

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Казанский (Приволжский) федеральный университет»**

**ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ.Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО
КАФЕДРА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ**

Направление: 010901.65 – механика

Специализация: механика твердого деформируемого тела

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

(дипломная работа)

Исследование собственных колебаний зажатой пластинки

Работа завершена:

" ___ " _____ 2015 г. _____ (И.З. Ибрагимов)

Работа допущена к защите:

Научный руководитель

к.ф.-м.н., доцент

" ___ " _____ 2015 г. _____ (Д.В. Бережной)

Заведующий кафедрой

док. физ.-мат. наук, профессор

" ___ " _____ 2015г. _____ (Ю.Г. Коноплев)

Казань — 2015

Содержание

Введение.....	3
1. Вариационная постановка задач теории упругости	5
1.1. МКЭ как метод Ритца.....	6
2. Свободные колебания.....	11
3. Исследование собственных колебаний жестко зажатой.....	12
пластинки. Решение модельной задачи	
3.1. МКЭ Решение основной задачи.....	14
3.2 Исследование влияния длины пластины.....	15
на собственные колебания	
3.3 Исследование влияния распределенной нагрузки	16
на собственные колебания	
3.4 Исследование влияния длины основания конструкции.....	17
на собственные колебания	
3.5 Исследование влияния жесткости основания конструкции	18
на собственные колебания	
3.6 Исследование сходимости конечно элементного решения.....	19
3.7 Исследование влияние длины на соотношение форм колебаний...21	
3.8 Исследование влияния продольной силы.....	22
на собственные колебания	
Заключение.....	24
Список использованных источников и литературы.....	25
Приложение.....	26

Введение

При построении различных сооружений, надо учитывать различные на нее воздействия, многие из которых носят ярко выраженный динамический характер. Хотя при этом перемещения не являются большими, однако скорости и, главное, ускорения могут достигать величин, опасных для конструкций. К таким нагрузкам относятся сейсмические толчки, ветровые порывы, а также различные динамические воздействия технологического происхождения: движение поездов, кранов, неуравновешенных частей машин и механизмов.

Как известно из курса теоретической механики, ускоренные или замедленные движение масс вызывают инерционные силы, воздействующие на элементы конструкции так же, как и статические нагрузки. Особенностью динамических нагрузок является то, что в большинстве случаев они вызывают колебания, причем при периодическом повторении малых динамических воздействий в определенных условиях происходит накопления энергии системы. Постепенно увеличивается размах колебаний, а вместе с ним и интенсивности инерционных сил до очень больших значений. Это явление особенно опасно для сооружения, т. к. разрушения могут произойти при малых воздействиях и в конструкциях, достаточно прочных по отношению к обычным статическим нагрузкам. [4]

Поэтому, в настоящее время решение задач на собственные колебания является актуальной. И для их расчетов все больше начинают использовать персональные компьютеры (ПК) с помощью специальных проектно-вычислительных комплексов (ПВК).

Применяемые ПВК отличаются друг от друга методическими и сервисными разработками, но все они включают в себя статические и динамические расчеты конструкций и отдельных их частей, выполняемые методами строительной механики.

Алгоритмы соответствующих численных расчетов в основном строятся на методе конечных элементов (МКЭ), реализуемом в форме метода перемещений.

Для исследования собственных колебаний зажатой пластинки мы будем использовать ППП ANSYS, которая является ПВК, использующая МКЭ для расчетов.

1. Вариационная постановка задач теории упругости

Для единицы объема упругого тела, ориентированного вдоль произвольно выбранной декартовой системы координат x, y, z , удельная потенциальная энергия деформации записывается в виде

$$W = \frac{1}{2}(\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \sigma_{zz}\varepsilon_{zz} + \sigma_{xy}\varepsilon_{xy} + \sigma_{yz}\varepsilon_{yz} + \sigma_{zx}\varepsilon_{zx}). \quad (1)$$

Введем вектор деформаций $\{\varepsilon\}$ и вектор напряжений $\{\sigma\}$

$$\{\varepsilon\}^T = \{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{zx}\}, \quad (2)$$

$$\{\sigma\}^T = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}\}.$$

Тогда выражение W (1) можно записать

$$W = \frac{1}{2}\{\varepsilon\}^T\{\sigma\} = \frac{1}{2}\{\sigma\}^T\{\varepsilon\}. \quad (3)$$

Потенциальная энергия деформации, накопленная всем телом, определяется в виде интеграла по всему объему тела V

$$U = \iiint_V W dV = \frac{1}{2} \iiint_V \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dV. \quad (4)$$

Закон Гука запишем в матричном виде через матрицу упругости (матрицу упругих постоянных) $[D]$:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}. \quad (5)$$

Тогда выражение потенциальной энергии деформации можем записать

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} dV. \quad (6)$$

Работу внешних сил тоже запишем в матричном виде. Для этого введем вектор перемещений

$$\{\mathcal{G}\}^T = \{u, v, w\}, \quad (7)$$

где u, v, w - проекции вектора перемещений вдоль осей x, y, z , вектор массовых сил $\{Q\}$

$$\{Q\}^T = \{Q^{(x)}, Q^{(y)}, Q^{(z)}\} \quad (8)$$

и вектор поверхностных сил $\{P\}$, действующий на части поверхности S_σ ,

$$\{P\}^T = \{P^{(x)}, P^{(y)}, P^{(z)}\}. \quad (9)$$

Тогда работа внешних сил может быть записана в виде

$$A = \iiint_V \{Q\}^T \{\mathcal{G}\} dV + \iint_{S_\sigma} \{P\}^T \{\mathcal{G}\} dS. \quad (10)$$

Полная энергия (функционал Лагранжа) системы определяется как

$$L = U - A, \quad (11)$$

откуда, с учетом (6), (10), получим окончательное выражение

$$L = \frac{1}{2} \iiint_V \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} dV - \iiint_V \{Q\}^T \{\mathcal{G}\} dV - \iint_{S_\sigma} \{P\}^T \{\mathcal{G}\} dS. \quad (12)$$

В соответствии с общими теоремами механики, подлинное состояние равновесия тела отвечает минимуму полной энергии, т.е. задача сводится к поиску такого вектора $\{\mathcal{G}\}$, и, как следствие, векторов $\{\varepsilon\}$, $\{\sigma\}$ которые дают $\min L$. Уравнениями Эйлера этой вариационной задачи являются уравнения равновесия и статические граничные условия.

