

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования  
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"  
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского



УТВЕРЖДАЮ

Проректор по образовательной деятельности КФУ

 Е.А. Турилова

28 февраля 2025 г.

*подписано электронно-цифровой подписью*

## **Программа дисциплины**

Геометрия расслоенных пространств

Направление подготовки: 01.04.01 - Математика

Профиль подготовки: Геометрия и ее приложения

Квалификация выпускника: магистр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

Год начала обучения по образовательной программе: 2025

## Содержание

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения ОПОП ВО
2. Место дисциплины (модуля) в структуре ОПОП ВО
3. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся
4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий
  - 4.1. Структура и тематический план контактной и самостоятельной работы по дисциплине (модулю)
  - 4.2. Содержание дисциплины (модуля)
5. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)
6. Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю)
7. Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)
8. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)
9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)
10. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)
11. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)
12. Средства адаптации преподавания дисциплины (модуля) к потребностям обучающихся инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья
13. Приложение №1. Фонд оценочных средств
14. Приложение №2. Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)
15. Приложение №3. Перечень информационных технологий, используемых для освоения дисциплины (модуля), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем

Программу дисциплины разработал(а)(и): профессор, д.н. Шурыгин В.В. (Кафедра геометрии, отделение математики), vadim.shurygin

**1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения ОПОП ВО**

Обучающийся, освоивший дисциплину (модуль), должен обладать следующими компетенциями:

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
ПК-2	Способен организовывать научно-исследовательскую и научно-производственную работу, управлять научным коллективом, публично представлять собственные и известные научные результаты

Обучающийся, освоивший дисциплину (модуль):

Должен знать:

Знать определения и свойства основных объектов теории групп Ли и локально тривиальных расслоений, формулировки наиболее важных утверждений, методы их доказательств, возможные сферы приложений.

Должен уметь:

Уметь решать задачи вычислительного и теоретического характера в области теории групп Ли и локально тривиальных расслоений, устанавливать взаимосвязи между понятиями, доказывать утверждения.

Должен владеть:

Владеть методами решения различных задач теории групп Ли и расслоенных пространств.

Должен демонстрировать способность и готовность:

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

- 1) Знать определения и свойства основных объектов теории групп Ли и локально три-виальных расслоений, формулировки наиболее важных утверждений, методы их доказа-тельств, возможные сферы приложений.
- 2) Уметь решать задачи вычислительного и теоретического характера в области тео-рии групп Ли и локально тривиальных расслоений, устанавливая взаимосвязи между поня-тиями, доказывать утверждения.
- 3) Владеть методами решения различных задач теории групп Ли и расслоенных про-странств.
- 4) Демонстрировать способность и готовность применять полученные знания и навыки в научно-исследовательской работе и преподавании.

**2. Место дисциплины (модуля) в структуре ОПОП ВО**

Данная дисциплина (модуль) включена в раздел "Б1.В.ДВ.08.01 Дисциплины (модули)" основной профессиональной образовательной программы 01.04.01 "Математика (Геометрия и ее приложения)" и относится к дисциплинам по выбору части ОПОП ВО, формируемой участниками образовательных отношений.

Осваивается на 2 курсе в 3 семестре.

**3. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся**

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зачетных(ые) единиц(ы) на 144 часа(ов).

Контактная работа - 36 часа(ов), в том числе лекции - 0 часа(ов), практические занятия - 36 часа(ов), лабораторные работы - 0 часа(ов), контроль самостоятельной работы - 0 часа(ов).

Самостоятельная работа - 81 часа(ов).

Контроль (зачёт / экзамен) - 27 часа(ов).

Форма промежуточного контроля дисциплины: экзамен в 3 семестре.

