

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского



подписано электронно-цифровой подписью

Программа дисциплины

Метрическая геометрия

Направление подготовки: 01.04.01 - Математика

Профиль подготовки: Геометрия и ее приложения

Квалификация выпускника: магистр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

Год начала обучения по образовательной программе: 2025

Содержание

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения ОПОП ВО
2. Место дисциплины (модуля) в структуре ОПОП ВО
3. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся
4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий
 - 4.1. Структура и тематический план контактной и самостоятельной работы по дисциплине (модулю)
 - 4.2. Содержание дисциплины (модуля)
5. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)
6. Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю)
7. Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)
8. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)
9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)
10. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)
11. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)
12. Средства адаптации преподавания дисциплины (модуля) к потребностям обучающихся инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья
13. Приложение №1. Фонд оценочных средств
14. Приложение №2. Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)
15. Приложение №3. Перечень информационных технологий, используемых для освоения дисциплины (модуля), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем

Программу дисциплины разработал(а)(и): заведующий кафедрой, д.н. Попов А.А. (Кафедра геометрии, отделение математики), aropov@krfu.ru ; Сосов Евгений Николаевич

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения ОПОП ВО

Обучающийся, освоивший дисциплину (модуль), должен обладать следующими компетенциями:

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
ПК-2	Способен организовывать научно-исследовательскую и научно-производственную работу, управлять научным коллективом, публично представлять собственные и известные научные результаты

Обучающийся, освоивший дисциплину (модуль):

Должен знать:

основные понятия, и свойства математических объектов в этой области, формулировки утверждений, методы их доказательства, возможные сферы их приложений.

Должен уметь:

Понимать роль метрической геометрии в современной геометрии.

Уметь решать задачи в метрической геометрии.

Должен владеть:

Математическим аппаратом в метрической геометрии.

Должен демонстрировать способность и готовность:

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

- 1) Знать: основные понятия, и свойства математических объектов в этой области, формулировки утверждений, методы их доказательства, возможные сферы их приложений.
- 2) Понимать: роль метрической геометрии в современной геометрии.
- 3) Уметь: решать задачи в метрической геометрии.
- 4) Владеть: математическим аппаратом в метрической геометрии.

2. Место дисциплины (модуля) в структуре ОПОП ВО

Данная дисциплина (модуль) включена в раздел "Б1.В.ДВ.05.01 Дисциплины (модули)" основной профессиональной образовательной программы 01.04.01 "Математика (Геометрия и ее приложения)" и относится к дисциплинам по выбору части ОПОП ВО, формируемой участниками образовательных отношений.

Осваивается на 1 курсе в 2 семестре.

3. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетных(ые) единиц(ы) на 108 часа(ов).

Контактная работа - 42 часа(ов), в том числе лекции - 14 часа(ов), практические занятия - 28 часа(ов), лабораторные работы - 0 часа(ов), контроль самостоятельной работы - 0 часа(ов).

Самостоятельная работа - 30 часа(ов).

Контроль (зачёт / экзамен) - 36 часа(ов).

Форма промежуточного контроля дисциплины: экзамен во 2 семестре.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1 Структура и тематический план контактной и самостоятельной работы по дисциплине (модулю)

N	Разделы дисциплины / модуля	Се- местр	Виды и часы контактной работы, их трудоемкость (в часах)						Само- стоя- тель- ная ра- бота
			Лекции, всего	Лекции в эл. форме	Практи- ческие занятия, всего	Практи- ческие в эл. форме	Лабора- торные работы, всего	Лабора- торные в эл. форме	
1.	Тема 1. Кривая в метрическом пространстве. Длина дуги, как параметр. Существование кратчайшего пути.	2	4	0	8	0	0	0	0
2.	Тема 2. Липшицевы отображения, подобия метрических пространств. Пространство с внутренней метрикой.	2	2	0	4	0	0	0	0
3.	Тема 3. Геодезическое пространство. Выпуклость метрического пространства по Менгеру и геодезическая выпуклость.	2	2	0	4	0	0	0	0
4.	Тема 4. Произведения метрических пространств. Специальные отображения метрических пространств. Метрика Буземана на группах подобий и изометрий.	2	2	0	4	0	0	0	2
5.	Тема 5. Фактор-пространство метрического пространства. Однородные метрические пространства. Пространство направлений.	2	2	0	4	0	0	0	14
6.	Тема 6. Чебышевский центр ограниченного множества в метрическом пространстве. Расстояние по Хаусдорфу и Громову-Хаусдорфу.	2	2	0	4	0	0	0	14
	Итого		14	0	28	0	0	0	30