1.1. МКЭ как метод Ритца

Одним из главных моментов в методе Ритца минимизации функционала энергии является построение поля перемещений в виде разложений по некоторой системе координатных функций

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^N \begin{Bmatrix} \alpha_i^{(x)} H_i^{(x)}(x, y, z) \\ \alpha_i^{(y)} H_i^{(y)}(x, y, z) \\ \alpha_i^{(z)} H_i^{(z)}(x, y, z) \end{Bmatrix}, \quad (13)$$

которые должны удовлетворять кинематическим граничным условиям. В классическом методе Ритца эти функции $H_i(x, y, z)$ определяются во всей области и должны обладать свойством полноты. По сути дела (13) есть аппроксимация вектора перемещений $\{\mathcal{Q}\}$, определенная сразу во всей области. Здесь выявляется главная сложность поиска решения в виде (1.2.1), а именно: сложность построения функций $H_i(x, y, z)$ для областей неканонической формы. Чтобы исключить этих осложнений, было предложено разбивать исходную область на отдельные части, геометрически более простой структуры, внутри которых строить аппроксимации $\{\mathcal{Q}\}$ значительно проще. Однако здесь возникает новая трудность, связанная со стыковкой этих отдельных сегментов в плане выполнения условий непрерывности перемещений (уравнения равновесия удовлетворяются вариационно). Выходом было предложение принять в качестве неопределенных коэффициентов разложений $\{\alpha_i\}$ значений компонент перемещений $\{\mathcal{Q}_i\}$ в некоторой системе точек (узлов), как правило лежащих на границах стыкуемых элементов. В результате получается такая модификация метода Ритца, которая и называется метод конечных элементов (МКЭ).

Таким образом, МКЭ состоит из следующих основных этапов:

Разбиение исходной области на отдельные части (элементы) простой геометрической структуры (для двумерных задач это треугольники и четырехугольники).

На границах между отдельными элементами, а в случае необходимости и внутри элементов, вводятся точки (узлы), перемещения которых u_i, v_i, w_i далее считаются основными неизвестными.

Для отдельного конечного элемента строится выражение функционала энергии как функции перемещений узлов, принадлежащих только этому конечному элементу. Схема здесь следующая. Рассмотрим некоторый m —

ый элемент. Обозначим через вектор $\{q^m\}$ - вектор узловых перемещений m -го элемента

$$\{q^m\}^T = \{q_1^m, q_2^m, \dots, q_{12}^m\}. \quad (14)$$

Введем аппроксимации внутри элемента

$$\{\mathcal{Q}(x, y, z)\} = [U(x, y, z)]\{q^m\}, \quad (15)$$

где матрица $[U]$ содержит в себе некоторые функции, определенный вид которых будет рассмотрен далее. Однако следует сразу сказать, что ее элементами будут степенные функции, т.е. полиномы. По (15) можем вычислить вектор деформаций (14) в виде

$$\{\varepsilon\} = [B]\{q^m\}. \quad (16)$$

подставляя (15), (16) в (12), получим выражение энергии на элементе

$$\begin{aligned} L_m = & \frac{1}{2} \iiint_{V_m} \{q^m\}^T [B]^T [D] [B] \{q^m\} dV - \\ & - \iiint_{V_m} \{Q^m\}^T [U] \{q^m\} dV - \iint_{s_\sigma^m} \{P^m\}^T [U] \{q^m\} dS. \end{aligned} \quad (17)$$

Т.к. параметры $\{q^m\}$ суть постоянные на элементе, то (17) можем записать в виде

$$L_m = \frac{1}{2} \{q^m\}^T [K^m] \{q^m\} - \{P^m\}^T \{q^m\}, \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} [K^m] = & \iiint_{V_m} [B]^T [D] [B] dV, \\ \{P^m\} = & \iiint_{V_m} \{Q^m\}^T [U] \{q^m\} dV + \iint_{s_\sigma^m} \{P^m\}^T [U] \{q^m\} dS, \end{aligned} \quad (19)$$

$[K^m]$ - матрица жесткости элемента, $\{P^m\}$ - вектор узловых сил.

Строится функционал энергии для всего тела как сумма значений энергии по всем элементам. При этом считается, что перемещения узлов, принадлежащих разным элементам, одинаковы для всех прилегающих элементов. Физически это означает выполнение условий неразрывности поля перемещений во всей области тела. После выполнения операций сборки, получим

$$L = \sum_m L_m = \frac{1}{2} \{q\}^T [K] \{q\} - \{P\}^T \{q\}. \quad (20)$$

Здесь вектор $\{q\}$ включает в себя узловые перемещения всего тела, матрица $[K]$ называется матрицей жесткости всего тела и складывается из суммы матриц $[K^m]$, вектор $\{P\}$ - вектор внешних сил, состоящий из суммы поэлементных сил $\{P^m\}$ и заданных сосредоточенных нагрузок.

В соответствии со схемой Ритца необходимо найти такой вектор $\{q\}$, который дает минимум энергии \mathcal{E} . Как известно, необходимым и достаточным условием минимума полной энергии является равенство нулю ее первой вариации

$$\delta \mathcal{E} = \frac{1}{2} (\{\delta q\}^T [K] \{q\} + \{q\}^T [K] \{\delta q\}) - \{P\}^T \{\delta q\} = 0. \quad (21)$$

Откуда, в силу симметрии матрицы $[K]$, получим алгебраическую задачу

$$[K] \{q\} = \{P\}. \quad (22)$$

Решая эту систему, находим вектор $\{q\}$, который однозначно устанавливает поле перемещений и позволяет найти распределение напряжений в теле, что и является конечной целью задач теории упругости.

Такова в общих чертах схема решения задач теории упругости МКЭ в вариационном варианте. Очевидно, что ее можно считать разновидностью схемы Ритца, т.к. идеология их полностью совпадает и заключается в задании

аппроксимации перемещений внутри тела, параметры которой определяются из условия минимума энергии. Различие МКЭ и метода Ритца состоит в особенности задания аппроксимации, а именно: в МКЭ она определяется поэлементно и неизвестными параметрами являются узловые перемещения, тогда как в классическом методе Ритца неизвестные параметры $\{\alpha\}$ не имеют ясного физического смысла. [1]

3. Свободные колебания

Собственными или свободными колебаниями называется движение при отсутствии внешних сил и сил демпфирования. Система уравнений, которые описывают такие движения, выглядит

$$[M] \left\{ \frac{d^2 q(t)}{dt^2} \right\} + [K] \{q(t)\} = 0. \quad (23)$$

Где $[M]$ это глобальная матрица масс, а $[K]$ глобальная матрица жесткости.

Решение этой однородной системы ищется в виде гармонической функции по времени

$$\{q(t)\} = \{q\} e^{i\omega t} = \{q\} \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (24)$$

Подставляя (24) в (23) и считая, что уравнение (23) должно удовлетворяться в любой момент времени, получаем алгебраическую задачу

$$[K] \{q\} - \omega^2 [M] \{q\} = 0. \quad (25)$$

Такая задача в линейной алгебре называется обобщенной задачей на собственные значения и ее целью является определение ряда значений ω_i (часть спектра собственных частот), при котором выполняется (25) и векторов $\{q_i\}$, удовлетворяющих уравнению (25). Число таких значений ω_i равно порядку системы уравнений (25), их последовательность в порядке возрастания называется спектром собственных значений и соответствующие вектора $\{q_i\}$ называются собственными векторами. С точки зрения механики ω_i являются частотами свободных колебаний, а $\{q_i\}$ характеризуют формы соответствующих колебаний. [1]

3. Исследование собственных колебаний жестко зажатой пластинки

Произведем расчеты поставленной задачи в программе Ansys, и получим значения собственных частот форм колебаний. Далее будем изменять характеристики конструкции, для того чтобы узнать, как они будут влиять на собственные колебания.

