решения

Привести к каноническому виду уравнения следующих кривых:

1. $x^2 + y^2 + 4x + 2y + 6 = 0.$

Ответ: $x'^2 + y'^2 = 1.$

2. $x^2 - y^2 + 4x + 6y + 1 = 0.$

Ответ: $\frac{x'^2}{6} - \frac{y'^2}{6} = 1.$

3. $x^2 - y^2 + 4x - 4y - 7 = 0.$

Ответ: $\frac{x'^2}{7} - \frac{y'^2}{7} = 1.$

4. $2x^2 + 4y^2 + 4x - 16y - 2 = 0.$

Ответ: $\frac{x'^2}{10} + \frac{y'^2}{5} = 1.$

5. $3x^2 - 4y^2 - 6x - 16y + 7 = 0.$

Ответ: $\frac{x'^2}{4} - \frac{y'^2}{3} = 1.$

6. $-3x^2+4y^2+6x-64y+13=0.$

Ответ: $-\frac{x'^2}{12}+\frac{y'^2}{16}=1.$

7. $3x^2-6x-16y+13=0.$

Ответ: $y'=\frac{3}{16}x'^2.$

8. $4y^2+x-16y=0.$

Ответ: $x'=4y'^2.$

Библиографический список

1. *Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах. – М.: Высшая школа, 1986. – Ч. 1. – 312 с.

2. *Гурский Е.Н. и др.* Руководство к решению задач по высшей математике: в 2 ч. – Минск: Вышэйшая школа, 1990. – 400 с.

3. *Артамонов В.А. и др.* Сборник задач по алгебре. – М: Физматлит, 2001. – 464 с.

4. *Беклемишев Д.В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 1998.

5. *Беклемишева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А.* Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. – М.: Наука, 1987.

6. *Бугров Я.С., Никольский С.М.* Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – М.: Наука, 1980.

7. Сборник задач по курсу высшей математики / под ред. Г.И. Кручковича. – М.: Высшая школа, 1973.

Электронное учебное издание
сетевого распространения

Ахвердиев Рустем Фахраддинович
Слипченко Оксана Александровна
Бикмухаметова Дильбар Наилевна
Миндубаева Алсу Рафаэлевна

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие

Корректор
Р. Р. Аубакиров

Подписано к использованию 25.11.2021.
Формат 60х84 1/16. Гарнитура «Times New Roman».
Усл. печ. л. 3,6. Заказ 156/11

Издательство Казанского университета

420008, г. Казань, ул. Профессора Нужина, 1/37
тел. (843) 233-73-59, 233-73-28