**4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий**

**4.1 Структура и тематический план контактной и самостоятельной работы по дисциплине (модулю)**

N	Разделы дисциплины / модуля	Се-местр	Виды и часы контактной работы, их трудоемкость (в часах)						Само-стоя-тельная ра-бота
			Лекции, всего	Лекции в эл. форме	Практи-ческие занятия, всего	Практи-ческие в эл. форме	Лабора-торные работы, всего	Лабора-торные в эл. форме	
N	Разделы дисциплины / модуля	Се-местр	Виды и часы контактной работы, их трудоемкость (в часах)						Само-стоя-тельная ра-бота
			Лекции, всего	Лекции в эл. форме	Практи-ческие занятия, всего	Практи-ческие в эл. форме	Лабора-торные работы, всего	Лабора-торные в эл. форме	
1.	Тема 1. Группы Ли	3	0	0	6	0	0	0	13
2.	Тема 2. Алгебры Ли	3	0	0	6	0	0	0	14
3.	Тема 3. Локально тривиальные расслоения	3	0	0	6	0	0	0	12
4.	Тема 4. Главные расслоения	3	0	0	6	0	0	0	14
5.	Тема 5. Связность в главном расслоении	3	0	0	6	0	0	0	14
4.2	Содержание дисциплины (модуля)								
6.	Расслоения дифференциально-геометрических объектов.	3	0	0	6	0	0	0	14
	Тема 1. Группы Ли								
	Группа Ли. Примеры групп Ли. Подгруппы Ли. Гомоморфизмы и изоморфизмы. Действия групп Ли. Ортогональная группа $O(n)$ . Ее свойства.		0	0	36	0	0	0	81
	Полная линейная группа $GL(n, R)$ . Ее свойства.								

Специальная линейная группа  $SL(n, R)$ . Ее свойства. Комплексная линейная группа  $GL(n, C)$ . Симплектическая группа  $Sp(n, R)$ . Унитарная группа.

### Тема 2. Алгебры Ли

Алгебра Ли. Примеры алгебр Ли. Структурные константы. Левые и правые сдвиги на группе Ли. Левоинвариантные векторные поля. Алгебра Ли группы Ли. Алгебра Ли группы обратимых элементов ассоциативной алгебры. Матричные алгебры Ли. Алгебры Ли групп  $GL(n, R)$  и  $GL(n, C)$ .

Алгебра Ли  $\mathfrak{o}(n)$  группы Ли  $O(n)$ .

### Тема 3. Локально тривиальные расслоения

Локально тривиальные расслоения. Функции склейки. Морфизмы локально тривиальных расслоений. Обратный образ расслоения. Расслоенное произведение. Накрытия. Сечения расслоения. Расслоение с фундаментальной группой.

Примеры расслоений. Расслоения Хопфа. Векторные и аффинные расслоения. Касательное расслоение дифференцируемого многообразия.

### Тема 4. Главные расслоения

Главные расслоения. Функции склейки главного расслоения. Расслоение линейных реперов дифференцируемого многообразия. Морфизмы главных расслоений. Расслоение ортонормированных реперов риманова многообразия. Ассоциированные расслоения. Касательное расслоение как расслоение, ассоциированное с расслоением линейных реперов.

Тензорные расслоения.

### Тема 5. Связность в главном расслоении

Связность в главном расслоении. Фундаментальные векторные поля. Существование связности в главном расслоении. Параллельное перенесение. Группа голономии. Лемма о разложении гомотопных нулю путей в произведение малых лассо. Гомоморфизмы связностей. Связность в присоединенном расслоении. Форма кривизны. Структурное уравнение связности.

### Тема 6. Расслоения дифференциально-геометрических объектов.

Струи (джеты). Многообразия джетов. Расслоения джетов. Дифференциальные группы высших порядков. Продолжения джетов.

