

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ГОУВПО «КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО
МОДЕЛИРОВАНИЯ

РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ В РЯД ПО
ФУНКЦИЯМ БЕССЕЛЯ

с помощью пакета программ Maple

Выпускная квалификационная работа
студентки Миннибаевой Р.Ж.
Научный руководитель: Игнатъев Ю.Г.
доктор физ.-мат. наук, профессор

Казань 2014 год

© Оформление: LaTeX - стиль $\mathcal{B}L\mathcal{T}\mathcal{O}$ профессора Ю.Г.Игнатъева

Оглавление

Введение	3	
I	Функции Бесселя	4
I.1	Цилиндрические функции	4
I.2	Функции Бесселя с целым положительным значком	4
I.3	Функции Бесселя с произвольным значком	7
I.4	Функции Бесселя второго рода	9
I.5	Разложение в ряд функции Бесселя второго рода с целым значком	11
I.6	Функции Бесселя третьего рода	12
I.7	Функции Бесселя мнимого аргумента	13
I.8	Цилиндрические функции с индексом, равным половине нечетного целого числа	15
I.9	Цилиндрические функции с вещественным положительным аргументом и значком	16
I.10	Нули цилиндрических функций	18
I.11	Разложение произвольных функций в ряды и интегралы по цилиндрическим функциям	19
II	Функция Бесселя в пакете Maple	22
II.1	Цилиндрические функции в пакете Maple	22
II.2	Графики функций Бесселя	22
III	Создание анимационных процедур	28
III.1	Процедура разложения функций в ряд по функциям Бесселя	28
III.2	Пример решения типовых задач	31
Приложение А. Графики функции Бесселя	33	
Приложение В. Процедура анимации аппроксимативной функции с помощью ряда по функциям Бесселя	36	
Заключение	40	
Литература	42	

Введение

Тема квалификационной работы является разложение функций в ряд по функциям Бесселя. Целью выпускной квалификационной работы является составление обзора по теории цилиндрических функций, разложения функций Бесселя в пакете Maple и создание программных процедур анимации процесса вычисления рядов в пакете Maple. Квалификационная работа состоит из Введения, 3-х глав, Заключения и Списка литературы. Первая глава посвящена обзору теории разложения функции Бесселя. Вторая глава включает в себя создание процедур для построения графиков функций Бесселя. Третья глава содержит пользовательскую программную процедуру демонстрации процесса вычисления функций Бесселя. В Заключении кратко сформулированы основные результаты.

Текст квалификационной работы набран при помощи издательской системы LaTeX. Она позволяет автору набрать свою рукопись с применением уже готовых форматов и распечатать ее с высоким полиграфическим качеством. При этом использовался специальный стиль профессора проф. Ю. Г. Игнатьева *BIBLIO*, содержащий макросы, удобные для оформления работы

Основными литературными источниками по теории специальных функций и их разложениям являлись книги Н. Н. Лебедев "Специальные функции и их разложения." [1], Д. П. Голосков "Уравнение математической физики. Решение задач в системе Maple" [4].

Глава I

Цилиндрические функции

I.1 Понятие о цилиндрических функций

Определение OI.1. *Цилиндрическими функциями называются решения линейного дифференциального уравнения второго порядка:*

$$u'' + \frac{1}{z}u' + \left(1 - \frac{v^2}{z^2}\right)u = 0 \quad (\text{I.1})$$

где z - комплексное переменное, v - параметр, который может принимать любые вещественные или комплексные значения.

Термин "цилиндрические функции" обязан своим происхождением тому обстоятельству, что уравнение (I.1) встречается при рассмотрении краевых задач теории потенциала для цилиндрической области. Специальные классы цилиндрических функций известны в литературе под названием функций Бесселя, и иногда это наименование присваивается всему классу цилиндрических функций.

I.2 Функции Бесселя с целым положительным значением

Для рассмотрения многих проблем, связанных с применением цилиндрических функций, достаточно ограничиться изучением специального класса этих функций, который соответствует случаю, когда параметр в уравнении (I.1) равен нулю или целому положительному числу.

Исследование данного класса носит более элементарный характер, чем теория, относящаяся к произвольным значениям v , и может служить хорошим введением в эту общую теорию.

Покажем, что одним из решений уравнения

$$u'' + \frac{1}{z}u' + \left(1 - \frac{n^2}{z^2}\right)u = 0, n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{I.2})$$

является функция Бесселя первого рода порядка n , $u_1 = J_n(z)$ которая для любых значений z определяется как сумма ряда

$$J_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}}{k!(n+k)!}, |z| < \infty. \quad (\text{I.3})$$

1.2. Функции Бесселя с целым положительным значком

При помощи признака Даламбера легко убедиться, что рассматриваемый ряд сходится на всей плоскости комплексного переменного z , следовательно, представляет целую функцию от z .

Если обозначить левую часть уравнения (1.2) через $l(u)$ и ввести сокращенную запись коэффициентов ряда (1.3), положив

$$a_k = \frac{(-1)^k}{2^{n+2k} k! (n+k)!},$$

то в результате получим

$$\begin{aligned} l(u_1) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{n+2k-2} \{(n+2k)(n+2k-1) + (n+2k) - n^2\} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{n+2k} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} 4a_k z^{n+2k-2} k(n+k) + \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{n+2k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{n+2k} \{4a_{k+1}(k+1)(n+k+1) + a_k\}, \end{aligned}$$

отсюда следует $l(u_1) \equiv 0$, так как выражение в фигурных скобках равно нулю. Таким образом, функция $J_n(z)$ удовлетворяет уравнению (1.2), т. е. представляет собой цилиндрическую функцию.

Простейшими функциями рассматриваемого класса являются функции Бесселя порядка нуль и единица:

$$\left. \begin{aligned} J_0(z) &= 1 - \frac{(\frac{z}{2})^2}{1!^2} + \frac{(\frac{z}{2})^4}{2!^2} - \frac{(\frac{z}{2})^6}{3!^2} + \dots, \\ J_1(z) &= \frac{z}{2} \left[1 - \frac{(\frac{z}{2})^2}{1!2!} + \frac{(\frac{z}{2})^4}{2!3!} - \frac{(\frac{z}{2})^6}{3!4!} + \dots \right]. \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

Покажем, что функция Бесселя других порядков могут быть выражены через эти две функции. Для доказательства предположим, что n — целое положительное число, умножим ряд (1.3) на z^n и продифференцируем по z . Тогда получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} z^n J_n(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2n+2k)}{2^{n+2k} k! (n+k)!} z^{2n+2k-1} = \\ &= z^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (n-1+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n-1+2k} = z^n J_{n-1}(z). \end{aligned}$$

или

$$\frac{d}{dz} z^n J_n(z) = z^n J_{n-1}(z), \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.5)$$

Аналогичным образом, умножая ряд на z^{-n} , находим

$$\frac{d}{dz} z^{-n} J_n(z) = -z^{-n} J_{n+1}(z), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.6)$$

откуда непосредственно следует:

$$J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z) = \frac{2n}{z} J_n(z), \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.7)$$

$$J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z) = 2J'_n(z), \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.8)$$

Полученные формулы известны под названием рекуррентных соотношений для функций Бесселя.

Первое из соотношений дает возможность выразить функцию произвольного порядка n через функции порядков нуль и единица, что существенным образом сокращает работу по составлению таблиц функций Бесселя.

Второе соотношение позволяет представить производные от функций Бесселя через функции Бесселя. Для $n=0$ это соотношение должно быть заменено формулой

$$J_0' = -J_1(z), \quad (I.9)$$

непосредственно вытекающей из определения данных функций.

Функции Бесселя первого рода $J_n(z)$ просто связаны с коэффициентами разложения функции $\omega(z, t) = e^{\frac{z}{2}(t - \frac{1}{t})}$ в ряд Лорана ¹;

$$\omega(z, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z)t^n, \quad 0 < |t| < \infty. \quad (I.10)$$

Коэффициенты этого разложения могут быть вычислены путем перемножения степенных рядов:

$$e^{\frac{zt}{2}} = 1 + \frac{(\frac{z}{2})}{1!}t + \frac{(\frac{z}{2})^2}{2!}t^2 + \dots,$$

$$e^{-\frac{z}{2t}} = 1 - \frac{(\frac{z}{2})}{1!} \frac{1}{t} + \frac{(\frac{z}{2})^2}{2!} \frac{1}{t^2} - \dots$$

и объединения членов, содержащих одинаковые степени t . Выполнив это, получу:

$$c_n(z) = J_n(z), \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad (I.11)$$

$$c_n(z) = (-1)^n J_{-n}(z), \quad n = -1, -2, \dots$$

откуда следует, что рассматриваемое разложение может быть записано в виде

$$\omega(z, t) = e^{\frac{z}{2}(t - \frac{1}{t})} = J_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(z)[t^n + (-1)^n t^{-n}] \quad (I.12)$$

Функция $\omega(z, t)$ называется производящей функцией для функций Бесселя с целым значком; найденное соотношение (I.12) играет важную роль в теории этих функций.

Для получения общего интеграла уравнения (I.1), дающего выражение произвольной цилиндрической функции с целым значком $\nu=n$ ($n=0,1,2,\dots$), необходимо построить второе решение уравнения, линейно независимое с $J_n(z)$. В качестве такого решения может быть взята функция Бесселя второго рода, $u_2 = Y_n(z)$, исходя из определения которой нетрудно получить для $Y_n(z)$ аналитическое выражение в виде ряда

$$Y_n(z) = \frac{2}{\pi} J_n(z) \ln \frac{z}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} -$$

$$- \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\frac{z}{2})^{n+2k}}{k!(n+k)!} [\psi(k+1) + \psi(k+n+1)]. \quad (I.13)$$

где $\psi(m+1) = -\gamma + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m}$, $\psi(1) = -\gamma$ (γ -постоянная Эйлера) и, в случае $n=0$, первую из сумм надлежит положить равной нулю.

¹ $\omega(z, t)$ рассматриваемая как функция t , регулярна в кольце $0 < \delta < t < A < \infty$, поэтому разложение указанного вида существует.

1.3. Функции Бесселя с произвольным значком

Функция $Y_n(z)$ регулярна в плоскости с разрезом $(-\infty, 0)$. Существенная особенность рассматриваемого решения состоит в том, что оно обращается в бесконечность, когда $z \rightarrow 0$. Общее выражение цилиндрической функции для представляет линейную комбинацию построенных решений

$$u = Z_n(z) = AJ_n(z) + BY_n(z), \quad (I.14)$$

где A и B - произвольные постоянные, $n=0,1,2,\dots$

1.3 Функции Бесселя с произвольным значком

Функции Бесселя, рассмотренные в пункте 1, составляют частный случай цилиндрических функций более общего вида, известных под названием функций Бесселя первого рода с произвольным значком ν . Чтобы определить эти функции, рассмотрим ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k}}{(k+1)(k+\nu+1)},$$

где z - комплексное переменное, принадлежащее плоскости с разрезом $(-\infty, 0)$ ν -параметр, который может принимать любые вещественные или комплексные значения². Легко видеть, что данный ряд сходится при любых z и ν , причем в области $|z| < R$, $|\nu| < N$ (R, N - произвольно большие фиксированные числа) сходимость равномерна по отношению к каждому из переменных.

Действительно, начиная с достаточного большого k , отношение модулей последующего члена ряда к предыдущему, равно величине

$$\frac{|z|^2}{4(k+1)|k+1+\nu|} \leq \frac{R^2}{4(k+1)(k+1-N)},$$

не будет превосходить некоторой правильной положительной дроби, не зависящей от z и ν . Отсюда, согласно известному признаку сходимости, следует, что рассматриваемый ряд сходится равномерно в указанной области³

Так как члены ряда представляют собой регулярные функции в плоскости с разрезом $(-\infty, 0)$, сумма ряда определяет некоторую функцию комплексного переменного z , регулярную в рассматриваемой разрезанной плоскости. Эта функция называется функцией Бесселя первого рода с индексом ν и обозначается символом $J_\nu(z)$. Таким образом,

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}, \quad |z| < \infty, |argz| < \pi. \quad (I.15)$$

Нетрудно показать, что определенная таким образом функция есть частное решение уравнения

$$u'' + \frac{1}{z}u' + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right)u = 0. \quad (I.16)$$

²Ограничение, наложенное на z , необходимо для однозначности функции z^ν и может быть отброшено, если ν -целое число.

³Функциональный ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k z$$

сходится равномерно в области (D) , если для всякого z , принадлежащего (D) и $k \geq m$, выполняется неравенство $\left| \frac{u_{k+1}(z)}{u_k z} \right| \leq q < 1$, где q не зависит от z .

Действительно, обозначая левую часть этого уравнения $l(u)$ и полагая $u_1 = J_\nu(z)$, мы находим, так же как в пункте 1,

$$l(u_1) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{\nu+2k} [4a_{k+1}(k+1)(\nu+k+1) + a_k],$$

где a_k - коэффициенты ряда (I.15)

$$a_k = \frac{(-1)^k}{2^{\nu+2k} \Gamma(k+1) \Gamma(k+\nu+1)},$$

откуда следует, что $l(u_1) \equiv 0$.

Так как при фиксированном z , принадлежащем плоскости с разрезом $(-\infty, 0)$ члены ряда (I.15) представляют собой целые функции переменного ν , то из равномерной сходимости по отношению к этому переменному вытекает, что функция Бесселя первого рода, рассматриваемая как функция своего значка, есть целая функция ν . При целом $\nu = n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) $\Gamma(k+\nu+1) = (n+k)!$ и ряд (I.15) переходит в ряд (I.3), поэтому функции, определенные в настоящем параграфе, являются обобщением функции Бесселя с целым положительным значком. При ν равном целому отрицательному числу $\nu = -n$ ($n = 1, 2, \dots$), первые n членов ряда (I.15) обращаются в нуль, и рассматриваемая формула может быть записана в виде

$$J_{-n}(z) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{-n+2k}}{k!(k-n)!} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+s} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2s}}{(s+n)!s!},$$

откуда следует

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z), \quad n = 1, 2, \dots \quad (\text{I.17})$$

Таким образом, функции Бесселя с отрицательным целым значком отличаются от соответствующих функций с положительным значком только постоянным множителем.