Решение модельной задачи

В качестве модельной задачи рассмотрим пластину (см. рис. 1), жестко закрепленную с одного края, и получим собственную частоту первой формы колебаний

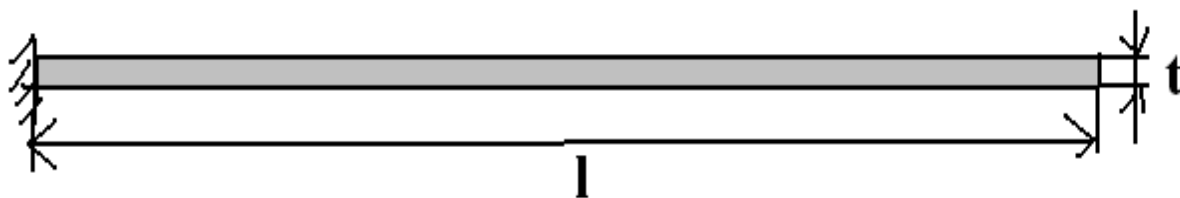


Рис. 1

Пластина из алюминия ($E=7 \cdot 10^{10}$ Па, $\nu=0.3$, $\rho=2700$ кг/м³) с длиной $l=0.3$ м и высотой $t=0.001$ м.

Для расчета этой задачи воспользовались ППП ANSYS 14.5, так как эта версия программы позволяет произвести все расчеты.

Построили эту пластину в ANSYS 14.5 (см. рис. 2), и разбили сетку на конечные элементы с размерами 0.001 м на 0.001 м.

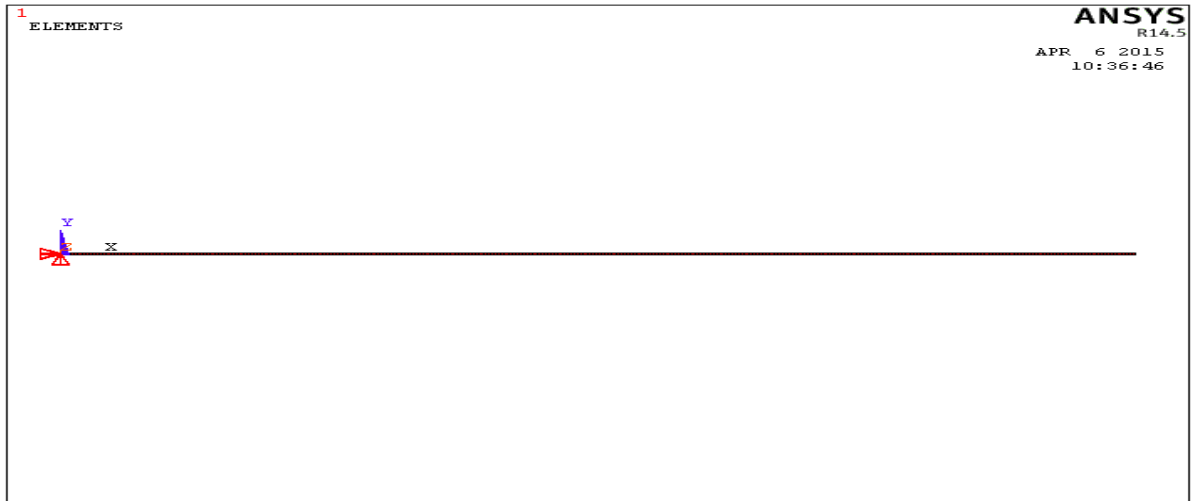


Рис. 2

Деформированное состояние конструкции показано на рисунке 3.

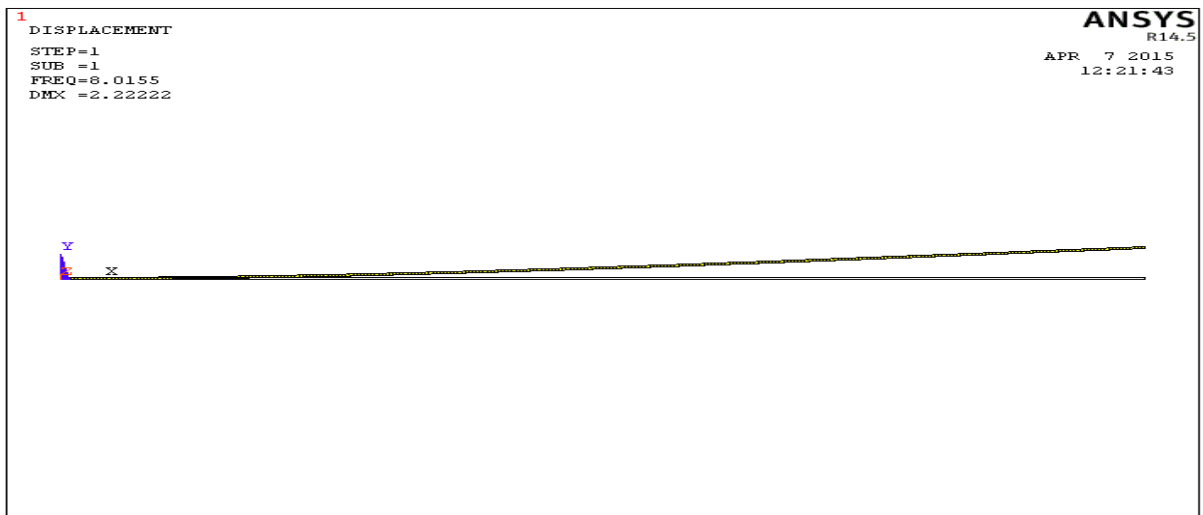


Рис. 3

Нашли собственную частоту первой формы колебаний, которая равна 8.0155, что и показана на рисунке 4.

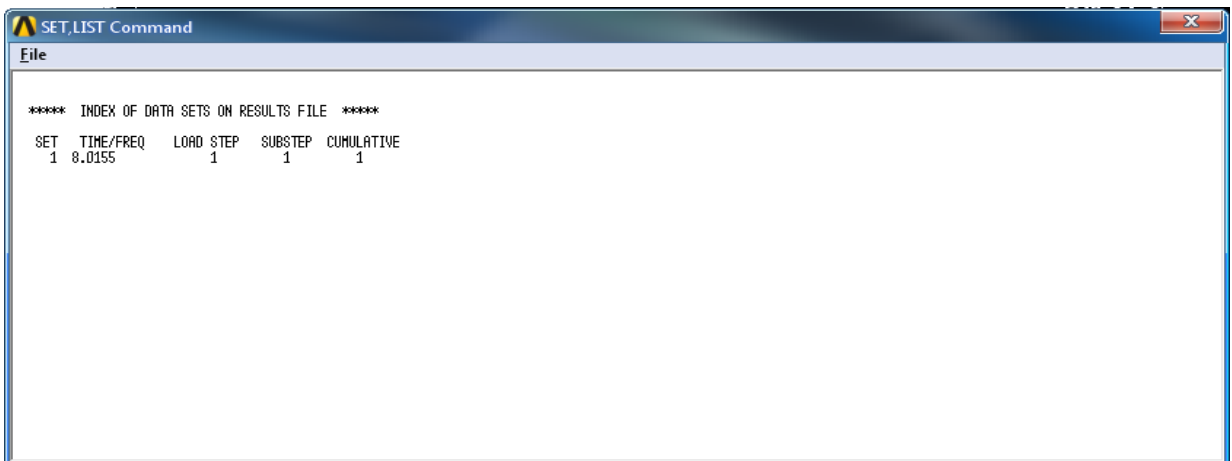


Рис. 4

2.1. Решение основной задачи

Теперь рассмотрим такую же пластину, но теперь она не будет жестко закреплена, а будет лежать на основании конструкции, который жестко закреплен (Рис. 5). При этом будет действовать, распределенная нагрузка на часть пластинки, которая лежит в не основании. Сила тяжести не учитывается, как и в предыдущей задаче.