4.2 Содержание дисциплины (модуля)

Тема 1. Кривая в метрическом пространстве. Длина дуги, как параметр. Существование кратчайшего пути.

Простой путь. Простая дуга. Эквивалентные пути. Кривая в метрическом пространстве. Кривая Коха. Свойства длины пути.

Длина дуги, как параметр. Характеризация функции длины дуги. Дифференцируемые пути в евклидовом пространстве. Пространство путей. Теорема Арцела-Асколи. Существование кратчайшего пути.

Тема 2. Липшицевы отображения, подобия метрических пространств. Пространство с внутренней метрикой.

Липшицевы и билипшицевы отображения. Подобия и изометрические отображения метрических пространств. Собственное подобие и его центр. Расстояние по Липшицу между метриками. Расстояние по Липшицу между метрическими пространствами. Пространство с внутренней метрикой. Пространство со строго выпуклой метрикой.

Тема 3. Геодезическое пространство. Выпуклость метрического пространства по Менгеру и геодезическая выпуклость.

Сегмент. Середина сегмента. Геодезическое пространство. Геодезическая кривая, луч, прямая. Прямое пространство. Выпуклость метрического пространства по Менгеру. Выпуклость и строго выпуклость множеств в геодезическом пространстве. Теорема Хопфа--Ринова--Конфоссена. Геодезическая выпуклость и выпуклость по Менгеру.

Тема 4. Произведения метрических пространств. Специальные отображения метрических пространств. Метрика Буземана на группах подобий и изометрий.

Произведения метрических пространств. Отображения, неувеличивающие (сохраняющие) длины кривых. Гельдеровы отображения. Нерастягивающие отображения. Отображения уменьшающие (неуменьшающие) расстояние. Изометрии компактных пространств. Локальные изометрии. Метрика Буземана на группах подобий и изометрий.

Тема 5. Фактор-пространство метрического пространства. Однородные метрические пространства. Пространство направлений.

Фактор-метрика. Фактор-пространство метрического пространства. Транзитивное действие группы изометрий (подобий) на метрическом пространстве. Однородные метрические пространства. Орбиты. Конус и сферическая надстройка над метрическим пространством. Верхний угол, угол, избыток. Пространство направлений.

Тема 6. Чебышевский центр ограниченного множества в метрическом пространстве. Расстояние по Хаусдорфу и Громову-Хаусдорфу.

Чебышевский центр ограниченного множества в метрическом пространстве. Наилучшая аппроксимирующая сеть для компактного множества в метрическом пространстве. Отклонение и расстояние Хаусдорфа. Метрическая проекция и обобщенное квазиравнение операторного уравнения первого рода. Соответствия множеств. Расстояние по Громову-Хаусдорфу.

5. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)

Самостоятельная работа обучающихся выполняется по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия. Самостоятельная работа подразделяется на самостоятельную работу на аудиторных занятиях и на внеаудиторную самостоятельную работу. Самостоятельная работа обучающихся включает как полностью самостоятельное освоение отдельных тем (разделов) дисциплины, так и проработку тем (разделов), осваиваемых во время аудиторной работы. Во время самостоятельной работы обучающиеся читают и конспектируют учебную, научную и справочную литературу, выполняют задания, направленные на закрепление знаний и отработку умений и навыков, готовятся к текущему и промежуточному контролю по дисциплине.