Полученное соотношение вместе с формулами (I.10-I.11) показывает, что разложение (I.12) может быть записано в виде

$$\omega(z, t) = e^{\frac{z}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) t^n, \quad 0 < |t| < \infty. \quad (\text{I.18})$$

Многие равенства, установленные ранее для функции Бесселя с целым положительным значком, переносятся на функции с произвольным индексом без каких-либо изменений. Так например имеет место соотношение:

$$J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z} J_\nu(z), \quad J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z) = 2J'_\nu(z), \quad (\text{I.19})$$

$$\frac{d}{dz} z^\nu J_\nu(z) = z^\nu J_{\nu-1}(z), \quad \frac{d}{dz} z^{-\nu} J_\nu(z) = -z^{-\nu} J_{\nu+1}(z), \quad (\text{I.20})$$

$$\left(\frac{d}{zdz}\right)^m z^\nu J_\nu(z) = z^{\nu-m} J_{\nu-m}(z),$$

$$\left(\frac{d}{zdz}\right)^m z^{-\nu} J_\nu(z) = (-1)^m z^{-\nu-m} J_{\nu+m}(z), \quad (\text{I.21})$$

представляющее собой обобщение соответствующих формул (П.2). Формулы (I.21) получаются путем повторного применения равенств (I.20).

I.4 Общее представление цилиндрических функций. Функции Бесселя второго рода

По определению цилиндрическая функция есть произвольное решение дифференциального уравнения второго порядка

$$l(u) = u'' + \frac{1}{z}u' + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right)u = 0, \quad (I.22)$$

поэтому общее ее выражение содержится в форме

$$u = Z_\nu(z) = C_1u_1(z) + C_2u_2(z), \quad (I.23)$$

где u_1 и u_2 - какие-либо линейно независимые решения рассматриваемого уравнения, C_1 и C_2 - постоянные, являющиеся, вообще говоря, произвольными функциями параметра ν . Легко получить общее выражение цилиндрической функции для случая, когда ν отлично от целого числа. Действительно, выбрав $u_1 = J_\nu(z)$, где $J_\nu(z)$ -функция Бесселя определенная в пункте 2,мы можем взять в качестве u_2 функцию $u_2 = J_{-\nu}(z)$ которая также является решением уравнения (I.22),так как последнее не меняется при замене ν на $-\nu$.

Если ν не равно целому числу, асимптотическое поведение рассматриваемых решений при $z \rightarrow 0$ будет

$$u_1 \approx \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma(1 + \nu)}, u_2 \approx \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}}{\Gamma(1 - \nu)}, \quad (I.24)$$

поэтому эти решения линейно независимы между собой ⁴ и искомое выражение для цилиндрической функции может быть дано в виде

$$u = Z_\nu(z) = C_1J_\nu(z) + C_2J_{-\nu}(z), \nu \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (I.25)$$

Если ν -целое число,то,в силу соотношения (I.17), построенные частные решения линейно зависимы между собой и найденное выражение (I.25) не является общим интегралом уравнения Бесселя (I.22). Чтобы получить представление произвольной цилиндрической функции,пригодное при любых значениях параметра ν , введем в рассмотрение функцию Бесселя второго рода $Y_\nu(z)$,которую для произвольных z ,принадлежащих плоскости размером $(-\infty, 0)$,определим при помощи равенства⁵

$$Y_\nu(z) = \frac{J_\nu(z)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi}. \quad (I.26)$$

При ν равном целому числу правая часть рассматриваемого выражения приобретает неопределенный вид (I.17) и понимается под значением функции предел

$$Y_n(z) = \lim_{\nu \rightarrow n} Y_\nu(z). \quad (I.27)$$

Так как по доказанному числитель и знаменатель в (I.26) суть целые функции ν ,рассматриваемый предел существует,и может быть вычислен по правилу Лопиталля,применение которого дает

$$Y_n(z) = \frac{1}{\pi} \left\{ \left[\frac{\partial J_\nu(z)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n} - (-1)^n \left[\frac{\partial J_{-\nu}(z)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n} \right\}. \quad (I.28)$$

⁴При ν равном нулю или целому числу это рассуждение теряет силу.

⁵В некоторых работах,посвященных теории функции Бесселя,для обозначения этой функции используется вместо $Y_\nu(z)$ символ $N_\nu(z)$.

Из определения функции $Y_\nu(z)$ следует, что эта функция регулярна в плоскости с размером $(-\infty, 0)$, а при фиксированном z представляет собой целую функцию параметра ν . Докажем теперь, что $Y_\nu(z)$ удовлетворяет уравнению (I.22), следовательно, является цилиндрической функцией. При ν , отличном от целого числа, требуемый результат непосредственно вытекает из формулы (I.25), поэтому достаточно привести доказательство только для случая $\nu = n (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$.

Проще всего воспользоваться для этого принципом аналитического продолжения. Так как $l(Y_\nu)$ -целая функция ν , то из равенства $l(Y_\nu) \equiv 0 (\nu \neq n)$ следует $l(Y_\nu) \equiv 0$.

Решения $u_1 = J_\nu(z)$ и $u_2 = Y_\nu(z)$ линейно независимы между собой. Для $\nu \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ этот результат является следствием линейной независимости решений $J_\nu(z)$ и $J_{-\nu}(z)$. Линейная независимость для $\nu = n (0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ вытекает из сопоставления поведения рассматриваемых функций при $z \rightarrow 0$. Таким образом, общее выражение цилиндрической функции, пригодное при любое значение ν , будет

$$u = Z_\nu(z) = C_1 J_\nu(z) + C_2 Y_\nu(z). \quad (I.29)$$

Функция Бесселя второго рода удовлетворяет тем же рекуррентным соотношениям, что и функции первого рода, именно:

$$\left. \begin{aligned} Y_{\nu-1}(z) + Y_{\nu+1}(z) &= \frac{2\nu}{z} Y_\nu(z), \\ Y_{\nu-1}(z) - Y_{\nu+1}(z) &= 2Y'_\nu(z), \\ \frac{d}{dz} z^\nu Y_\nu(z) &= z^\nu Y_{\nu-1}(z), \\ \frac{d}{dz} z^{-\nu} Y_\nu(z) &= -z^{-\nu} Y_{\nu+1}(z) \end{aligned} \right\} \quad (I.30)$$

и т.д.

При ν , отличном от целого числа, справедливость этих формул вытекает из определения функции Бесселя второго рода и соответствующих формул для функций первого рода. Для целого ν требуемый результат следует из непрерывности рассматриваемых функций по отношению к значку ν , что позволяет осуществить в соотношениях (I.30) предельный переход $\nu \rightarrow n$.

Надо отметить еще формулу

$$Y_{-n}(z) = (-1)^n Y_n(z), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (I.31)$$

являющуюся следствием (I.28) и позволяющую свести вычисление функций с отрицательными целым значком к вычислению функций, индекс которых положителен.

При помощи замены переменных в уравнении (I.22) легко получить ряд других дифференциальных уравнений, общий интеграл которых может быть выражен через цилиндрические функции. Наиболее интересные для приложений уравнения этого типа являются различными частными случаями дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} u'' + \frac{1-2\alpha}{z} u' + \left[(\beta\gamma z^{\gamma-1})^2 + \frac{\alpha^2 - \nu^2 \gamma^2}{z^2} \right] u &= 0, \\ u'' + \alpha z^\gamma u &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (I.32)$$

общие интегралы которых соответственно будут:

$$u = z^\alpha Z_\nu(\beta z^\gamma), \quad u = z^{\frac{1}{2}} Z_{\frac{1}{\gamma+2}} \left(\frac{2\alpha^{\frac{1}{2}}}{\gamma+2} z^{1+\frac{\gamma}{2}} \right), \quad (I.33)$$

где $Z_\nu(z)$ обозначает произвольную цилиндрические функции.

I.5 Разложение в ряд функции Бесселя второго рода с целым значком

Для того чтобы получить разложение в ряд функции $Y_n(z)$, достаточно воспользоваться формулой (I.28) и вычислить производные по значку ν , исходя из разложения (I.15), причем, ввиду соотношения (I.31), можно ограничиться рассмотрением случая целых положительных $n=0,1,2,\dots$

Так как ряд (I.15), по доказанному, сходится равномерно по отношению к ν , можем дифференцировать его почленно и получим тогда ⁶

$$\left[\frac{\partial J_\nu(z)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}}{k!(n+k)!} \left\{ \ln \frac{z}{2} - \psi(k+n+1) \right\},$$

где $\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$ -логарифмическая производная гамма-функции.

Аналогично имеем

$$\frac{\partial J_{-\nu}(z)}{\partial \nu} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu+2k}}{k!\Gamma(k-\nu+1)} \left\{ -\ln \frac{z}{2} + \psi(k-\nu+1) \right\}.$$

При $k=0,1,2,\dots,(n-1)$ и $\nu \rightarrow n$ $\Gamma(k-\nu+1) \rightarrow \infty$, $\psi(k-\nu+1) \rightarrow \infty$, поэтому первые n членов ряда принимают неопределенный вид. Воспользовавшись формулами теории гамма-функции, получим для таких k

$$\begin{aligned} \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{\psi(k-\nu+1)}{\Gamma(k-\nu+1)} &= \lim_{\nu \rightarrow n} \left\{ \Gamma(\nu-k) \sin \pi(\nu-k) \frac{\psi(\nu-k) + \pi \operatorname{ctg} \pi(\nu-k)}{\pi} \right\} = \\ &= (-1)^{n-k} (n-k-1)!, \quad k=0,1,2,\dots,n-1, \end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial J_{-\nu}(z)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n} &= (-1)^n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} + \\ &+ (-1)^n \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(n+p)!p!} \left\{ -\ln \frac{z}{2} + \psi(p+1) \right\} \left(\frac{z}{2}\right)^{2p+n}, \end{aligned}$$

где введен новый значок суммирования $p = k - n$.

Из формулы (I.28) следует, что искомое разложение функции Бесселя второго рода с целым положительным значком имеет вид

$$\begin{aligned} Y_n(z) &= -\frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} + \\ &+ \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}}{k!(n+k)!} \left\{ 2\ln \frac{z}{2} + \psi(k+1) - \psi(k+n+1) \right\}, \quad n=0,1,2,\dots, |argz| < \pi \quad (I.34) \end{aligned}$$

где в случаи $n=0$ первую сумму надлежит положить равной нулю.

⁶Переход к пределу при $\nu \rightarrow n$ под знаком суммы законен, так как ряд, полученный дифференцированием равномерно сходящегося ряда регулярных функций, сходится равномерно.

Значения логарифмической производной гамма-функции могут быть вычислены по формулам:

$$\begin{aligned}\psi(1) &= -\gamma, \\ \psi(m+1) &= -\gamma + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m},\end{aligned}\tag{I.35}$$

где $\gamma = 0,5772\dots$ -постоянная Эйлера $m = 1, 2, \dots$

Принимая во внимание равенство (I.3) можем представить разложение (I.34) в несколько другом виде, именно:

$$\begin{aligned}Y_n(z) &= \frac{2}{\pi} J_n(z) \ln \frac{z}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} - \\ &- \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}}{k!(n+k)!} \{\psi(k+1) + \psi(k+n+1)\}.\end{aligned}\tag{I.36}$$

Из (I.34) вытекает, что при $z \rightarrow 0$ справедливы асимптотические формулы

$$Y_0(z) \underset{z \rightarrow 0}{\approx} \frac{2}{\pi} \ln \frac{z}{2}, Y_n(z) \underset{z \rightarrow 0}{\approx} -\frac{(n-1)!}{\pi} \left(\frac{z}{2}\right)^{-n}, n = 1, 2, \dots,$$

показывающие, что $Y_n(z) \rightarrow \infty$ когда $z \rightarrow 0$.

I.6 Функции Бесселя третьего рода

К цилиндрическим функциям относятся также функции Бесселя третьего рода или функции Ханкеля $H_\nu^{(1)}(z)$ и $H_\nu^{(2)}(z)$, которые для произвольного ν и z , принадлежащего плоскости с разрезом вдоль полуоси $(-\infty, 0)$, определяются при помощи формул

$$H_\nu^{(1)}(z) = J_\nu(z) + iY_\nu(z), H_\nu^{(2)}(z) = J_\nu(z) - iY_\nu(z),\tag{I.37}$$

где $J_\nu(z), Y_\nu(z)$ -функции Бесселя первого и второго рода.

Целесообразность введения этих функций обусловлена тем, что рассматриваемые линейные комбинации из $J_\nu(z)$ и $Y_\nu(z)$ обладают наиболее простыми асимптотическими разложениями при больших z и часто встречаются в приложениях.

Из определения функция Ханкеля следует, что эти функции представляют собой регулярные функции z в плоскости с разрезом $(-\infty, 0)$ и целые функции ν . Рассматриваемые функции линейно независимы между собой и по отношению к $J_\nu(z)$, так что общий интеграл уравнения Бесселя (I.22) может быть, наряду с (I.29), представлен в одной из следующих форм:

$$u = Z_\nu(z) = A_1 J_\nu(z) + A_2 H_\nu^{(1)}(z) = B_1 J_\nu(z) + B_2 H_\nu^{(2)}(z) = D_1 H_\nu^{(1)}(z) + D_2 H_\nu^{(2)}(z)\tag{I.38}$$

где A_1, \dots, D_2 - произвольные постоянные.