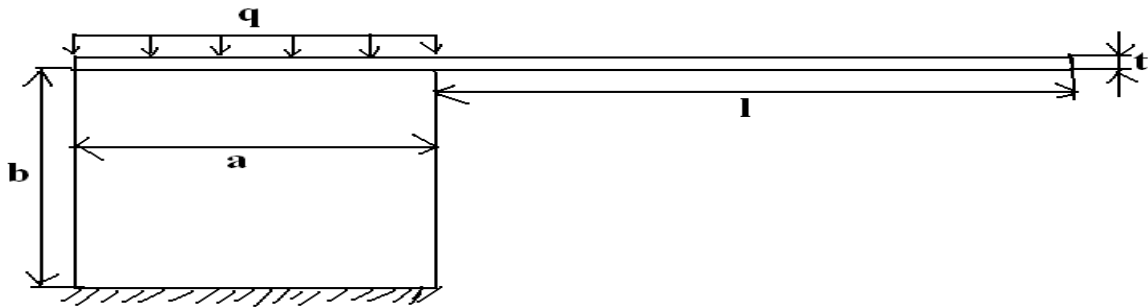


Рис. 5

Пластина и основание конструкции из алюминия ($E=7 \cdot 10^{10}$ Па, $\nu=0.3$, $\rho=2700$ кг/м³) с длинами $l=0.3$ м, $a=0.2$ м, $b=0.1$ м, $t=0.001$ м, а распределенная нагрузка равна $q=1000$ н/м.

Построили эту конструкцию в программе ANSYS 14.5 (см. рис. 6), и разбили сетку на конечные элементы с размерами 0.001м на 0.001м.

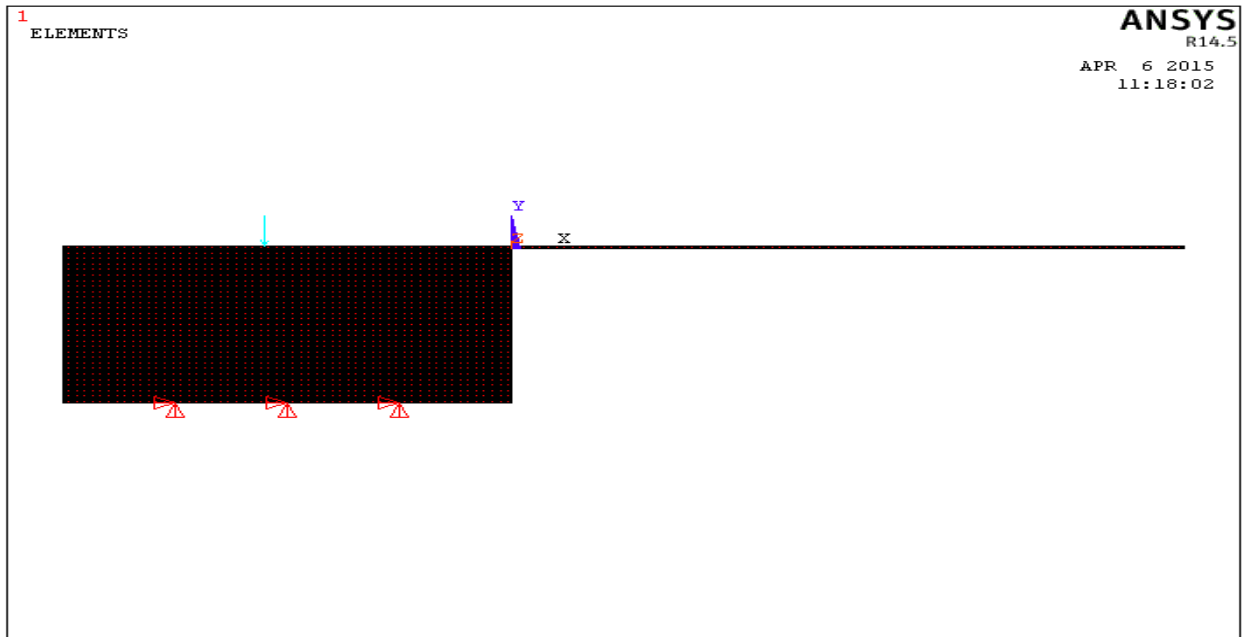


Рис. 6

Из рисунка 7 видно, что собственная частота первой формы колебаний равна 7.9949.

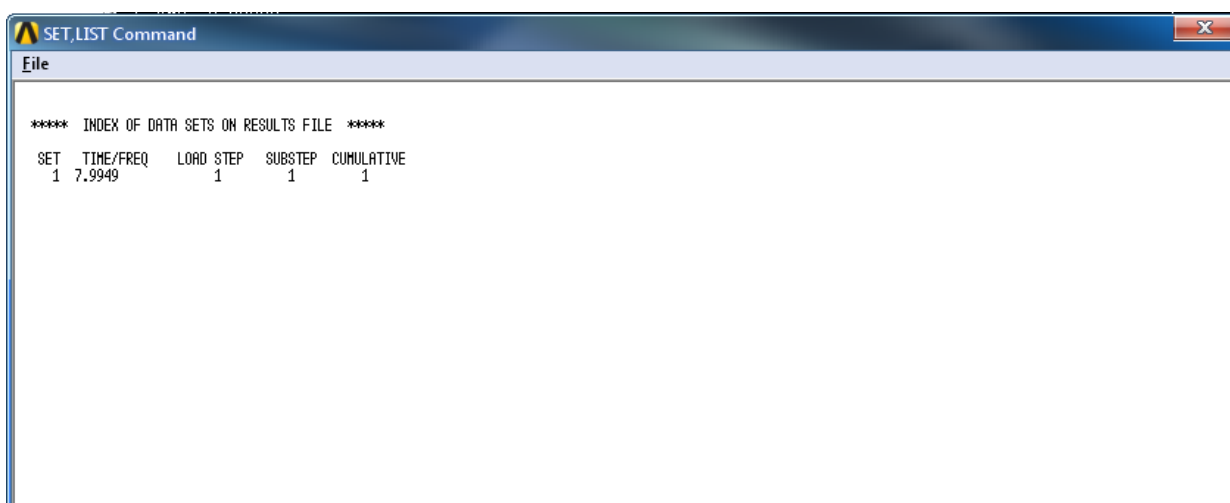


Рис. 7

3.2. Исследование влияния длины пластины на собственные колебания

Исследуем эти задачи на то, как изменится собственная частота первой формы колебаний, от изменения длины пластины. Исследования проводились при идентичных данных.