Расслоения реперов высших порядков. Расслоения дифференциально-геометрических объектов. Расслоение объекта линейной связности как присоединенное к расслоению реперов второго порядка

## 5. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)

Самостоятельная работа обучающихся выполняется по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия. Самостоятельная работа подразделяется на самостоятельную работу на аудиторных занятиях и на внеаудиторную самостоятельную работу. Самостоятельная работа обучающихся включает как полностью самостоятельное освоение отдельных тем (разделов) дисциплины, так и проработку тем (разделов), осваиваемых во время аудиторной работы. Во время самостоятельной работы обучающиеся читают и конспектируют учебную, научную и справочную литературу, выполняют задания, направленные на закрепление знаний и отработку умений и навыков, готовятся к текущему и промежуточному контролю по дисциплине.

Организация самостоятельной работы обучающихся регламентируется нормативными документами, учебно-методической литературой и электронными образовательными ресурсами, включая:

Порядок организации и осуществления образовательной деятельности по образовательным программам высшего образования - программам бакалавриата, программам специалитета, программам магистратуры (утвержден приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации от 6 апреля 2021 года №245)

Письмо Министерства образования Российской Федерации №14-55-99бин/15 от 27 ноября 2002 г. "Об активизации самостоятельной работы студентов высших учебных заведений"

Устав федерального государственного автономного образовательного учреждения "Казанский (Приволжский) федеральный университет"

Правила внутреннего распорядка федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования "Казанский (Приволжский) федеральный университет"

Локальные нормативные акты Казанского (Приволжского) федерального университета

## **6. Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю)**

Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю) включает оценочные материалы, направленные на проверку освоения компетенций, в том числе знаний, умений и навыков. Фонд оценочных средств включает оценочные средства текущего контроля и оценочные средства промежуточной аттестации.

В фонде оценочных средств содержится следующая информация:

- соответствие компетенций планируемым результатам обучения по дисциплине (модулю);
- критерии оценивания сформированности компетенций;
- механизм формирования оценки по дисциплине (модулю);
- описание порядка применения и процедуры оценивания для каждого оценочного средства;
- критерии оценивания для каждого оценочного средства;
- содержание оценочных средств, включая требования, предъявляемые к действиям обучающихся, демонстрируемым результатам, задания различных типов.

Фонд оценочных средств по дисциплине находится в Приложении 1 к программе дисциплины (модулю).

## **7. Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)**

Освоение дисциплины (модуля) предполагает изучение основной и дополнительной учебной литературы. Литература может быть доступна обучающимся в одном из двух вариантов (либо в обоих из них):

- в электронном виде - через электронные библиотечные системы на основании заключенных КФУ договоров с правообладателями;

- в печатном виде - в Научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского. Обучающиеся получают учебную литературу на абонементе по читательским билетам в соответствии с правилами пользования Научной библиотекой.

Электронные издания доступны дистанционно из любой точки при введении обучающимся своего логина и пароля от личного кабинета в системе "Электронный университет". При использовании печатных изданий библиотечный фонд должен быть укомплектован ими из расчета не менее 0,5 экземпляра (для обучающихся по ФГОС 3++ - не менее 0,25 экземпляра) каждого из изданий основной литературы и не менее 0,25 экземпляра дополнительной литературы на каждого обучающегося из числа лиц, одновременно осваивающих данную дисциплину.

Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля), находится в Приложении 2 к рабочей программе дисциплины. Он подлежит обновлению при изменении условий договоров КФУ с правообладателями электронных изданий и при изменении комплектования фондов Научной библиотеки КФУ.

## **8. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

Connections in the second order tangent bundle with extended structure group -  
<http://link.springer.com/article/10.1134/S199508021403010X>

Notes on Differential Geometry and Lie Groups - <https://www.cis.upenn.edu/~jean/gbooks/manif.html>

On the higher order geometry of Weil bundles over smooth manifolds and over parameter-dependent manifolds - [https://ljm.kpfu.ru/old/Volume\\_18/18\\_4.html](https://ljm.kpfu.ru/old/Volume_18/18_4.html)