Являясь линейными комбинациями функций $J_\nu(z)$ и $Y_\nu(z)$, функции Ханкеля удовлетворяют тем же рекуррентным соотношениям, что и эти функции, например,

$$\left. \begin{aligned}H_{\nu-1}^{(i)}(z) + H_{\nu+1}^{(i)}(z) &= \frac{2\nu}{z} H_\nu^{(i)}(z), \\ H_{\nu-1}^{(i)}(z) - H_{\nu+1}^{(i)}(z) &= 2 \frac{dH_\nu^{(i)}(z)}{dz}, \\ \frac{d}{dz} z^\nu H_\nu^{(i)}(z) &= z^\nu H_{\nu-1}^{(i)}(z), \\ \frac{d}{dz} z^{-\nu} H_\nu^{(i)}(z) &= -z^{-\nu} H_{\nu+1}^{(i)}(z)\end{aligned}\right\}\tag{I.39}$$

1.7. Функции Бесселя мнимого аргумента

и т.д.

Если с помощью (I.26) исключить из (I.37) функцию Бесселя второго рода, то получим

$$\begin{aligned} H_\nu^{(1)} &= \frac{J_{-\nu}(z) - e^{-i\nu\pi} J_\nu(z)}{i \sin \nu \pi} \\ H_\nu^{(2)} &= \frac{e^{i\nu\pi} J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)}{i \sin \nu \pi} \end{aligned} \quad (\text{I.40})$$

откуда вытекают важные соотношения:

$$H_{-\nu}^{(1)}(z) = e^{i\nu\pi} H_\nu^{(1)}(z), \quad H_{-\nu}^{(2)}(z) = e^{-i\nu\pi} H_\nu^{(2)}(z). \quad (\text{I.41})$$

1.7 Функции Бесселя мнимого аргумента

С функциями Бесселя тесно связаны две часто встречающиеся в приложениях функции $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$, которые для z , принадлежащего плоскости с разрезом вдоль отрицательной полуоси $(-\infty, 0)$ и произвольного ν , могут быть определены при помощи формул:

$$I_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}, \quad |z| < \infty, \quad |\arg z| < \pi, \quad (\text{I.42})$$

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin \nu \pi}, \quad |\arg z| < \pi, \quad \nu \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (\text{I.43})$$

и при целом $\nu = n$:

$$K_n(z) = \lim_{\nu \rightarrow n} K_\nu(z), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (\text{I.44})$$

Повторяя рассуждения раздела 1.3, получаем, что $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$ представляют собой регулярные функции z в плоскости с разрезом $(-\infty, 0)$ и целые функции ν .

Рассматриваемые функции просто связаны с функциями Бесселя от аргумента $ze^{\pm \frac{\pi}{2}i}$.

Действительно, предположим, что $-\pi < \arg z < \frac{\pi}{2}$. Тогда $-\frac{\pi}{2} < \arg ze^{\frac{i\pi}{2}} < \pi$ и из (I.15) следует

$$J_\nu(ze^{\frac{i\pi}{2}}) = e^{\frac{i\nu\pi}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} = e^{\frac{i\nu\pi}{2}} I_\nu(z),$$

откуда

$$I_\nu(z) = e^{-\frac{i\nu\pi}{2}} J_\nu(ze^{\frac{i\pi}{2}}), \quad (\text{I.45})$$

для всех $-\pi < \arg z < \frac{\pi}{2}$.

Аналогично из формулы (I.40) получаем для таких же z

$$H_\nu^{(1)}(ze^{\frac{i\pi}{2}}) = \frac{J_{-\nu}(ze^{\frac{i\pi}{2}}) - e^{-i\nu\pi} J_\nu(ze^{\frac{i\pi}{2}})}{i \sin \nu \pi} = \frac{e^{-\frac{i\nu\pi}{2}} I_{-\nu}(z) - e^{-\frac{i\nu\pi}{2}} I_\nu(z)}{i \sin \nu \pi} = \frac{2}{\pi i} e^{-\frac{i\nu\pi}{2}} K_\nu(z),$$

откуда

$$K_\nu(z) = \frac{\pi i}{2} e^{\frac{i\nu\pi}{2}} H_\nu^{(1)}(ze^{\frac{i\pi}{2}}), \quad -\pi < \arg z < \frac{\pi}{2}. \quad (\text{I.46})$$

Для значений $-\frac{\pi}{2} < \arg z < \pi$ функции $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$ могут быть выражены через функции Бесселя от аргумента $ze^{-\frac{i\pi}{2}}$. Имеем

$$I_\nu(z) = e^{\frac{i\nu\pi}{2}} J_\nu(ze^{-\frac{i\pi}{2}}), \quad K_\nu(z) = -\frac{\pi i}{2} e^{-\frac{i\nu\pi}{2}} H_\nu^{(2)}(ze^{-\frac{i\pi}{2}}) \quad (\text{I.47})$$

для всех $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arg} z < \pi$

На основании полученных соотношений функции $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$ называются функциями мнимого аргумента⁷. Функция $K_\nu(z)$ известна в литературе также под названием функции Макдональда.

Из выведенных формул непосредственно следует, что рассматриваемые функции представляют собой линейно независимые решения дифференциального уравнения

$$u'' + \frac{1}{z}u' - \left(1 + \frac{\nu^2}{z^2}\right)u = 0, \quad (\text{I.48})$$

которое отличается от уравнения Бесселя только знаком одного члена и переходит в него при подстановке $z = \pm it$.

Уравнение (I.48) часто встречается в математической физике. Общий интеграл этого уравнения при произвольном ν может быть записан в виде

$$u = C_1 I_\nu(z) + C_2 K_\nu(z) \quad (\text{I.49})$$

Функции $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$ удовлетворяют простым рекуррентным соотношениям:

$$\left. \begin{aligned} I_{\nu-1}(z) - I_{\nu+1}(z) &= \frac{2\nu}{z} I_\nu(z), \\ K_{\nu-1}(z) - K_{\nu+1}(z) &= -\frac{2\nu}{z} K_\nu(z), \\ I_{\nu-1}(z) + I_{\nu+1}(z) &= 2I'_\nu(z), \\ K_{\nu-1}(z) + K_{\nu+1}(z) &= -2K'_\nu(z), \\ \frac{d}{dz} z^\nu I_\nu(z) &= z^\nu I_{\nu-1}(z), \\ \frac{d}{dz} z^\nu K_\nu(z) &= -z^{-\nu} K_{\nu-1}(z), \\ \frac{d}{dz} z^{-\nu} I_\nu(z) &= z^{-\nu} I_{\nu+1}(z), \\ \frac{d}{dz} z^{-\nu} K_\nu(z) &= -z^{-\nu} K_{\nu+1}(z) \end{aligned} \right\} \quad (\text{I.50})$$

и т.д.

Рекуррентные формулы, содержащие функции $I_\nu(z)$, доказываются подстановкой в них ряда (I.42). Соответствующие формулы для функции $K_\nu(z)$ при ν , отличном от целого числа, проверяются путем подстановки в них выражения (I.43) и использования формул первой группы. Справедливость последних соотношений при целом ν следует из непрерывности рассматриваемых функций по отношению к значку.

Укажем еще на две полезные формулы:

$$\left. \begin{aligned} I_{-n}(z) &= I_n(z), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \\ K_{-\nu}(z) &= K_\nu(z), \end{aligned} \right\} \quad (\text{I.51})$$

первая из которых вытекает из (I.42), если принять во внимание, что при $\nu = -n$ первые n членов разложения обращает в нуль, в то время как вторая является прямым следствием определения функции Макдональда (I.43).

⁷Это название следует признать не слишком удачным. Более целесообразным является термин "модифицированные функции Бесселя" принятый некоторыми авторами.

I.8. Цилиндрические функции с индексом, равным половине нечетного целого числа

Разложение функции $K_n(z)$ при $n=0,1,2,\dots$ может быть получено из (I.44) методом I.5. Приведем окончательный результат вычисления.

$$K_n(z) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k (n-k-1)!}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} + \frac{1}{2} (-1)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n}}{k!(k+n)!} \left\{ 2ln \frac{z}{2} - \psi(k+1) - \psi(k+n+1) \right\}, \quad (I.52)$$

$n = 0, 1, 2, \dots; |argz| < \pi$

Здесь $\psi(z)$ — логарифмическая производная гамма-функции, значения которой могут быть найдены по формулам (I.35). Для случая $n=0$ первая из сумм надлежит считать равной нулю.

Из (I.52) вытекает, что асимптотическое поведение функции $K_n(z)$ при $z \rightarrow 0$ определяется формулами

$$K_0(z) \underset{z \rightarrow 0}{\approx} ln \frac{2}{z}; K_n(z) \underset{z \rightarrow 0}{\approx} \frac{1}{2} (n-1)! \left(\frac{z}{2}\right)^{-n}, n = 1, 2, \dots, \quad (I.53)$$

поэтому $K_n(z) \underset{z \rightarrow 0}{\rightarrow} \infty$

I.8 Цилиндрические функции с индексом, равным половине нечетного целого числа

Специальный класс цилиндрических функций образуют цилиндрические функции с индексом, равным половине нечетного целого числа. В рассматриваемом случае цилиндрические функции могут быть выражены через элементарные функции. Чтобы показать это, найдем предварительно значения функций $J_{\pm \frac{1}{2}}(z)$, для чего положим в (I.15) $\nu = \pm \frac{1}{2}$ и воспользуемся для преобразования рядов формулой удвоения гамма-функции ($2^{2z-1} \Gamma(z) \Gamma(z + \frac{1}{2}) = \pi^{\frac{1}{2}} \Gamma(2z)$). Тогда получим

$$J_{\frac{1}{2}}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{1}{2}+2k}}{\Gamma(k+1) \Gamma(k+\frac{3}{2})} = \left(\frac{2z}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \sin z \quad (I.54)$$

и аналогично

$$J_{-\frac{1}{2}}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \cos z \quad (I.55)$$

Возможность выразить функцию Бесселя первого рода с любым полуцелым значком через элементарные функции следует теперь из рекуррентной формулы (I.19)

$$J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z} J_{\nu}(z),$$

пользуясь которой можно последовательно получить:

$$J_{\frac{3}{2}}(z) = \frac{1}{z} J_{\frac{1}{2}}(z) - J_{-\frac{1}{2}}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\sin z}{z} - \cos z \right],$$

$$J_{-\frac{3}{2}}(z) = - \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\sin z + \frac{\cos z}{z} \right]$$

и т.д.

Общее выражение для $J_{n+\frac{1}{2}}(z)$ через элементарные функции получается из формул (I.20). Например, если положить во второй из них $\nu = \frac{1}{2}$ и воспользоваться результатом (I.54), то находим:

$$J_{n+\frac{1}{2}}(z) = (-1)^n \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} z^{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{d}{zdz}\right)^n \frac{\sin z}{z}, n = 0, 1, 2, \dots \quad (I.56)$$

Соответствующие формулы для функций Бесселя второго и третьего рода могут быть выведены из найденных соотношений, если воспользоваться выражениями этих функций через функции Бесселя первого рода ((I.26) и (I.40)). Например, имеем:

$$\left. \begin{aligned} Y_{\frac{1}{2}}(z) &= -J_{-\frac{1}{2}} = -\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \cos z, \\ H_{\frac{1}{2}}^{(1)}(z) &= -i\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} e^{iz}, H_{\frac{1}{2}}^{(2)}(z) = i\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-iz} \end{aligned} \right\} \quad (I.57)$$

и т.д.

В заключении укажем на формулы:

$$I_{\frac{1}{2}}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sh} z, I_{-\frac{1}{2}}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{ch} z, K_{\frac{1}{2}}(z) = \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-z} \quad (I.58)$$

вытекающие из определений рассматриваемых функций ((I.42), (I.43)).

Формулы для других полуцелых значений индекса получаются из этих формул с помощью рекуррентных соотношений (I.50). Лиувиллем доказано, что случай полуцелого индекса является единственным, когда цилиндрические функции приводятся к элементарным.

I.9 Описание свойств цилиндрических функций

Содержание этого параграфа составляет краткое описание свойств цилиндрических функций с аргументом $x \geq 0$ и $\nu \geq 0$. Для таких значений x и ν функций Бесселя первого рода $J_\nu(x)$ представляет собой вещественную ограниченную функцию переменного x , имеющую колебательный характер. Поведение рассматриваемой функции при малых и больших значениях x дается соответственными формулами:

$$\left. \begin{aligned} J_\nu(x) &\underset{x \rightarrow 0}{\approx} \frac{x^\nu}{2^\nu \Gamma(1+\nu)}, \\ J_\nu(x) &\underset{x \rightarrow \infty}{\approx} \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned} \right\} \quad (I.59)$$

Функция $J_\nu(x)$ имеет бесконечное множество нулей, к числу которых в случае $\nu > 0$ принадлежит также точка $x=0$. Графики функций $J_0(x)$ и $J_1(x)$ показаны на рис.1.

Функция Бесселя второго рода $Y_\nu(x)$ при $x > 0$ представляет вещественную ограниченную на бесконечности колеблющуюся функцию. Поведение этой функции. Поведение этой функции при малых и больших значениях x характеризуется асимптотическими формулами:

$$\left. \begin{aligned} Y_\nu(x) &\underset{x \rightarrow 0}{\approx} -\frac{2^\nu \Gamma(\nu)}{\pi x^\nu}, & \nu > 0, \\ Y_\nu(x) &\underset{x \rightarrow 0}{\approx} \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \\ Y_0(x) &\underset{x \rightarrow 0}{\approx} -\frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{x}, \end{aligned} \right\} \quad (I.60)$$

I.9. Цилиндрические функции с вещественным положительным аргументом и значком

Функция Ханкеля $H_\nu^{(1)}(x)$ и $H_\nu^{(2)}(x)$ для рассматриваемых значений x и ν являются комплексно сопряженными функциями, ограниченными при $x > 0$. Поведение этих функций для малых и больших значений x дается формулами:

$$\left. \begin{aligned} H_\nu^{(1),(2)}(x) &\underset{x \rightarrow 0}{\approx} \mp i \left(\frac{2}{x}\right)^\nu \frac{\Gamma(\nu)}{\pi}, \nu > 0, \\ H_\nu^{(1),(2)}(x) &\underset{x \rightarrow \infty}{\approx} i \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\pm i(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4})}, \\ H_0^{(1),(2)}(x) &\underset{x \rightarrow 0}{\approx} \mp i \frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{x}, \end{aligned} \right\} \quad (I.61)$$

где верхний знак относится к функции первого, нижний - к функции второго рода. Очевидно, что $H_\nu^{(1),(2)}(x) \rightarrow \infty, x \rightarrow 0$.