ν_1 – собственная частота первой формы колебаний жестко закрепленной пластинки.

ν_2 – собственная частота первой формы колебаний пластинки, которая лежит на основании конструкции.

$\nu \setminus l$	$l=0,01\text{м}$	$l=0,05\text{м}$	$l=0,1\text{м}$	$l=0,3\text{м}$	$l=0,5\text{м}$	$l=1\text{м}$	$l=5\text{м}$
ν_1	7181,1	288,51	72,137	8,0155	2,8856	0,72133	0,027897
ν_2	6592,8	284,06	71,58	7,9949	2,8811	0,72076	0,027603

Табл.1

Для наглядности построим графики (Рис. 8), где видно, что значительное расхождение в частотах только при $l=0.01$ м, а в остальных случаях расхождение не больше 1,6% (при $l=0.05$ м). Разница между частотами при $l=0.01$ м скорее всего связана с тем, что при малой длине пластины, начинает играть значительное влияние на частоту колебания основания конструкции.

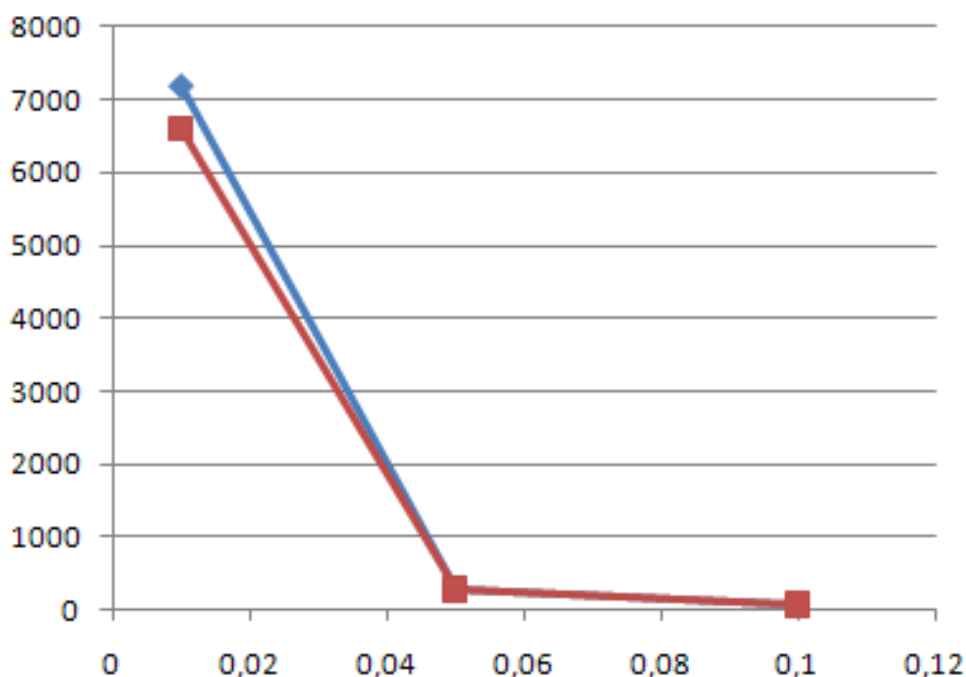


Рис. 8

Из таблицы 1 видно, что при увеличении длины пластины, собственные колебания уменьшаются. Причем выявилась такая закономерность, что при увеличении длины пластины в «n» раз, собственные колебания, примерно, уменьшаются в «n²». Что подтверждает формула, взятая из книги В.Л. Бидерман «Теория механических колебаний», для жестко заделанной балки с одного края: $\omega_k = \lambda_k^2 \sqrt{(EJ/l^4 m_0)}$ (26)

где ω_k частота собственных колебаний, l длина, $\lambda_k = \pi(2k-1)/2$ корни уравнения. [5]

3.3. Исследование влияния распределенной нагрузки на собственные колебания

Теперь рассмотрим пластину, лежащую на основании конструкции (см. рис.5), но теперь исследуем влияние распределенной нагрузки на собственную частоту первой формы колебаний.

Пластина и основание конструкции из алюминия с характеристиками: $t=0.001$ м, $E=7 \cdot 10^{10}$ Па, $\nu=0.3$, $\rho=2700$ кг/м³, $a=0.2$ м, $b=0.1$ м.

ν_1 – собственная частота первой формы колебаний пластинки, которая лежит на основании конструкции. ($q=10$ н/м)

ν_2 – собственная частота первой формы колебаний пластинки, которая лежит на основании конструкции. ($q=1000$ н/м)

ν_3 – собственная частота первой формы колебаний пластинки, которая лежит на основании конструкции. ($q=100000$ н/м)

$\nu \setminus l$	$l=0,01\text{м}$	$l=0,05\text{м}$	$l=0,1\text{м}$	$l=0,3\text{м}$	$l=0,5\text{м}$	$l=1\text{м}$	$l=5\text{м}$
ν_1	6592,8	284,06	71,58	7,9949	2,8811	0,72076	0,027708
ν_2	6592,8	284,06	71,58	7,9949	2,8811	0,72076	0,027603
ν_3	6592,8	284,06	71,58	7,9949	2,8811	0,72076	0,027690

Табл. 2

Из таблицы 2 видно, что распределенная нагрузка, практически не влияет на значения собственной частоты первой формы колебаний пластинки.

3.4. Исследование влияния длины основания конструкции на собственные колебания

Опять рассмотрим пластину, лежащую на основании конструкции (см. рис.5), но теперь будем менять длину основания конструкции и посмотрим, как измениться собственная частота первой формы колебаний пластинки.

Пластина из алюминия и брусок тоже с характеристиками: $t=0.001$ м, $E=7 \cdot 10^{10}$ Па, $\nu=0.3$, $\rho=2700$ кг/м³, $q=1000$ н/м, $b=0.1$ м, $l=0.3$ м.

ν_1 – собственная частота первой формы колебаний пластинки, которая лежит на основании конструкции.

$\nu \setminus l$	$a=0,001\text{м}$	$a=0,01\text{м}$	$a=0,05\text{м}$	$a=0,2\text{м}$	$a=0,5\text{м}$	$a=1\text{м}$
ν_1	5,14	7,9913	7,9949	7,9949	7,9949	7,9949

Табл. 3

Из таблицы 3 видно, что длина основания конструкции, на которой лежит пластина, не влияет на собственную частоту первой формы колебаний за исключением, когда ее длина приближается к величине равной ширине пластины. Так как при маленькой длине, основание конструкции становится как пластина, из-за того, что высота основания конструкции неизменна.