### 9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Вид работ	Методические рекомендации
практические занятия	При подготовке к практическому занятию следует освежить в памяти теоретический материал, изложенный преподавателем на лекциях, относящийся к изучаемой на занятии теме. Во время практического занятия следует отмечать излагаемые преподавателем методы и приемы решения задач, а при самостоятельном решении задач из домашнего задания следует по каждой не решенной задаче подготовить вопросы к преподавателю для разбора на аудиторном занятии.
самостоятельная работа	Самостоятельная работа студента по освоению теоретического материала состоит из изучения обязательного материала, изложенного на лекциях, и дополнительного изучения материала по рекомендованной учебной литературе для углубленного усвоения предмета и понимания, где и как пройденный материал может применяться. При решении задач из домашнего задания следует разобрать способы решения типовых задач, разобранные на аудиторном занятии. При подготовке к контрольной работе следует повторить весь материал, относящийся к темам контрольной работы, руководствуясь конкретными указаниями преподавателя.
экзамен	Экзамен проводится в письменной форме. Экзаменационный билет содержит два вопроса из программы курса и одну задачу. Полный ответ на каждый вопрос оценивается в 20 баллов, правильное решение задачи оценивается в 10 баллов. Неполный ответ, частичное решение задачи и решение задачи, содержащее о шибки, оцениваются меньшим числом баллов. Экзамен считается сданным, если при ответе на экзаменационный билет набрано не менее 28 баллов. При простановке оценки число баллов, набранных на экзамене, суммируется с числом баллов, набранных на практических занятиях. Экзаменационный билет содержит вопросы и задачи из всех разделов программы. При подготовке к экзамену следует ориентироваться на приведенный в п. 6.3 образец экзаменационного билета.

### 10. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем, представлен в Приложении 3 к рабочей программе дисциплины (модуля).

### 11. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Материально-техническое обеспечение образовательного процесса по дисциплине (модулю) включает в себя следующие компоненты:

Помещения для самостоятельной работы обучающихся, укомплектованные специализированной мебелью (столы и стулья) и оснащенные компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду КФУ.

Учебные аудитории для контактной работы с преподавателем, укомплектованные специализированной мебелью (столы и стулья).

Компьютер и принтер для распечатки раздаточных материалов.

Мультимедийная аудитория.

### 12. Средства адаптации преподавания дисциплины к потребностям обучающихся инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья

При необходимости в образовательном процессе применяются следующие методы и технологии, облегчающие восприятие информации обучающимися инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья:

- создание текстовой версии любого нетекстового контента для его возможного преобразования в альтернативные формы, удобные для различных пользователей;

- создание контента, который можно представить в различных видах без потери данных или структуры, предусмотреть возможность масштабирования текста и изображений без потери качества, предусмотреть доступность управления контентом с клавиатуры;
- создание возможностей для обучающихся воспринимать одну и ту же информацию из разных источников - например, так, чтобы лица с нарушениями слуха получали информацию визуально, с нарушениями зрения - аудиально;
- применение программных средств, обеспечивающих возможность освоения навыков и умений, формируемых дисциплиной, за счёт альтернативных способов, в том числе виртуальных лабораторий и симуляционных технологий;
- применение дистанционных образовательных технологий для передачи информации, организации различных форм интерактивной контактной работы обучающегося с преподавателем, в том числе вебинаров, которые могут быть использованы для проведения виртуальных лекций с возможностью взаимодействия всех участников дистанционного обучения, проведения семинаров, выступления с докладами и защиты выполненных работ, проведения тренингов, организации коллективной работы;
- применение дистанционных образовательных технологий для организации форм текущего и промежуточного контроля;
- увеличение продолжительности сдачи обучающимся инвалидом или лицом с ограниченными возможностями здоровья форм промежуточной аттестации по отношению к установленной продолжительности их сдачи:
- продолжительности сдачи зачёта или экзамена, проводимого в письменной форме, - не более чем на 90 минут;
- продолжительности подготовки обучающегося к ответу на зачёте или экзамене, проводимом в устной форме, - не более чем на 20 минут;
- продолжительности выступления обучающегося при защите курсовой работы - не более чем на 15 минут.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО и учебным планом по направлению 01.04.01 "Математика" и магистерской программе "Геометрия и ее приложения".

### Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)

Направление подготовки: 01.04.01 - Математика

Профиль подготовки: Геометрия и ее приложения

Квалификация выпускника: магистр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

Год начала обучения по образовательной программе: 2025

#### Основная литература:

1. Примаков, Д. А. Геометрия и топология [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Д. А. Примаков, Р. Я. Хамидуллин. - 2-е изд., перераб. и доп. - Москва : МФПА, 2011. - 272 с. (Университетская серия). - ISBN 978-5-902597-13-1. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/451172>

(дата обращения: 04.10.2021). - Режим доступа: по подписке.

2. Сосов, Е. Н. Введение в теорию групп Ли: Учебно-методическое пособие. / Е.Н. Сосов. Казань: Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2016. - 89 с. - Режим доступа: [http://kpfu.ru/staff\\_files/F709891002/Lie8.pdf](http://kpfu.ru/staff_files/F709891002/Lie8.pdf)

(дата обращения: 04.10.2021). - Режим доступа: открытый

3. Исковских, В. А. Многомерная геометрия - ;, 2016. - 624 с.: ISBN 978-5-4439-2499-1. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/958699> (дата обращения: 04.10.2021). - Режим доступа: по подписке.

#### Дополнительная литература:

1. Паньженский, В. И. Введение в дифференциальную геометрию : учебное пособие / В. И. Паньженский. - 2-е изд., испр. - Санкт-Петербург : Лань, 2021. - 240 с. - ISBN 978-5-8114-1979-1. - Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/168849> (дата обращения: 30.11.2021). - Режим доступа: для авториз. пользователей.

2. Аила, Д. О геометрии трансасакиевых многообразий [Электронный ресурс] // Преподаватель XXI в. - Электрон. дан. - 2013. - № 3(ч.2). - С. 212-223. - Режим доступа: <https://e.lanbook.com/journal/issue/289376>

(дата обращения: 04.10.2021). - Режим доступа: для авториз. пользователей

3. Исковских, В. А. Алгебраические поверхности: геометрия и арифметика: Учебное пособие / Исковских В.А. - Москва : МЦНМО, 2014. - 360 с.: ISBN 978-5-4439-2016-0. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/958571> (дата обращения: 04.10.2021). - Режим доступа: по подписке.

*Приложение 3*  
*к рабочей программе дисциплины (модуля)*  
*Б1.В.ДВ.08.01 Геометрия расслоенных пространств*

**Перечень информационных технологий, используемых для освоения дисциплины (модуля), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем**

Направление подготовки: 01.04.01 - Математика

Профиль подготовки: Геометрия и ее приложения

Квалификация выпускника: магистр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

Год начала обучения по образовательной программе: 2025

Освоение дисциплины (модуля) предполагает использование следующего программного обеспечения и информационно-справочных систем:

Операционная система Microsoft Windows 7 Профессиональная или Windows XP (Volume License)

Пакет офисного программного обеспечения Microsoft Office 365 или Microsoft Office Professional plus 2010

Браузер Mozilla Firefox

Браузер Google Chrome

Adobe Reader XI или Adobe Acrobat Reader DC

Kaspersky Endpoint Security для Windows

Учебно-методическая литература для данной дисциплины имеется в наличии в электронно-библиотечной системе Издательства "Лань", доступ к которой предоставлен обучающимся. ЭБС Издательства "Лань" включает в себя электронные версии книг издательства "Лань" и других ведущих издательств учебной литературы, а также электронные версии периодических изданий по естественным, техническим и гуманитарным наукам. ЭБС Издательства "Лань" обеспечивает доступ к научной, учебной литературе и научным периодическим изданиям по максимальному количеству профильных направлений с соблюдением всех авторских и смежных прав.