Функция Бесселя мнимого аргумента $I_\nu(x)$ и $K_\nu(x)$ представляют собой вещественные положительные монотонные функции переменного x , из которых первая неограниченно растет, вторая убывает при возрастании x . Для малых $x \rightarrow 0$:

$$\left. \begin{aligned} I_\nu(x) &\underset{x \rightarrow 0}{\approx} \frac{x^\nu}{2^\nu \Gamma(1+\nu)}, K_\nu(x) \underset{x \rightarrow 0, \nu > 0}{\approx} \frac{2^{\nu-1} \Gamma(\nu)}{x^\nu}, \\ K_0(x) &\underset{x \rightarrow 0}{\approx} \ln \frac{2}{x}, \end{aligned} \right\} \quad (I.62)$$

поэтому $I_\nu(0) = 0 (\nu > 0), I_0(0) = 1, K_\nu(0) = \infty$

На рисунке 1 представлены графики Бесселевых функций, полученные в Maple.

```
> restart;
> YY:=plot([BesselJ(0, x),BesselJ(1, x)],x=0..25,color=black,thickness=[1,2]):
> YY;
> tt:=plots[textplot]([4,0.8,'I[1](x)'],font=[TIMES,BOLD,14],align=right):
> aa:=plots[textplot]([5,-0.4,'I[0](x)'],font=[TIMES,BOLD,14],align=right):
> plots[display](YY,tt,aa);
```

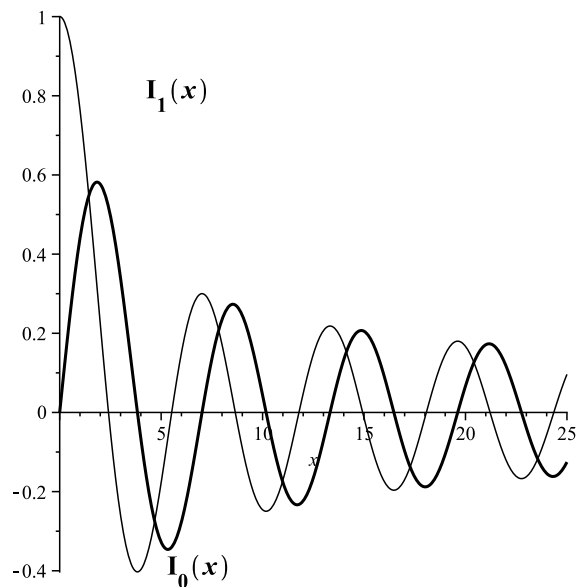


Рис. 1. Бесселевы функции $I_0(x), I_1(x)$

Асимптотическое поведение рассматриваемых функций при $x \rightarrow 0$ представляется равенствами:

$$I_\nu(x) \approx \frac{e^x}{(2\pi x)^{\frac{1}{2}}}, K_\nu(x) \approx \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-x}. \quad (\text{I.63})$$

Функции $I_\nu(x)$ и $K_\nu(x)$ не имеют нулей при $x > 0$.

I.10 Нули цилиндрических функций

При решении многих прикладных вопросов необходимо иметь представление о распределении нулей цилиндрических функций на плоскости комплексного переменного и уметь приближенно вычислять их значения.

Распределение нулей функции Бесселя с целым положительным значком, то есть решений уравнения

$$J_n(z) = 0, n = 0, 1, 2, \dots, \quad (\text{I.64})$$

устанавливается следующей теоремой.

Теорема 1. *Функция $J_n(z) = 0$ ($n=0, 1, 2, \dots$) не имеет комплексных нулей и имеет бесконечное множество вещественных нулей, расположенных симметрично относительно точки $z=0$, которая, в случае $n=1, 2, 3, \dots$ является соответственно нулем кратности n*

Распределение нулей функции Бесселя с произвольным вещественным индексом ν , то есть решений уравнения

$$J_\nu(z) = 0, \nu - \text{вещественно}, \quad (\text{I.65})$$

дается более общей теоремой 2.

Теорема 2. *Функция $J_\nu(z)$ ($|\arg z| < \pi, \nu$ — любое вещественное число) имеет бесконечное множество вещественных положительных нулей и конечное число $2N(\nu)$ комплексных сопряженных нулей, где, в зависимости от значения параметра ν*

$$(1) N(\nu) = 0, \nu > -1 \text{ или } \nu = -1, -2, -3, \dots$$

$$(2) N(\nu) = m \text{ при } -(m+1) < \nu < -m, m = 1, 2, \dots$$

Если $-2m < \nu < -(2m-1)$, среди комплексных нулей имеется пара чисто мнимых.

Все нули функции простые, исключая, может быть, точку $z=0$.

В математической физике часто встречается уравнение

$$\alpha J_\nu(z) + \beta z J'_\nu(z) = 0, \nu > -1 \quad (\text{I.66})$$

(где α и β — заданные вещественные числа, $|\arg z| < \pi$), которое можно рассматривать как обобщение уравнения (I.64). При указанном ограничении параметра ν рассматриваемое уравнение имеет бесконечное множество положительных корней и не имеет комплексных корней, за исключением случая $\frac{\alpha}{\beta} + \nu < 0$, когда это уравнение имеет 2 чисто мнимых корня.

Распределение нулей функции $I_\nu(z)$ может быть выведено из теоремы 2. В частности, отметим важный результат, что при $\nu > -1$ все нули функции $I_\nu(z)$ чисто мнимые. Функция Макдональда $\nu(z)$ при вещественном ν не имеет нулей в области $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2}$. Нули функции, лежащие в остальной части разрезанной плоскости, комплексные сопряженные и число их конечно.

Для приближенного вычисления корней уравнения, содержащих цилиндрические функции, применяется метод последовательных приближений, причем за хорошее начальное приближение во многих случаях могут быть приняты корни уравнений, получающиеся из исходных при замене цилиндрических функций их асимптотическими представлениями.

I.11 Разложение произвольных функций

В математической физики часто возникает необходимость разложить заданную функцию в ряд или интеграл по цилиндрическим функциям, причем вид разложения определяется конкретными условиями задачи. Мы рассмотрим наиболее важные из этих разложений, которые играют в различных положениях цилиндрических функций такую же роль, как разложения в ряды интегралы Фурье в приложениях тригонометрических функций. Первое место среди разложений рассматриваемого класса занимают ряды вида

$$f(r) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m J_{\nu} \left(x_{\nu m} \frac{r}{a} \right), \quad 0 < r < a, \quad (\text{I.67})$$

где $f(r)$ -заданная в интервале $(0, a)$ функция, $J_{\nu}(x)$ -функция Бесселя порядка $\nu > -\frac{1}{2}$, $x_{\nu m}$ положительные корни уравнения $J_{\nu}(x) = 0$, расположенные в порядке возрастания.

Коэффициенты разложения c_m могут быть определены на основании свойства ортогональности система функций $J_{\nu} \left(x_{\nu m} \frac{r}{a} \right)$ ($m = 1, 2, \dots$), которое получается следующим образом. Умножим уравнения

$$u''_{\alpha} + \frac{1}{r} u'_{\alpha} + \left(\alpha^2 - \frac{\nu^2}{r^2} \right) u_{\alpha} = 0, \quad u''_{\beta} + \frac{1}{r} u'_{\beta} + \left(\beta^2 - \frac{\nu^2}{r^2} \right) u_{\beta} = 0$$

которым удовлетворяют функции $u_{\alpha} = J_{\nu}(\alpha r)$ и $u_{\beta} = J_{\nu}(\beta r)$ (α и β -произвольные числа), первое-на ru_{β} , второе-на ru_{α} , вычтем одно из другого и проинтегрируем по промежутку $(0, \alpha)$.

Мы находим тогда

$$(\alpha^2 - \beta^2) \int_0^{\alpha} r u_{\alpha} u_{\beta} dr = (r(u_{\alpha} u'_{\beta} - u_{\beta} u'_{\alpha})) \Big|_0^{\alpha}$$

, откуда, в предположении $\nu > -1$, следует

$$\int_0^a r J_{\nu}(\alpha r) J_{\nu}(\beta r) dr = \frac{a\beta J_{\nu}(a\alpha) J'_{\nu}(\beta a) - a\alpha J_{\nu}(a\beta) J'_{\nu}(\alpha a)}{\alpha^2 - \beta^2}. \quad (\text{I.68})$$

Если положить в (I.68) $\alpha = \frac{x_{\nu m}}{a}$, $\beta = \frac{x_{\nu n}}{a}$, то получается равенство

$$\int_0^a r J_{\nu} \left(x_{\nu m} \frac{r}{a} \right) J_{\nu} \left(x_{\nu n} \frac{r}{a} \right) dr = 0, \quad m \neq n, \quad (\text{I.69})$$

Переходя к пределу $\beta \rightarrow \alpha$ в (I.68) и исключая вторые производные от функции Бесселя с помощью дифференциального уравнения (I.1), получаем

$$\int_0^a r J_{\nu}^2(\alpha r) dr = \frac{a^2}{2} \left[J_{\nu}^2(\alpha a) + \left(1 - \frac{\nu^2}{\alpha^2 a^2} \right) J_{\nu}^2(\alpha a) \right], \quad (\text{I.70})$$

откуда,если воспользоваться соотношением (I.6),имею

$$\int_0^a r J_\nu^2 \left(x_{\nu n} \frac{r}{a} \right) dr = \frac{a^2}{2} J_\nu'^2(x_{\nu n}) = \frac{a^2}{2} J_{\nu+1}^2(x_{\nu n}). \quad (I.71)$$

Предполагая,что разложение вида (I.67)возможно,нахожу формально,путем умножения на $r J_\nu \left(x_{\nu n} \frac{r}{a} \right)$ и интегрирования по промежутку $(0, a)$, следующие значения коэффициентов c_m :

$$c_m = \frac{2}{a^2 J_{\nu+1}^2(x_{\nu m})} \int_0^a f(r) r J_\nu \left(x_{\nu m} \frac{r}{a} \right) dr, m = 1, 2, \dots \quad (I.72)$$

Ряд (I.67) с коэффициентами,вычисленными по формулам (I.72), называется рядом Фурье-Бесселя.

Решение вопроса об условиях,обеспечивающих действительную сходимость рассматриваемого ряда к функции $f(r)$,дается следующей теоремой.

Теорема 3. Пусть $f(r)$ - произвольная функция,определенная на промежутке $(0, a)$ и удовлетворяющая условиям:

1°. $f(r)$ кусочно-непрерывна и имеет ограниченную вариацию во всяком открытом промежутке $(0, a)$;

2° интеграл $\int_0^a \sqrt{r} |f(r)| dr$ имеет конечное значение.

Тогда рядом Фурье-Бесселя сходится и имеет своей суммой $\frac{1}{2}[f(r+0) + f(r-0)]$, то есть представляет $f(r)$ во всяко точке непрерывности этой функции.

Обобщение рядов Фурье-Бесселя представляют ряды Дини, к которым я прихожу, рассматривая задачу о разложении функции $f(r)$ в ряд вида (I.67),где $x_{\nu m}$ - расположенные а порядке возрастания положительные корни уравнения $(\alpha J_\nu(z) + \beta z J_\nu'(z) = 0, \nu > -1)$

$$\alpha J_\nu(z) + \beta z J_\nu'(z) = 0. \quad (I.73)$$

Если воспользоваться соотношениями (I.68,I.70) и (I.73), то,так же как и выше,можно показать,что

$$\int_0^a r J_\nu \left(x_{\nu m} \frac{r}{a} \right) J_\nu \left(x_{\nu n} \frac{r}{a} \right) dr = \begin{cases} 0, m \neq n \\ \frac{a^2}{2} \left[J_\nu'^2(x_{\nu n}) + \left(1 - \frac{\nu^2}{x_{\nu n}^2}\right) J_\nu^2(x_{\nu n}) \right], m = n, \end{cases} \quad (I.74)$$

откуда для коэффициентов c_m получаются значения

$$c_m = \frac{2}{a^2 \left[J_\nu'^2(x_{\nu m}) + \left(1 - \frac{\nu^2}{x_{\nu m}^2}\right) J_\nu^2(x_{\nu m}) \right]} \int_0^a r f(r) J_\nu \left(x_{\nu m} \frac{r}{a} \right) dr. \quad (I.75)$$

Ряд (I.67) с коэффициентами,определяемыми формулами (I.75),носит название ряда Дини для функции $f(r)$. При условии, что $f(r)$ удовлетворяет условиям теоремы 1 и $\frac{\alpha}{\beta} + \nu > 0$,сумма ряда Дини равна $f(r)$ во всякой точке непрерывности функции.

Из интегральных разложений по функциям Бесселя первое место по своему прикладному значению занимает разложение в интеграл Фурье -Бесселя произвольной функции $f(r)$, определенной на промежутке $(0, \infty)$:

$$\left. \begin{aligned} f(r) &= \int_0^\infty \lambda J_\nu(\lambda r) d\lambda \int_0^\infty \rho J_\nu(\lambda \rho) f(\rho) d\rho, \\ 0 < r < \infty, \nu > -\frac{1}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (I.76)$$

Формула (I.76) справедлива во всякой точке непрерывности $f(r)$ при выполнении условий:

1°. $f(r)$ -кусочно-непрерывна и имеет ограниченную вариацию во всяком открытом промежутке $0 < r < a$;

$$\int_0^\infty \sqrt{r}|f(r)|dr$$

имеет конечное значение⁸

Формулу (I.76) часто называют также интегралом Ханкеля.