3.5. Исследование влияния жесткости основания конструкции на собственные колебания пластины

Для того чтобы снизить влияние основания конструкции (см. рис.5) на собственную частоту первой формы колебаний пластинки, сделаем основание из стали, так как он более жесткий материал, чем алюминий. И сравним результаты собственных частот в трех случаях: пластинка и основание из алюминия; пластинка из алюминия, а основание из стали; жестко закрепленная пластинка. При этом результаты получим для разных длин пластинки.

Пластина из алюминия ($E=7 \cdot 10^{10}$ Па, $\nu=0.3$, $\rho=2700$ кг/м³), а основание конструкции из стали ($E=2 \cdot 10^{11}$ Па, $\nu=0.3$, $\rho=7800$ кг/м³) с характеристиками: $t=0.001$ см, $a=0.2$ м, $b=0.1$, $q=1000$ н/м.

ν_1 – собственная частота первой формы колебаний пластинки, когда пластина и основание конструкции из алюминия.

ν_2 – собственная частота первой формы колебаний пластинки, когда основание конструкции из стали.

ν_3 – собственная частота первой формы колебаний жестко закрепленной пластинки.

$\nu \setminus l$	$l=0,01$ м	$l=0,05$ м	$l=0,1$ м	$l=0,3$ м	$l=0,5$ м	$l=1$ м	$l=5$ м
ν_1	6592,8	284,06	71,58	7,9949	2,8811	0,72076	0,027603
ν_2	6663,4	285,34	71,74	8,0008	2,8824	0,72092	0,027689
ν_3	7181,1	288,51	72,137	8,0155	2,8856	0,72133	0,027897

Табл. 4

Когда основание конструкции из стали, то значения собственной частоты немного выше (см. табл. 4), чем когда оно из алюминия, причем незначительность сохраняется при любой длине пластинки (что подтверждает формула 26). Еще значения собственной частоты первой формы колебаний пластинки, лежащей на основании конструкции из стали, приблизились к значениям собственной частоты первой формы колебаний жестко закрепленной пластинки, но сохранилось значительное расхождение между собственными частотами при $l=0.01$ м.

3.6. Исследование сходимости конечно элементного решения

Опять рассмотрим пластину, лежащую на основании конструкции (см. рис.5), но теперь увеличим густоту сетки и посмотрим, как изменятся собственные колебания пластины.

Пластина и основание конструкции из алюминия с характеристиками: $t=0.001\text{м}$, $a=0.02\text{м}$, $b=0.02\text{м}$, $E=7*10^{10}\text{Па}$, $\nu=0.3$, $\rho=2700\text{ кг/м}^3$, $q=1000\text{ н/м}$.

Рассмотрим первые три формы собственных частот колебания пластины, при $l=0.3\text{ м}$ и при разбиении сетки на конечные элементы с размерами $0.001 \times 0.001\text{м}$, $0.0005 \times 0.0005\text{м}$, $0.000334 \times 0.000334\text{м}$, $0.00025 \times 0.00025\text{м}$.

ν_1 – собственная частота первой формы колебаний

ν_2 – собственная частота второй формы колебаний

ν_3 – собственная частота третьей формы колебаний

$\nu \setminus i$	$i=0,001\text{м}$	$i=0,0005\text{м}$	$i=0,000334\text{м}$	$i=0,00025\text{м}$
ν_1	7,9949	9,1820	9,3837	9,4514
ν_2	50,102	57,541	58,806	59,237
ν_3	140,28	161,1	164,65	165,85