Примерами разложений рассматриваемого вида могут служить следующие формулы:

$$\frac{1}{\sqrt{z^2 + r^2}} = \int_0^\infty e^{-\lambda|z|} J_0(\lambda r) d\lambda, \quad (I.77)$$

$$\frac{e^{-k\sqrt{z^2+r^2}}}{\sqrt{z^2 + r^2}} = \int_0^\alpha e^{-|z|\sqrt{\lambda^2+k^2}} \frac{\lambda J_0(\lambda r)}{\sqrt{\lambda^2 + k^2}} d\lambda, \quad (I.78)$$

Другое интегральное разложение, совершенно иного типа, содержащее интегрирование по значку цилиндрической функции и оказавшееся полезным при рассмотрении различных проблем математической физики (было исследовано Лебедевым Н.Н.⁹ Это разложение имеет вид.

$$f(x) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^\infty \tau sh \pi \tau \frac{K_{i\tau}(x)}{\sqrt{x}} d\tau \int_0^\infty f(\xi) \frac{K_{i\tau}(\xi)}{\sqrt{\xi}} d\xi, \quad x > 0, \quad (I.79)$$

где $K_\nu(x)$ -функция Макдональда с мнимым значком $\nu = i\tau$, $f(x)$ -произвольная функция, заданная на интервале $(0, \infty)$ и удовлетворяющая условиям:

1°. $f(x)$ -кусочно-непрерывна и имеет ограниченную вариацию во всяком открытом промежутке $0 < x < a$; 2°. $f(x)$ - интегралы

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)| x^{-\frac{1}{2}} \ln \frac{1}{x} dx, \int_{\frac{1}{2}}^\infty |f(x)| dx \quad (I.80)$$

имеет конечное значение.

В точке разрыва левую часть (I.79) следует заметить полусуммой

$$\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)].$$

Примером разложения рассматриваемого типа может служить формула

$$f(x) = \sqrt{x} e^{-xcos\alpha} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\tau sh \alpha \tau}{sin \alpha} \frac{K_{i\tau}(x)}{\sqrt{x}} d\tau. \quad (I.81)$$

⁸В точках разрыва значение интеграла равно полусумме $\frac{1}{2}[f(r+0) + f(r-0)]$.

⁹Автор книги "Специальные функции и их разложения Москва 1963

Глава II

Функции Бесселя в пакете Maple. Графики функции

II.1 Цилиндрические функции в пакете Maple

Функции Бесселя вызываются командой *Bessel* .

В Maple для работы с цилиндрическими функциями используются команды:

Bessel(ν, x) — модифицированная функция Бесселя;

BesselJ(ν, x) — функция Бесселя первого рода;

BesselK(ν, x) — функция Макдональда;

BesselY(ν, x) — функция Бесселя второго рода;

HankelH1(ν, x) и *HankelH2*(ν, x) — функции Ханкеля.

Здесь ν -алгебраическое выражение (уравнение или множество),

x -алгебраическое выражение (аргумент).

BESSELJ и *BESSELY* функции Бесселя первого и второго рода соответственно. Они удовлетворяют уравнению Бесселя:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$$

BESSELI и *BESSELK* являются модифицированные функции Бесселя первого и второго рода соответственно. Они удовлетворяют модифицированное уравнение Бесселя:

$$x^2 y'' + xy' - (x^2 + \nu^2)y = 0$$

HankelH1 и *HankelH2* являются функции ганкелевы, также известные как функций Бесселя третьего рода. Они также удовлетворяют уравнению Бесселя, и связаны с *BESSELJ* и *BESSELY* по

$$HankelH1(\nu, x) = BesselJ(\nu, x) + IBesselY(\nu, x)$$

$$HankelH2(\nu, x) = BesselJ(\nu, x) - IBesselY(\nu, x)$$

II.2 Графики функция Бесселя

Функции Бесселя, по определению, являются решениями различных краевых задач для некоторых обыкновенных дифференциальных уравнений(ОДУ).

Функции Бесселя первого и второго рода обычно возникают как решения волнового уравнения с цилиндрическими граничными условиями.

II.2. Графики функций Бесселя

```
>restart:
>gr:=plot([BesselJ(0,x),BesselJ(1,x),BesselJ(2,x),BesselJ(3,x)],x=-8..10,
color=black,thickness=[1,2,3,4],legend=['BesselJ(0,x)', 'BesselJ(1,x)',
'BesselJ(2,x)', 'BesselJ(3,x)'],linestyle=[solid, longdash,dashdot,dot],
caption="Графики первых четырех функций Бесселя I-го рода",
captionfont=[TIMES,ROMAN,14]):
>gr;
```

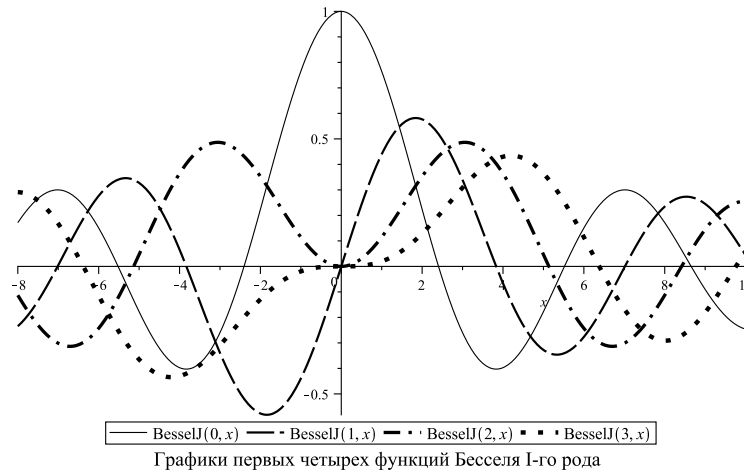


Рис. 2 Графики первых четырех функций Бесселя I-го рода

Нули функций Бесселя.

BesselJZeros - действительные нули функций Бесселя J

BesselYZeros - действительные нули функций Бесселя Y

BesselJZeros(ν , n)

BesselJZeros(ν , n1..n2)

BesselYZeros(ν , n)

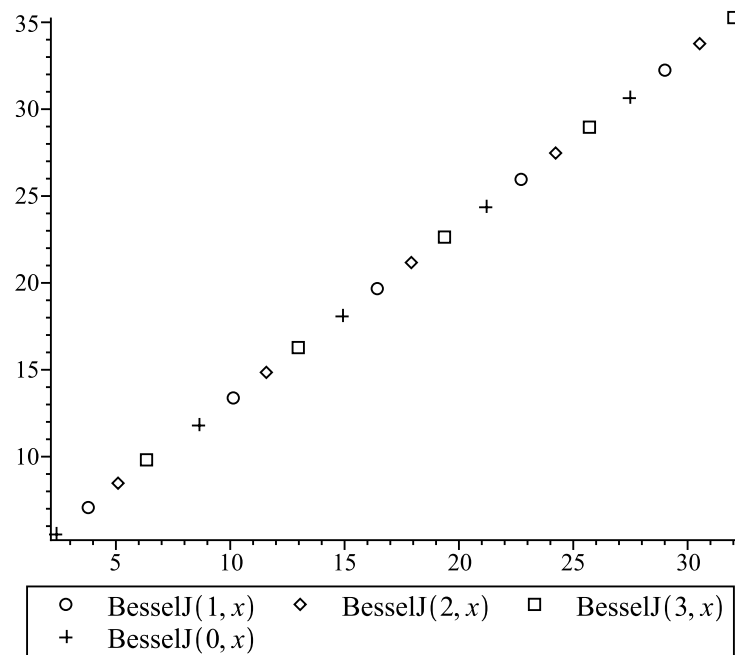
BesselYZeros(ν , n1..n2)

ν - алгебраическое выражение (порядок функции Бесселя)

n - алгебраическое выражение (индекс нуля)

n1, n2 - алгебраические выражения (диапазон n1 .. n2 индексов для последовательных нулей)

```
>G0:=plots[pointplot]([BesselJZeros(0., 1... 10)],color=black,
symbol=cross,symbolsize=14,legend='BesselJ(0,x)',
caption="Нули графиков первых четырех функций Бесселя I-го рода",
captionfont=[TIMES,ROMAN,14]):
>G1:=plots[pointplot]([BesselJZeros(1., 1... 10)],color=black,
symbol=circle,symbolsize=14,legend='BesselJ(1,x)'):
>G2:=plots[pointplot]([BesselJZeros(2., 1... 10)],color=black,
symbol=diamond,symbolsize=14,legend='BesselJ(2,x)'):
>G3:=plots[pointplot]([BesselJZeros(3., 1... 10)],color=black,
symbol=box,symbolsize=14,legend='BesselJ(3,x)'):
plots[display]({G0,G1,G2,G3});
```



Нули графиков первых четырех функций Бесселя I-го рода

Рис. 3 Нули графиков первых четырех функций Бесселя I-го рода

Функция Бесселя II-го рода.

```
>GR2:=plot([BesselI(0,x),BesselI(1,x),BesselI(2,x),BesselI(3,x)],
x=0..10,color=black,thickness=[1,1,3,4],legend=['BesselI(0,x)',
'BesselI(1,x)', 'BesselI(2,x)', 'BesselI(3,x)'],linestyle=[solid],
caption=Графики первых четырех функций Бесселя II-го рода",
captionfont=[TIMES,ROMAN,14]):
>GR2;
```


II.2. Графики функций Бесселя

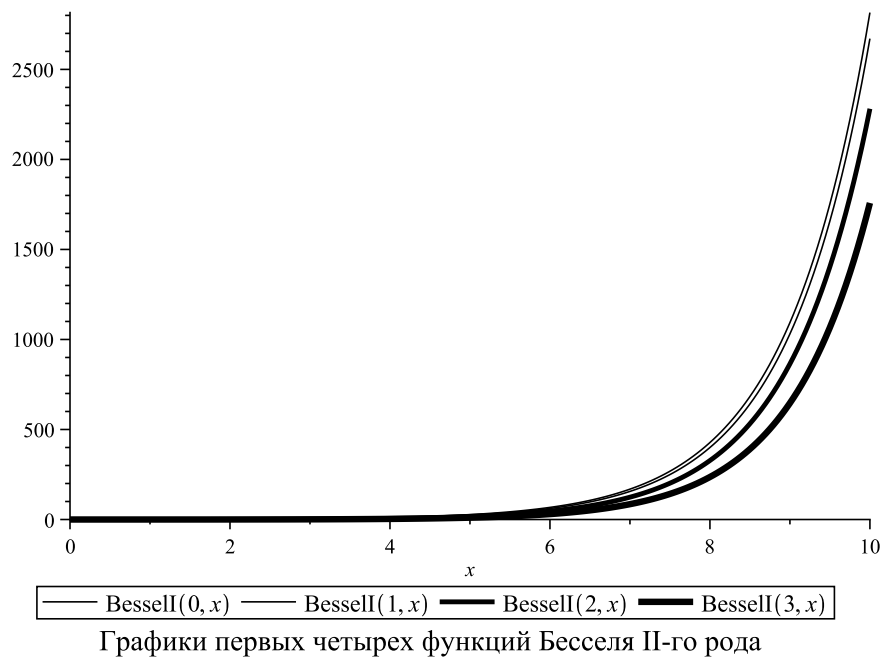


Рис. 4 Графики первых четырех функций Бесселя II-го рода

Модифицированные цилиндрические функции Бесселя.

Перечислим их:

$I_0(x)$ - модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка;

$I_1(x)$ - модифицированная функция Бесселя первого рода первого порядка;

$I_n(m, x)$ - модифицированная функция Бесселя первого рода m -го порядка;

$K_0(x)$ - модифицированная функция Бесселя второго рода нулевого порядка, $x > 0$;

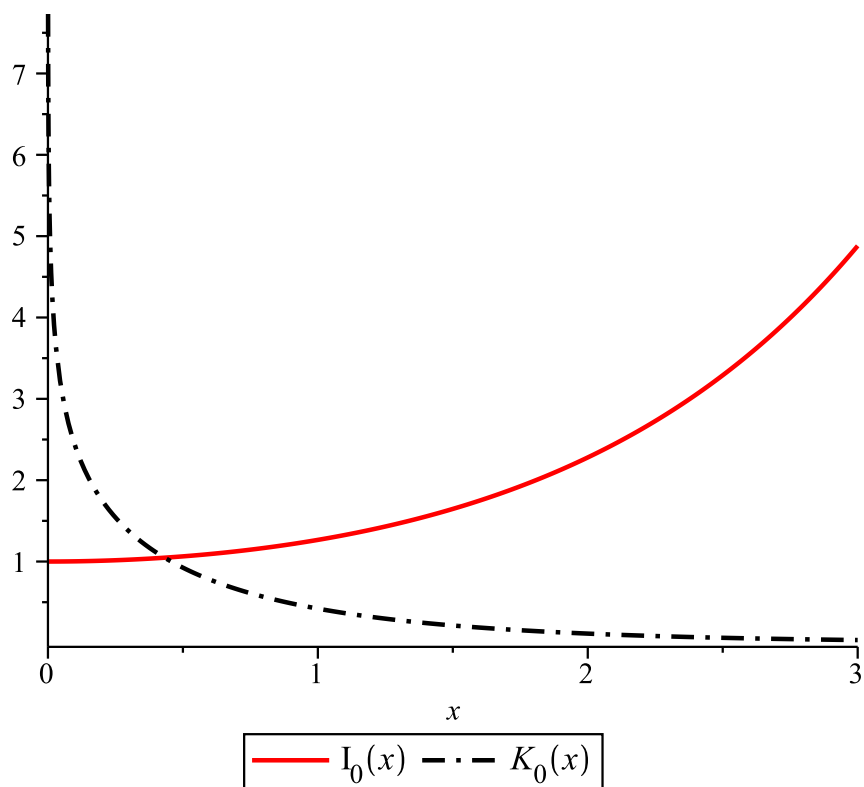
$K_1(x)$ - модифицированная функция Бесселя второго рода первого порядка, $x > 0$;

$K_n(m, x)$ - модифицированная функция Бесселя второго рода m -го порядка, $x > 0$;

x - действительный безразмерный скаляр;

m - порядок.

```
>q1:=plot(BesselK(0,x),x=0..3,color=black,linestyle = [dashdot],thickness=[2],  
legend = ['K[0](x)']):  
>q2:=plot(BesselI(0,x),x=0..3,thickness=[2],legend = ['I[0](x)'],caption=  
"Модифицированные цилиндрические функции Бесселя", captionfont=[TIMES,ROMAN,14])  
>plots[display]({q1,q2});
```



Модифицированные цилиндрические функции
Бесселя

Рис. 5 Модифицированные цилиндрические функции Бесселя

В следующем рисунке представлена поверхность $z = f(x, \nu) = J_\nu(x)$, которая показывает, как изменяются функции $J_\nu(x)$, если непрерывно изменять переменные x и ν .