Табл. 5

Собственная частота первой формы колебания

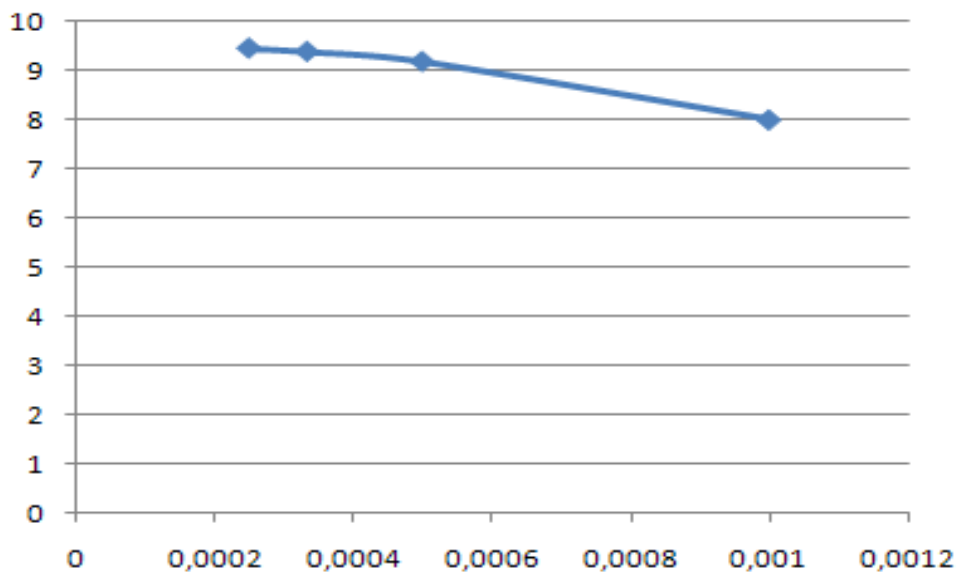


Рис. 9

Собственная частота второй формы колебания

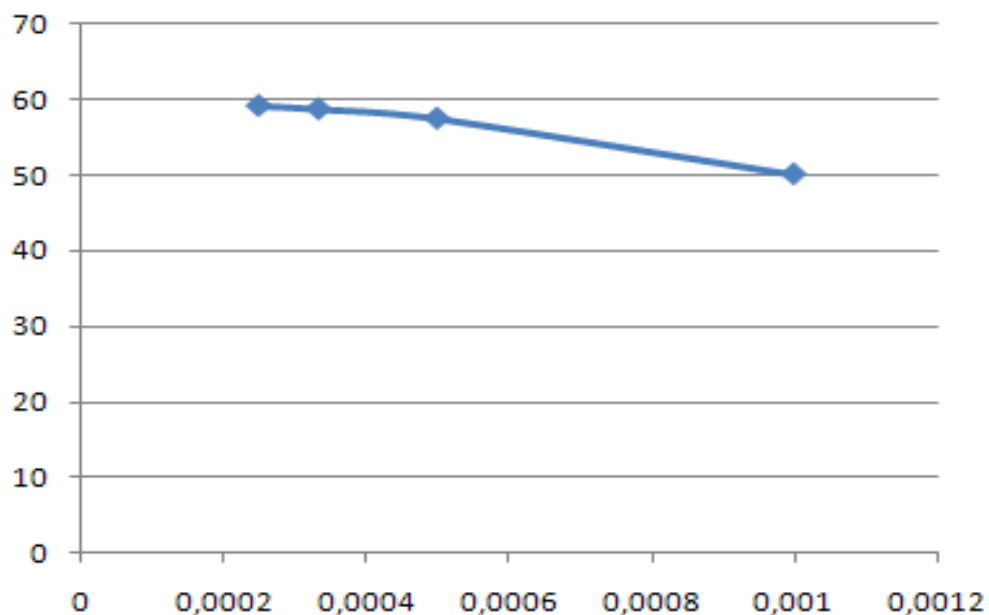


Рис. 10

Собственная частота третьей формы колебания

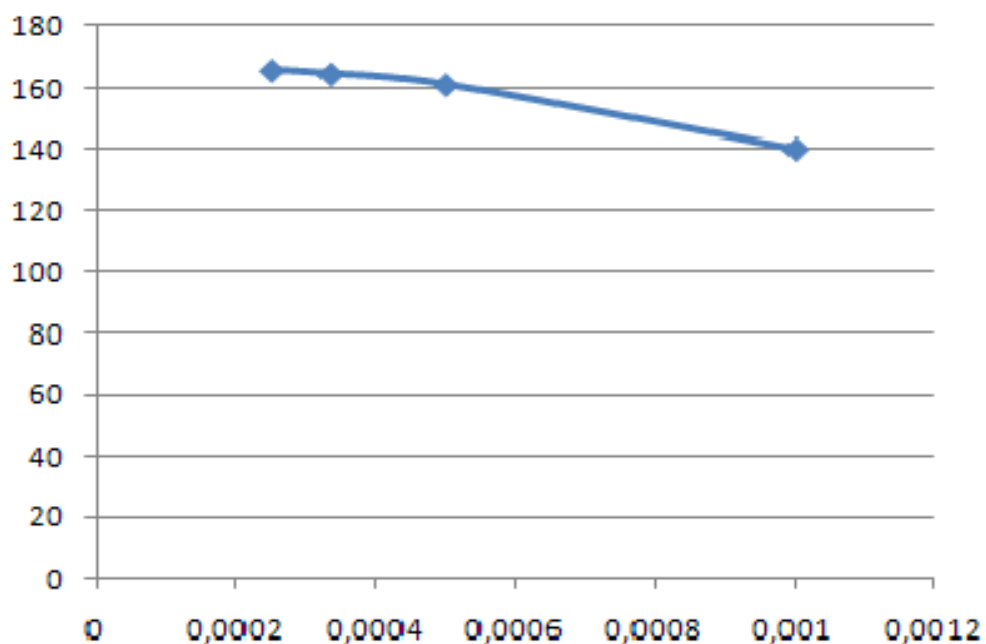


Рис. 11

Из таблицы 5 видно, что при увеличении густоты сетки, увеличивается и значение собственных частот форм колебания. А по рисункам 9, 10 и 11 можно предположить, что собственные частоты, при увеличении густоты сетки стремятся, к своим оптимальным значениям, т.е. к более точным значениям.

3.7. Исследование влияние длины на соотношение форм колебаний

Опять рассмотрим пластину, лежащую на основании конструкции (см. рис.5), но теперь посмотрим, как будет меняться соотношения, между формами колебаний, от изменения длины пластины.

Получим данные, разбив конструкцию на элементы с размерами $0.00025\text{м} \times 0.00025\text{м}$, для того чтобы получить более точные данные.

$\nu \setminus l$	$l=0,01\text{м}$	$l=0,05\text{м}$	$l=0,1\text{м}$	$l=0,3\text{м}$	$l=0,5\text{м}$	$l=1\text{м}$
ν_1	7542,2	333,6	84,405	9,4514	3,4085	0,85355
ν_2	24717	2086,3	528,69	59,237	21,36	5,3464
ν_3	44654	5822,5	1479,2	165,85	59,806	14,97

Табл. 6

В таблице 6 мы получили собственные частоты первых трех форм колебаний, для разной длины пластины. И теперь поделим значения собственных частот одной формы колебаний, на собственные частоты другой формы колебания, для того чтобы получить соотношения (табл. 7).

$\nu \setminus l$	$l=0,01\text{м}$	$l=0,05\text{м}$	$l=0,1\text{м}$	$l=0,3\text{м}$	$l=0,5\text{м}$	$l=1\text{м}$
ν_2 / ν_1	3,2771	6,2538	6,2637	6,2675	6,2666	6,2637
ν_3 / ν_2	1,8066	2,7907	2,7978	2,7997	2,7999	2,8