Для $\nu = 0$ функция $J_0(x)$ равна единице при $x=0$. Это единственная функция Бесселя, имеющая при $x=0$ конечное значение, не равное нулю. Для $\nu > 0$ все функции $J_\nu(x) = 0$ при $x=0$.

```
>plot3d(BesselJ(nu,x),nu=0..150,x=0..50, axes = "box",
captionfont=[TIMES,ROMAN,14]);
```

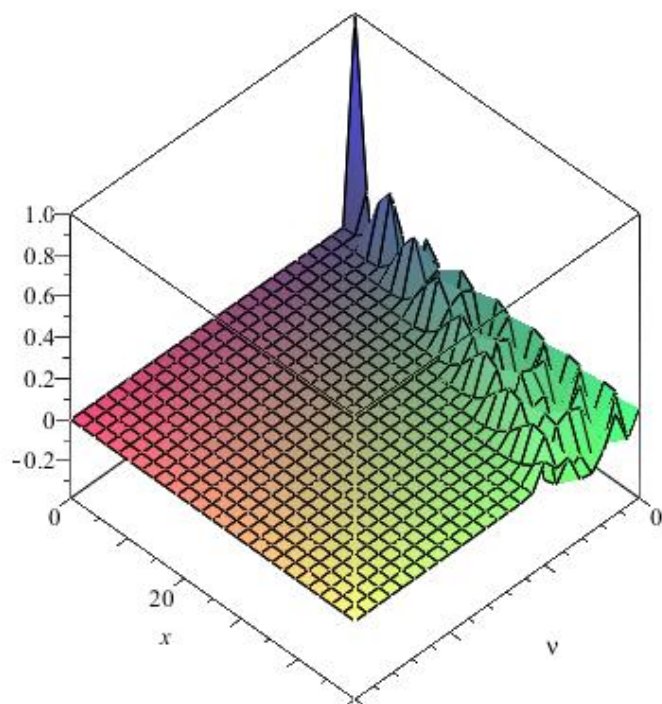


Рис. 6 Поверхность $z = f(x, \nu) = J_\nu(x)$

Глава III

Создание анимационных процедур

III.1 Процедура анимации аппроксимативной функции с помощью ряда по функциям Бесселя

Создание собственных процедур. Разложение функции в ряд функции Бесселя.

Пусть требуется разложить на интервале $(0, a)$ функцию $f(r)$. Тогда разложение функции Бесселя имеет вид:

$$f(r) = \sum_{m=1}^N c_{\nu m} J_{\nu}(x_{\nu m} \frac{r}{a}), \text{ где}$$
$$J_{\nu}(x)\text{-функция Бесселя порядка } \nu > -\frac{1}{2},$$
$$x_{\nu m}\text{—положительные корни уравнения,}$$
$$J_{\nu}(x) = 0, \text{ расположенные в порядке возрастания.}$$
$$c_{\nu m} = \frac{2}{a^2 J_{\nu+1}^2(x_{\nu m})} \int_0^a f(r) r J_{\nu}(x_{\nu m} \frac{r}{a}) dr, m = 1, 2, \dots$$

Получить первые n членов разложение в ряд функции Бесселя можно с помощью следующей процедуры:

```
>restart:
#x<a, x>0
> C:=proc (f,x,nu,m,a) local F,X,Y,r:
  F:=(X)->subs(x=X,f):
  Y:=(nu,m)->evalf(BesselJZeros(nu,m),6):#Нули
  2/(a^2*BesselJ(nu+1,Y(nu,m))^2)*int(F(r)*r*BesselJ(nu,Y(nu,m)*r/a),r=0..a):
end proc:
> evalf(BesselJZeros(1, 2));
7.015586670
> C(x^2,x,1,2,2);
-3.673519712
> Bessel_Ser:=proc(f,r,nu,a,N) local F,R,X,Nu,M,m,CC,A,JJ,xx:
  F:=(R)->subs(r=R,f):
  X:=(nu,m)->evalf(BesselJZeros(nu,m),6):
  JJ:=(nu,r,m,a)->BesselJ(nu,X(nu,m)*r/a):
  sum(C(F(r),r,nu,m,a)*JJ(nu,r,m,a),m=1..N):
end proc:
> Bessel_Ser(r^2,r,2,2,10);
4.586076843*BesselJ(2., 2.567811151*r)-
3.502176911*BesselJ(2., 4.208622070*r)+
```

III.1. Процедура разложения функций в ряд по функциям Бесселя

```
2.961918349*BesselJ(2., 5.809920585*r)-  
2.617829342*BesselJ(2., 7.397975890*r)+  
2.372808190*BesselJ(2., 8.979909745*r)-  
2.186490726*BesselJ(2., 10.55849852*r)+  
2.038476354*BesselJ(2., 12.13505616*r)-  
1.917138239*BesselJ(2., 13.71028678*r)+  
1.815280446*BesselJ(2., 15.28460225*r)-  
1.728171462*BesselJ(2., 16.85825976*r)
```

```
>plot([sin(x),Bessel_Ser(sin(x),x,1,Pi,5),Bessel_Ser(sin(x),x,1,Pi,10),  
Bessel_Ser(sin(x),x,1,Pi,50)],x=0..1,color=[green,black,blue,red]);
```

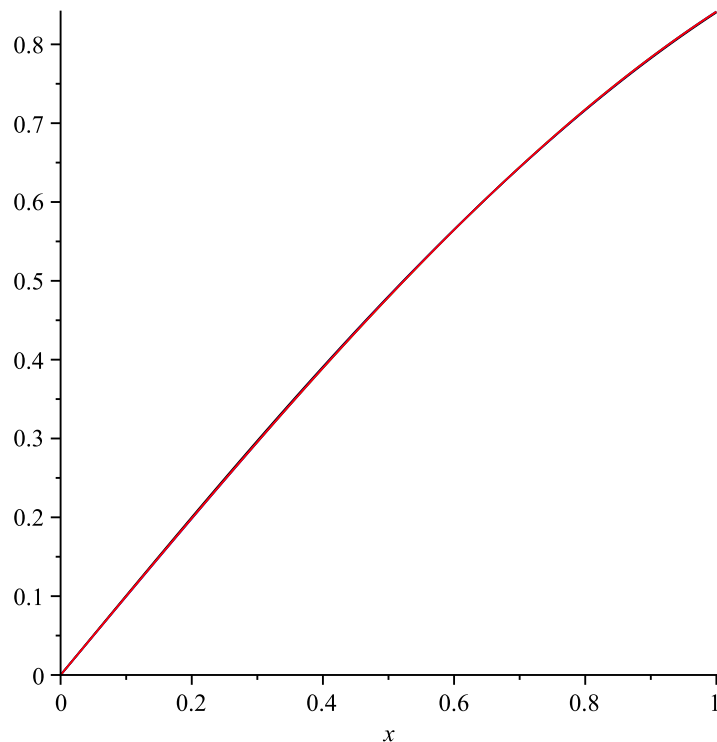


Рис. 7 График четырех функции Бесселя

```
> Anim:=proc(f,r,nu,a,N) local F,R,X,Nu,M,m,CC,A,JJ,xx,ff,k,GF,GRFF,GGF:  
F:=(R)->subs(r=R,f):  
ff:=(k,r)->Bessel_Ser(f,r,nu,a,k):  
GF:=plot(F(r),r=0..a,color=blue,thickness=2):  
GRFF:=(k)->plot(ff(k,r),r=0..a,color=red,title=convert(K=k,string)):  
GGF:=(k)->plots[display](GF,GRFF(k)):  
plots[display](seq(GGF(k),k=1..N),insequence=true):  
end proc:  
#GF(1):  
> Anim(r^2,r,5,2,10);
```

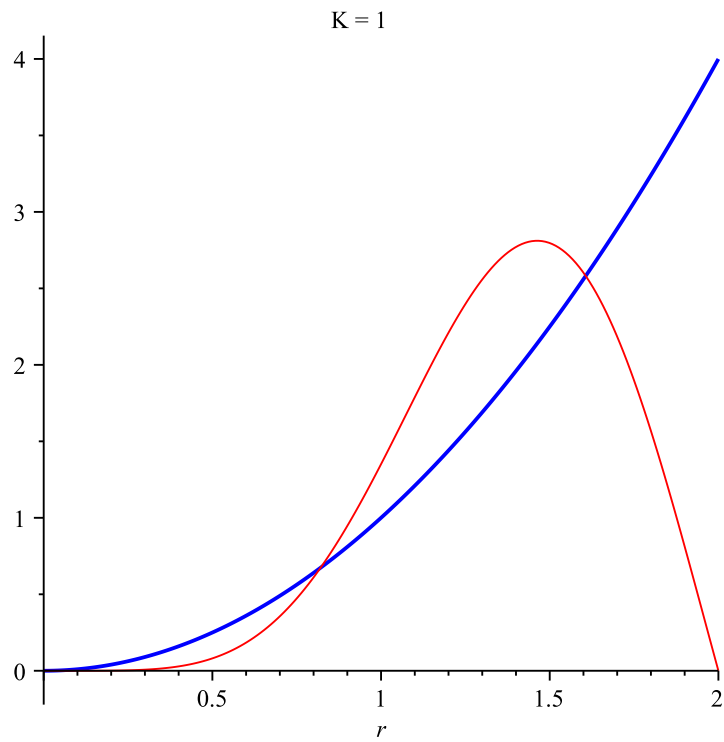


Рис. 8 Анимация разложения функции в ряд по функции Бесселя

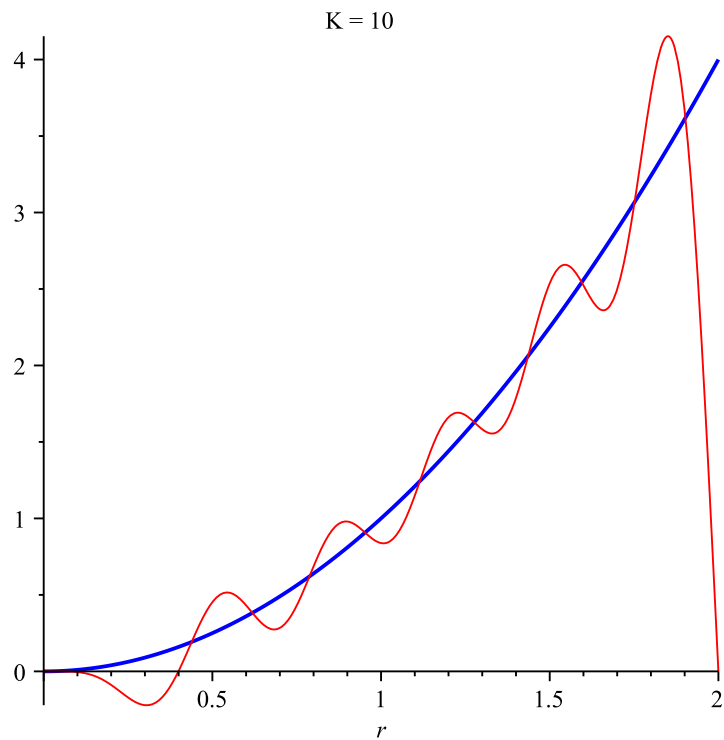


Рис. 9 Анимация разложения функции в ряд по функции Бесселя

Порядок обращения к этой процедуре такой:

$Bessel(f,r,\nu,a,N)$, где f -имя функции, разложение которой требуется найти, где r -имя

III.2. Пример решения типовых задач

независимой переменной, где ν -порядок функции, $\nu > -\frac{1}{2}$, где $(0, a)$ интервал разложения, где N - число членов ряда.

III.2 Пример решения типовых задач

Разложить функцию $f(x) = 1 - \frac{x^2}{b^2}$ на отрезке $[0, b]$ в ряд по собственным функциям $y_n(x) = J_0\left(\frac{a_n x}{b}\right)$, где a_n - n -й по величине нуль функций $J_0(x)$.

Решение: Функция $y_n(x) = J_0\left(\frac{a_n x}{b}\right)$ являются собственными функциями краевой задачи $\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + \lambda r R = 0$, $0 < r < a$, либо $R|_{r=0} = 0(1)$, $R|_{r=a} = 0$, рассмотренный в разделе "Задачи Штурма-Лиувилля связанная с цилиндрическими функциями" (Голосков Д.П. Уравнения математической физики). Эти функции ортогональны на отрезке $[0, b]$ с весом $\rho(x) = x$, причем квадрат нормы

$$\left\| J_0\left(\frac{a_n x}{b}\right) \right\|^2 = \int_0^b x J_0^2\left(\frac{a_n x}{b}\right) dx = \frac{b^2}{2} J_1^2(a_n)$$

Находим коэффициенты разложения

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{b^2} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_0\left(\frac{a_n x}{b}\right)$$

по формуле

$$C_n = \frac{2}{b^2 J_1^2(a_n)} \int_0^b x f(x) J_0\left(\frac{a_n x}{b}\right) dx$$

Воспользуемся вычисленным интегралом, стоящий справа в последней формуле (раздел "Задача о колебаниях круглой мембраны" [4],). Таким образом, получим

$$C_n = \frac{8}{a_n^3 J_1(a_n)},$$

и следовательно,

$$1 - \frac{x^2}{b^2} = 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{a_n x}{b}\right)}{a_n^3 J_1(a_n)}$$

Продемонстрируем, как этот пример решается Maple. Задаем уравнение:

```
> FF:=(x, b, N)->Bessel_Ser(1-x^2/b^2, x, 1, b, N);
      FF := (x, b, N) ->Bessel_Ser(1-x^2/b^2, x, 1, b, N)
> FF(r, 1, 10);
```

```
1.369401040*BesselJ(1., 3.831705970*r)+.
4012811455*BesselJ(1., 7.015586670*r)+.
3493405386*BesselJ(1., 10.17346814*r)+
0.2247851406 BesselJ(1., 13.32369194 r)+
0.2022282840 BesselJ(1., 16.47063005 r)+
0.1556747236 BesselJ(1., 19.61585851 r)+
0.1429891812 BesselJ(1., 22.76008438 r)+
0.1189532304 BesselJ(1., 25.90367209 r)+
0.1107943800 BesselJ(1., 29.04682854 r)+
0.09620837900 BesselJ(1., 32.18967991 r)
```

```
> plot(FF(t, 1, 10), t=0..1, thickness = 2, color=black);
```

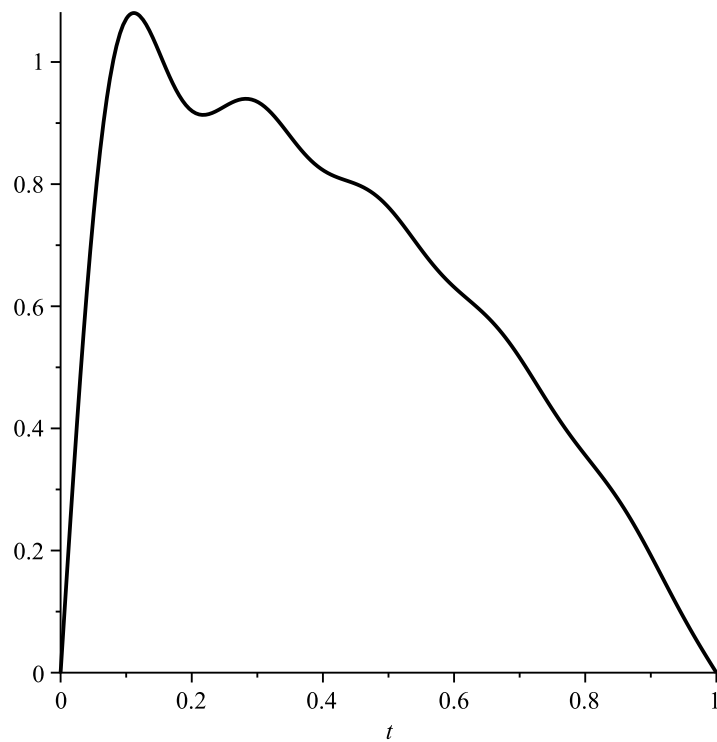


Рис. 10 График примера разложения функции в ряд по функции Бесселя

```
> GrN:=(N)->plot(FF(t,1,N),t=0..1,color=black,title=convert("N"=N,string)):
> RR:=plot(1-x^2,x=0..1,color=red):
> GRN:=(N)->plots[display](GrN(N),RR):
> GRF:=(N)->plots[display](seq(GRN(n),n=1..N),insequence=true);
> GRF(20);
```

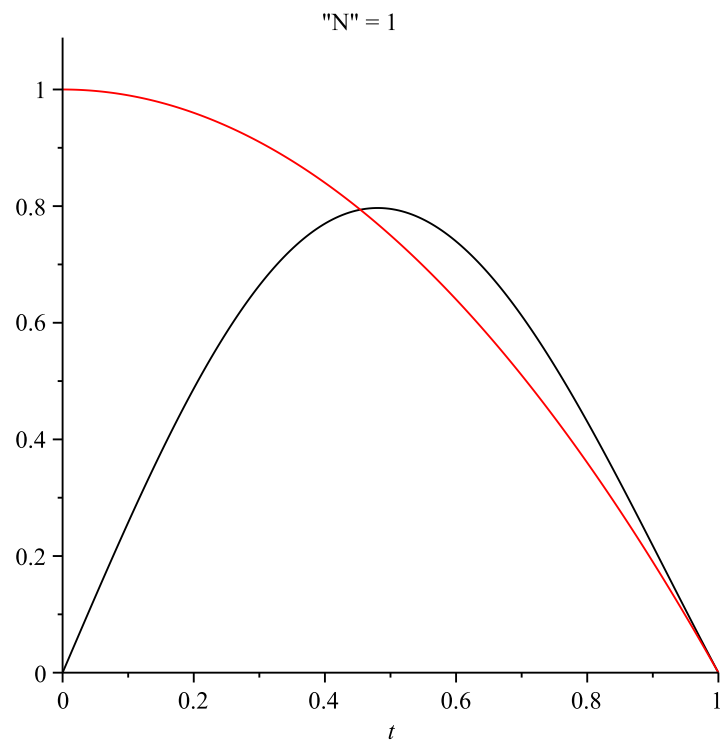



Рис. 11 График анимации разложения функции в ряд по функция Бесселя

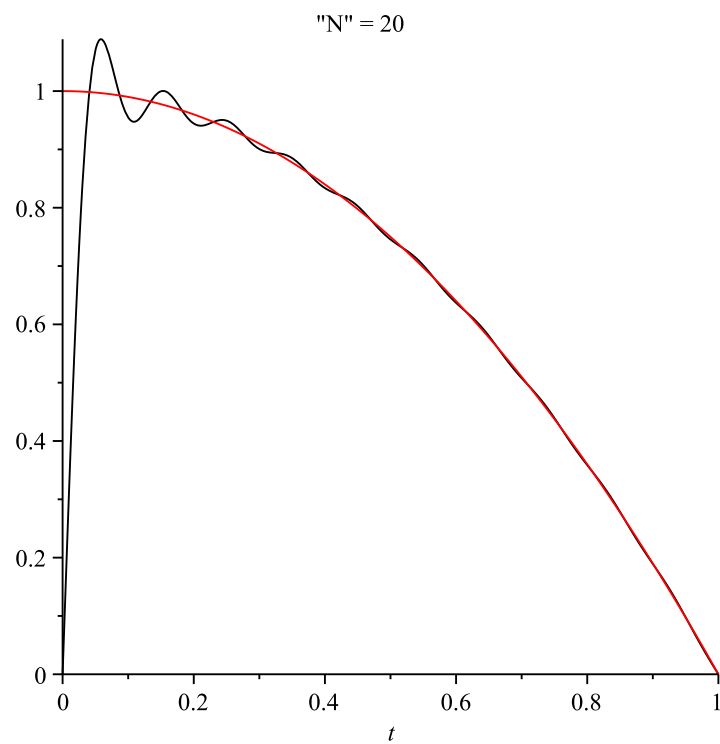


Рис. 12 График анимации разложения функции в ряд по функция Бесселя

Приложение А. Графики функции Бесселя

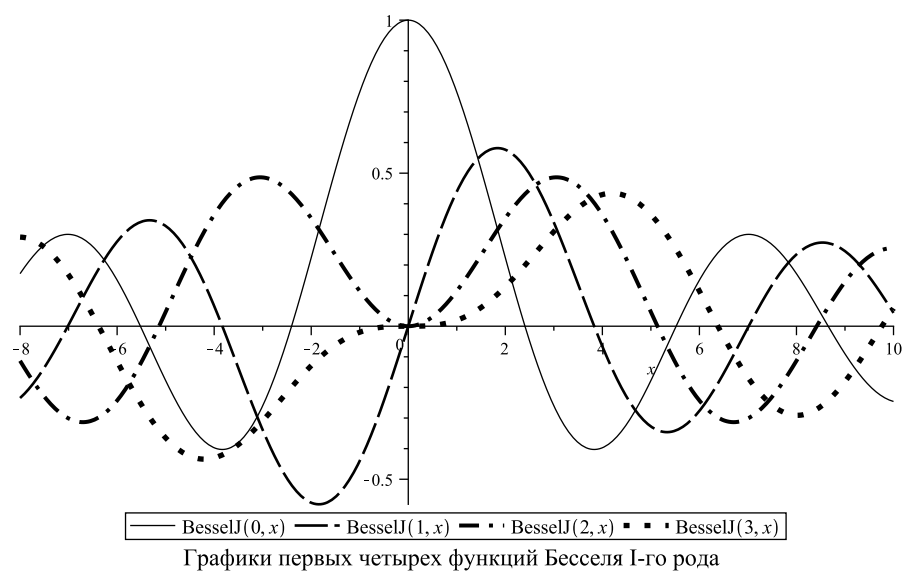
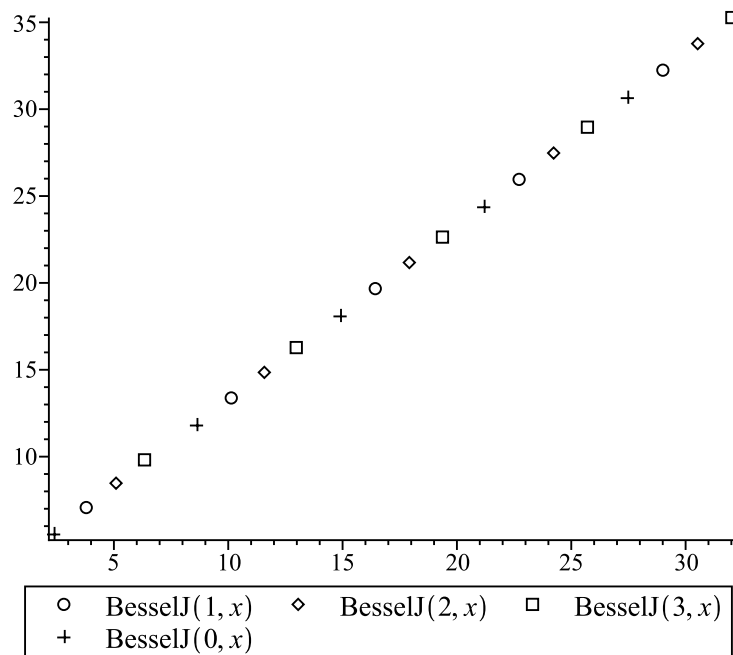


Рис. 13 *Графики первых четырех функций Бесселя I-го рода*



Нули графиков первых четырех функций Бесселя I-го рода

Рис. 14 Нули графиков первых четырех функций Бесселя I-го рода

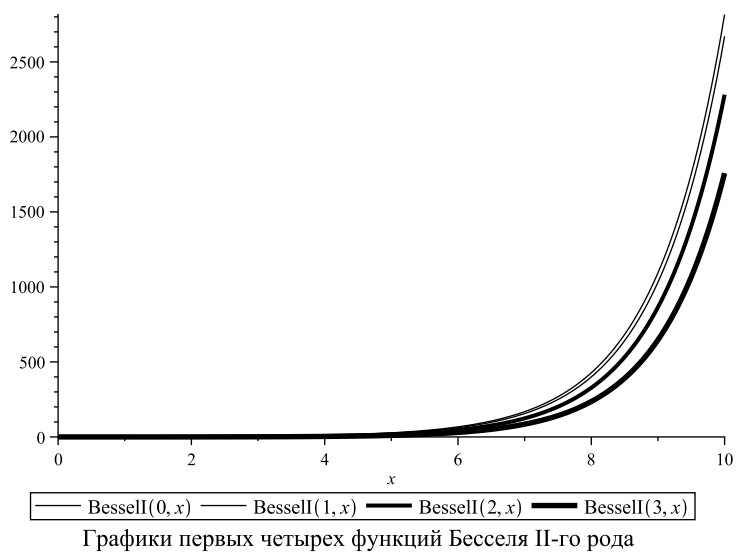
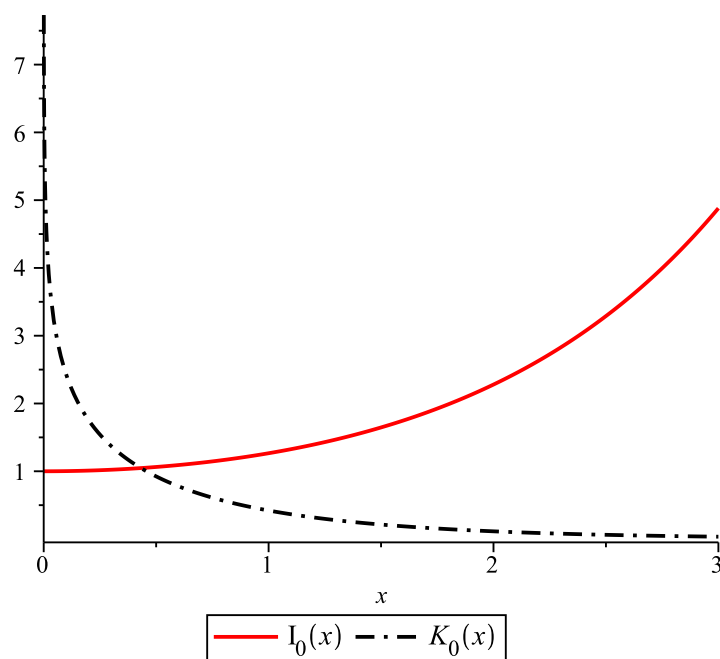