Табл. 7

Соотношение собственных частот второй формы колебаний на первую

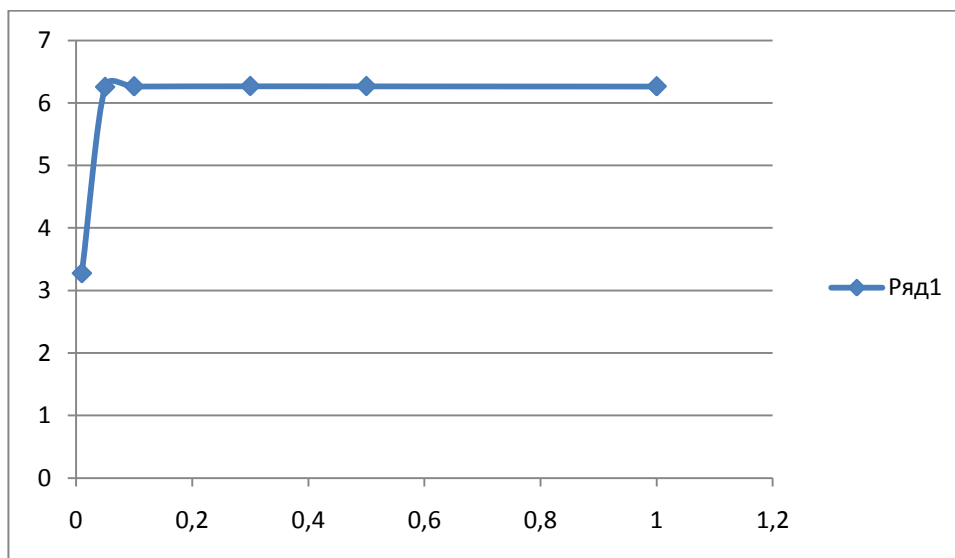


Рис. 12

Соотношение собственных частот третьей формы колебаний на вторую

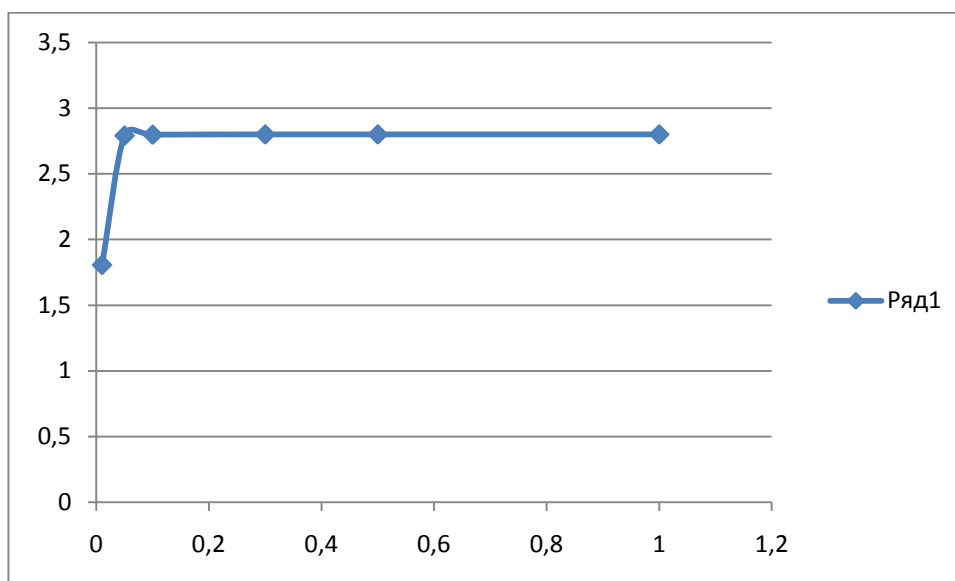


Рис. 13

Из рисунка 12 и 13 следует, что изменение длины пластины на соотношение собственных частот между формами колебаний, практически не влияет, за исключением, когда длина пластинки мала, так как начинает играть роль собственные колебания основания конструкции.

3.8. Исследование влияния продольной силы на собственные колебания пластины

Вновь рассмотрим пластину, лежащую на основании конструкции, но теперь на нее не будет действовать поперечная распределенная нагрузка, а будет действовать продольная сила (см. рис. 14), которая будет растягивать пластину.

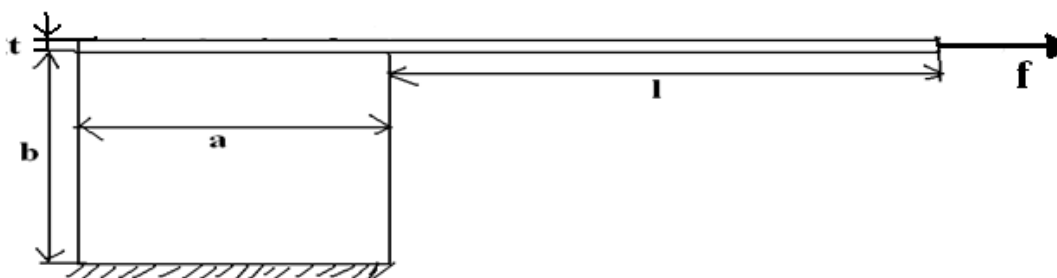


Рис. 14

Пластина и основание конструкции из алюминия с характеристиками:
 $t=0.001$ м, $E=7 \cdot 10^{10}$ Па, $\nu=0.3$, $\rho=2700$ кг/м³, $l=0.3$ м, $a=0.2$ м, $b=0.1$ м.

ν_1 – собственные колебания пластины при силе $f=10$ Н.

ν_2 – собственные колебания пластины при силе $f=50$ Н

ν_3 – собственные колебания пластины при силе $f=100$ Н

$\nu \setminus l$	$l=0,01$ м	$l=0,05$ м	$l=0,1$ м	$l=0,3$ м	$l=0,5$ м	$l=1$ м
ν_1	6593,1	284,66	72,181	8,5722	3,4187	1,1449
ν_2	6594,6	287,06	74,524	10,486	4,8807	1,9561
ν_3	6596,4	290,02	77,323	12,344	6,0958	2,5661

Табл. 8

Из таблицы 8 видно, что при увеличении продольной силы f , которая растягивает пластину, значения собственной частоты первой формы колебаний увеличивается, причем при увеличении длины пластины, относительность увеличения значений собственных частот увеличивается.

Заключение

В работе представлены основные этапы метода конечных элементов, дана постановка задачи элементов двумерных конструкций на собственные колебания. Была решена модельная задача на собственные колебания двумерной конструкции, элементом которой является балка.

В ППП ANSYS была реализована и верифицирована методика решения модельной задачи, алгоритм которой был реализован на языке APDL.

В работе было исследовано влияние длины балки, геометрических размеров основания конструкции на частоты и формы собственных колебаний, а также определено влияние величины поперечной распределенной нагрузки, продольной силы и кинематического нагружения на собственные колебания.

Результаты были представлены в виде графиков и таблиц, по которым и был произведен анализ влияния внешних силовых факторов и геометрических размеров модели на частоты и формы собственных колебаний конструкции..

Список использованной литературы

1. Голованов А.И., Бережной Д.В. Метод конечных элементов в механике деформируемых твердых тел. - Казань: изд-во «ДАС», 2001. – 300с.
2. А.В.Конюхов "Основы анализа конструкций в ANSYS", Казань, 2001г
3. Басов К.А. Ansys: справочник пользователя. – Москва: ДМК Прес, 2005. – 640с.
4. Горшков А. Г., Старовойтов Э. И., Тарлаковский Д. В. Теория упругости и пластичности. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2002г. – 416с.
5. Бидерман В. Л., Теория механических колебаний, – Москва: Высшая школа, 1980г. – 408с.
6. Нигматулин Р.И., Механика сплошной среды. Кинематика. Динамика. Статистическая динамика. — М.: ГЭОТАР-Медиа, 2014. — 358с.
7. Бережной Д.В., Сагдатуллин М.К. Саченков А.А. Расчет комбинированных конструкций методом конечных элементов // Научно-технический вестник Поволжья. – Казань: Научно-технический вестник Поволжья, 2012. – № 4.- С.13-16.

Приложение

```
finish
/clear, start
/units,si
l=0.3
a=0.2
b=0.1
/PREP7
ET,1,PLANE182
KEYOPT,1,1,0
KEYOPT,1,3,2
KEYOPT,1,6,0
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,EX,1,,70000.e6
MPDATA,PRXY,1,,0.3
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,DENS,1,,2700
k,1,-a,-b,0
k,2,-a,0.,0
k,3,0,-b,0
k,4,0,0,0
k,5,1,0,0
k,6,1,0.001,0
k,7,-a,0.001,0
k,8,0,0.001,0
a,1,2,4,3
a,4,2,7,8
a,4,8,6,5
MSHAPE,0,2D
MSHKEY,0
ESIZE,0.001,0,
*do,i,1,3,1
amesh,i
*enddo
mat,1
amesh,1
fini
/solu
```

```

FLST,2,1,4,ORDE,1
FITEM,2,4
DL,P51X, ,ALL,
!FLST,2,1,4,ORDE,1
!FITEM,2,6
!SFL,P51X,PRES,1000,
!FLST,2,1,4,ORDE,1
!FITEM,2,6
!DL,P51X, ,UY,-0.1

!FLST,2,2,3,ORDE,2
!FITEM,2,5
!FITEM,2,-6
!FK,P51X,FX,50
!PSTRES,on
!solve
!save
!fini
!/solu
ANTYPE,2
MSAVE,0
MODOPT,LANB,1
EQLV,SPAR
MXPAND,1, , ,0
!LUMPM,0
!PSTRES,on
!MODOPT,LANB,1,0,1000000, ,OFF
solve
save
/POST1
SET,LIST
SET,FIRST
PLDISP,2

```