Рис. 15 Графики первых четырех функций Бесселя II-го рода



Модифицированные цилиндрические функции Бесселя

Рис. 16 Модифицированные цилиндрические функции Бесселя

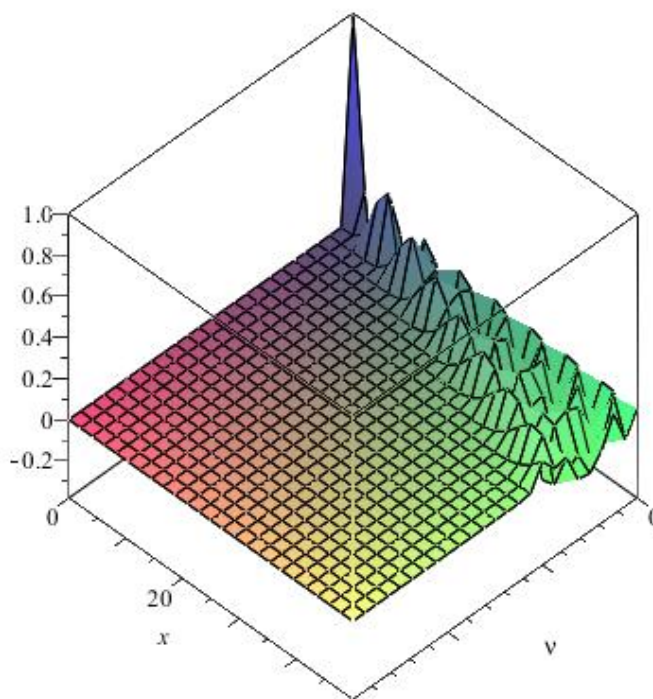


Рис. 17 Поверхность $z=f(x,\nu)=J[\nu](x)$

Приложение В. Процедура анимации аппроксимативной функции с помощью ряда по функциям Бесселя

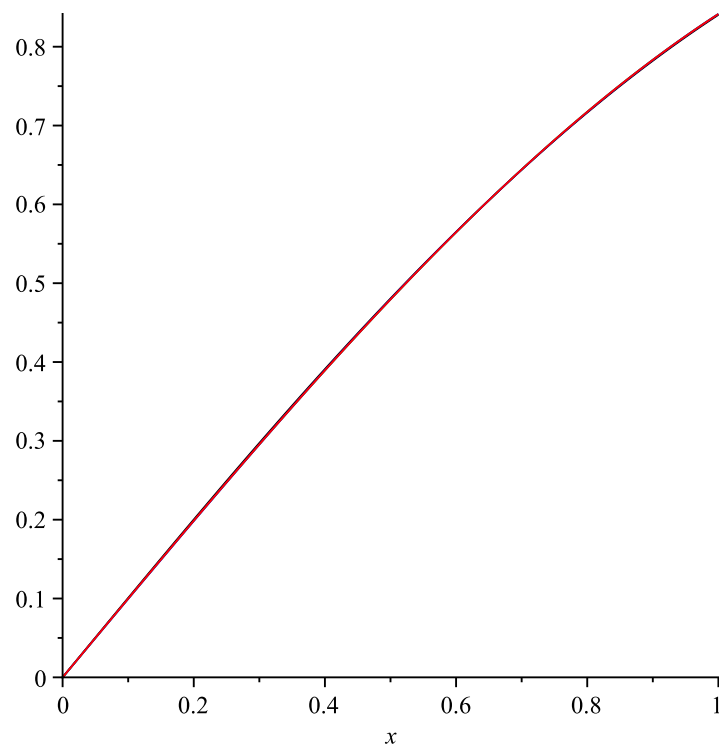


Рис. 18 График четырех функции Бесселя

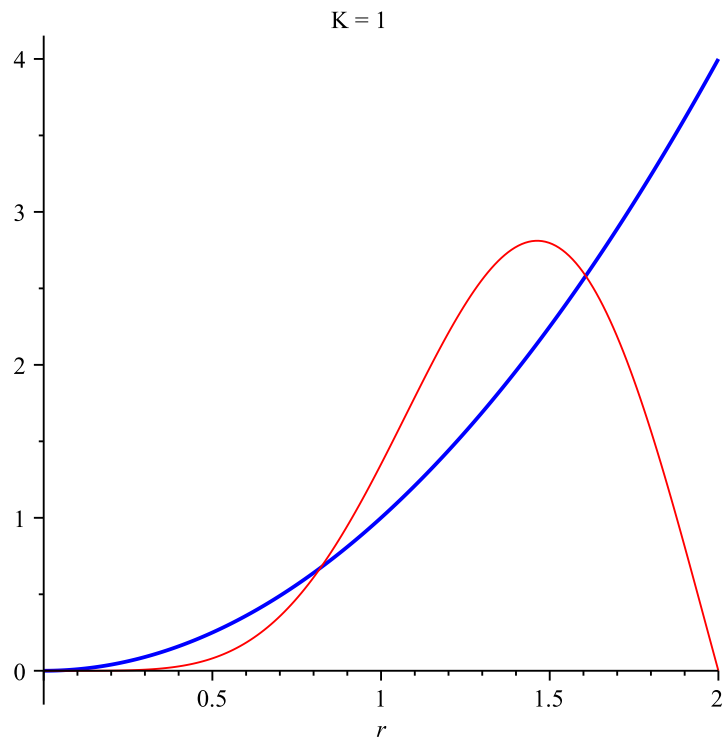


Рис. 19 Анимация разложения функции в ряд по функции Бесселя

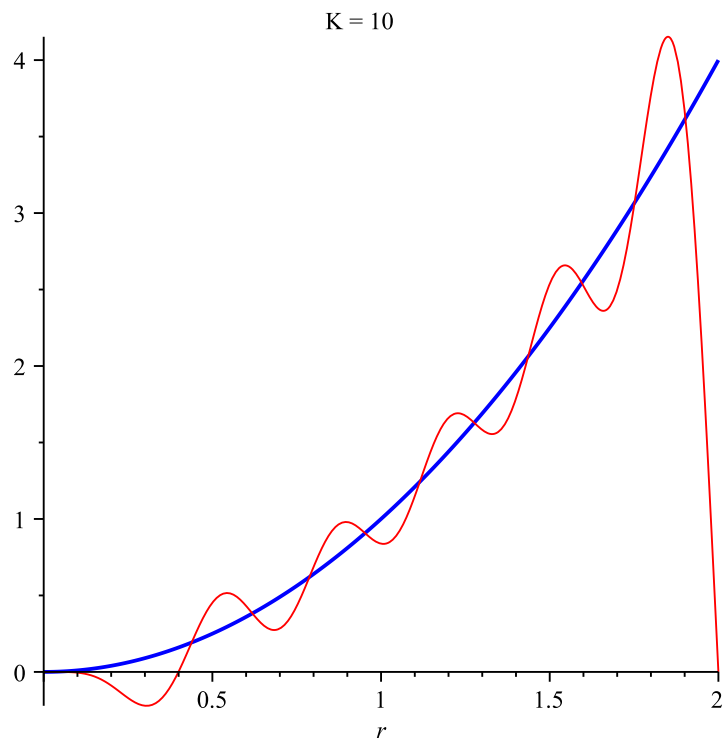


Рис. 20 Анимация разложения функции в ряд по функции Бесселя

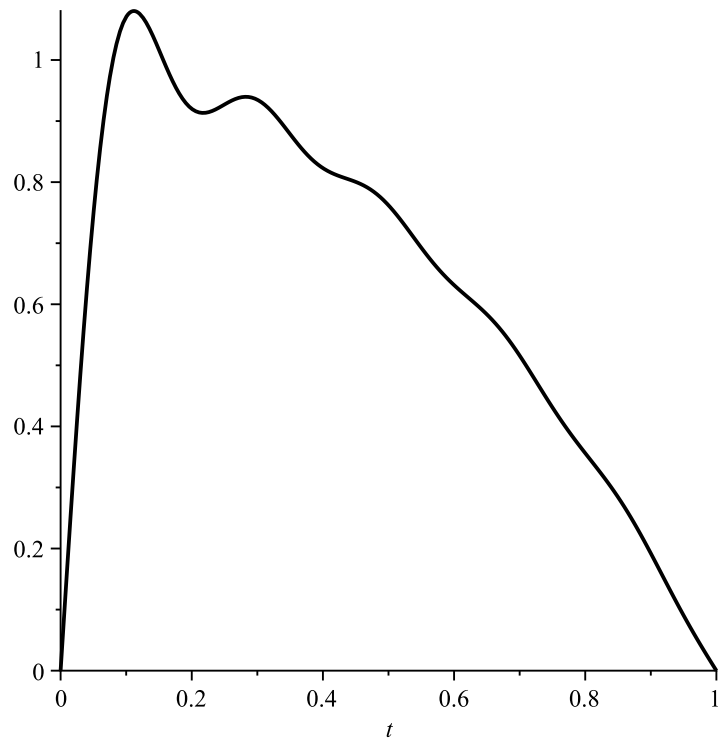


Рис. 21 График примера разложения функции в ряд по функции Бесселя

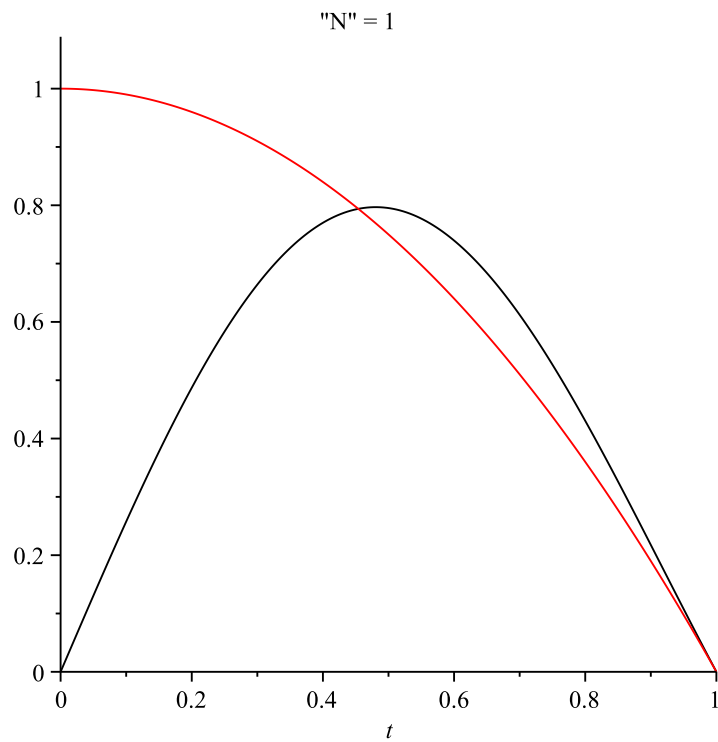


Рис. 22 График анимации разложения функции в ряд по функции Бесселя

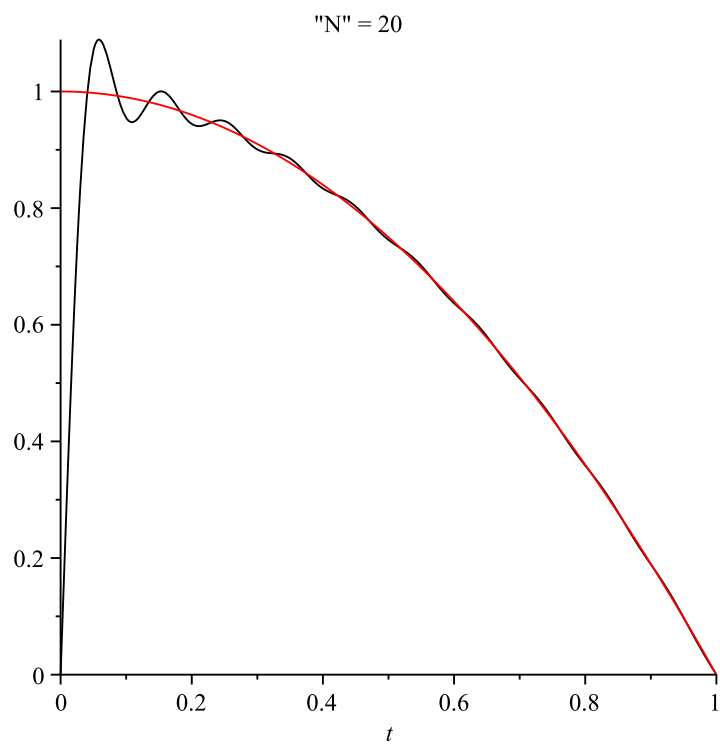


Рис. 23 График анимации разложения функции в ряд по функции Бесселя

Заключение

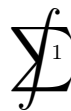
Таким образом, в данной работе решены следующие задачи:

1. Составлен обзор теории цилиндрических функций
2. Составлена процедура разложения функции в ряд по функциям Бесселя в пакете Maple
3. Составлена процедура анимации разложения функции в ряд по функциям Бесселя в пакете Maple
4. Рассмотрен конкретный пример разложения функции в ряд по функциям Бесселя с применением анимации в пакете Maple

Таким образом, задачи, поставленные в квалификационной работе, полностью выполнены.

Литература

- [1] Н.Н. Лебедев, *Специальные функции и их разложения. 2-е издание*, Москва.: Учпедгиз. – 1963.–359с.
- [2] С.М.Львовский, *Набор и вёрстка в системе LaTeX.3-е издание*, Москва.:МЦНМО. – 2003.–448с.
- [3] В.П.Дьяконов, *Maple 9.5/10 в математике, физике и образования*, Москва.:СОЛОН-Пресс.– 2006.–721с.
- [4] Д.П.Голосков *Уравнение математической физики. Решение задач в системе Maple*, Учебник для вузов, СПб.:Питер.–2004.-539 с.
- [5] Ю.Г. Игнатьев *Дифференциальная геометрия кривых и поверхностей в евклидовом пространстве. Курс лекций. IV семестр.* Компьютерная версия, Казань.: Казанский университет – 2013.–204с.



¹© Оформление: LaTeX - стиль $\mathcal{V}\mathcal{L}\mathcal{B}\mathcal{L}\mathcal{I}\mathcal{O}$ профессора Ю.Г. Игнатьева

Заключительный лист

Подпись автора работы _____

Дата _____

Квалификационная работа допущена к защите

Назначен рецензент

Заведующий кафедрой _____

Дата _____

Защищена в ГАК с оценкой
" _____ "

Дата _____

Секретарь ГАК _____