Организация самостоятельной работы обучающихся регламентируется нормативными документами, учебно-методической литературой и электронными образовательными ресурсами, включая:

Порядок организации и осуществления образовательной деятельности по образовательным программам высшего образования - программам бакалавриата, программам специалитета, программам магистратуры (утвержден приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации от 6 апреля 2021 года №245)

Письмо Министерства образования Российской Федерации №14-55-99бин/15 от 27 ноября 2002 г. "Об активизации самостоятельной работы студентов высших учебных заведений"

Устав федерального государственного автономного образовательного учреждения "Казанский (Приволжский) федеральный университет"

Правила внутреннего распорядка федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования "Казанский (Приволжский) федеральный университет"

Локальные нормативные акты Казанского (Приволжского) федерального университета

Сосов Е. Н. Введение в метрическую геометрию и ее приложения: учеб.-метод.пособие / Е.Н. Сосов - Казань: Казан. ун-т, - 2015. - 98 с. - http://dspace.kpfu.ru/xmlui/bitstream/net/20341/1/05_34_001093.pdf

Компьютерная математика: Учебное пособие/К.В.Титов - М.: ИЦ РИОР, НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 261 с.: 60х90 1/16. - (Высшее образование) (Переплёт) ISBN 978-5-369-01470-7 - <http://znanium.com/bookread2.php?book=523231>

Методы оптимальных решений: Учебник / Мастяева И.Н., Горемыкина Г.И., Семенихина О.Н. - М.: КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 384 с.: 60х90 1/16 (Переплёт 7БЦ) ISBN 978-5-905554-24-7 - <http://znanium.com/bookread2.php?book=521453>

6. Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю)

Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю) включает оценочные материалы, направленные на проверку освоения компетенций, в том числе знаний, умений и навыков. Фонд оценочных средств включает оценочные средства текущего контроля и оценочные средства промежуточной аттестации.

В фонде оценочных средств содержится следующая информация:

- соответствие компетенций планируемым результатам обучения по дисциплине (модулю);
- критерии оценивания сформированности компетенций;
- механизм формирования оценки по дисциплине (модулю);
- описание порядка применения и процедуры оценивания для каждого оценочного средства;
- критерии оценивания для каждого оценочного средства;
- содержание оценочных средств, включая требования, предъявляемые к действиям обучающихся, демонстрируемым результатам, задания различных типов.

Фонд оценочных средств по дисциплине находится в Приложении 1 к программе дисциплины (модулю).

7. Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)

Освоение дисциплины (модуля) предполагает изучение основной и дополнительной учебной литературы. Литература может быть доступна обучающимся в одном из двух вариантов (либо в обоих из них):

- в электронном виде - через электронные библиотечные системы на основании заключенных КФУ договоров с правообладателями;

- в печатном виде - в Научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского. Обучающиеся получают учебную литературу на абонементе по читательским билетам в соответствии с правилами пользования Научной библиотекой.

Электронные издания доступны дистанционно из любой точки при введении обучающимся своего логина и пароля от личного кабинета в системе "Электронный университет". При использовании печатных изданий библиотечный фонд должен быть укомплектован ими из расчета не менее 0,5 экземпляра (для обучающихся по ФГОС 3++ - не менее 0,25 экземпляра) каждого из изданий основной литературы и не менее 0,25 экземпляра дополнительной литературы на каждого обучающегося из числа лиц, одновременно осваивающих данную дисциплину.

Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля), находится в Приложении 2 к рабочей программе дисциплины. Он подлежит обновлению при изменении условий договоров КФУ с правообладателями электронных изданий и при изменении комплектования фондов Научной библиотеки КФУ.

8. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

Блочный-матричный метод математического моделирования поверхностей: Учебное пособие / Нартя В.И. - М.: МПГУ, 2016. - 236 с.: ISBN 978-5-9729-0119-7 - <http://znanium.com/bookread2.php?book=759903>

Дискретная математика. Углубленный курс: Учебник / Соболева Т.С.; Под ред. Чечкина А.В. - М.: КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 278 с.: 60x90 1/16. - (Бакалавриат) (Переплёт 7БЦ) ISBN 978-5-906818-11-9 - <http://znanium.com/bookread2.php?book=520541>

Компьютерная математика: Учебное пособие/К.В.Титов - М.: ИЦ РИОР, НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 261 с.: 60x90 1/16. - (Высшее образование) (Переплёт) ISBN 978-5-369-01470-7 - <http://znanium.com/bookread2.php?book=523231>

Методы оптимальных решений: Учебник / Мастяева И.Н., Горемыкина Г.И., Семенихина О.Н. - М.: КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 384 с.: 60x90 1/16 (Переплёт 7БЦ) ISBN 978-5-905554-24-7 - <http://znanium.com/bookread2.php?book=521453>

1. Сосов Е. Н. Введение в метрическую геометрию и ее приложения: учеб.-метод. пособие / Е.Н. Сосов - Казань: Казан. ун-т, - 2015. - 98 с. - http://kpfu.ru/staff_files/F170570806/05_34_001093.pdf

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Вид работ	Методические рекомендации
лекции	В ходе лекционных занятий вести конспектирование учебного материала. Обращать внимание на категории, формулировки, раскрывающие содержание тех или иных явлений и процессов, научные выводы и практические рекомендации. Дорабатывать свой конспект лекции, делая в нем соответствующие записи из литературы, рекомендованной преподавателем и предусмотренной учебной программой.
практические занятия	В ходе подготовки к семинарам изучить основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой, новыми публикациями в периодических изданиях: журналах. Задавать преподавателю уточняющие вопросы с целью уяснения теоретических положений и оптимальных способов решения различных типов задач. При этом учесть рекомендации преподавателя и требования учебной программы.
самостоятельная работа	Своевременное и качественное выполнение самостоятельной работы базируется на соблюдении настоящих рекомендаций и изучении рекомендованной литературы. Студент может дополнить список использованной литературы современными источниками, не представленными в списке рекомендованной литературы, и в дальнейшем использовать собственные подготовленные учебные материалы при написании курсовых и дипломных работ.
экзамен	Освоить теоретический материал по всем темам. Для этого выучить все определения основных понятий и все основные формулы, формулировки теорем, затем понять идеи доказательств теорем и выучить эти доказательства. Повторить идеи и методы решения всех стандартных задач по всем темам. Выбрать сложные задачи и решить их.

10. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем, представлен в Приложении 3 к рабочей программе дисциплины (модуля).

11. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Материально-техническое обеспечение образовательного процесса по дисциплине (модулю) включает в себя следующие компоненты:

Помещения для самостоятельной работы обучающихся, укомплектованные специализированной мебелью (столы и стулья) и оснащенные компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду КФУ.

Учебные аудитории для контактной работы с преподавателем, укомплектованные специализированной мебелью (столы и стулья).

Компьютер и принтер для распечатки раздаточных материалов.

Мультимедийная аудитория.

12. Средства адаптации преподавания дисциплины к потребностям обучающихся инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья

При необходимости в образовательном процессе применяются следующие методы и технологии, облегчающие восприятие информации обучающимися инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья:

- создание текстовой версии любого нетекстового контента для его возможного преобразования в альтернативные формы, удобные для различных пользователей;
- создание контента, который можно представить в различных видах без потери данных или структуры, предусмотреть возможность масштабирования текста и изображений без потери качества, предусмотреть доступность управления контентом с клавиатуры;
- создание возможностей для обучающихся воспринимать одну и ту же информацию из разных источников - например, так, чтобы лица с нарушениями слуха получали информацию визуально, с нарушениями зрения - аудиально;
- применение программных средств, обеспечивающих возможность освоения навыков и умений, формируемых дисциплиной, за счёт альтернативных способов, в том числе виртуальных лабораторий и симуляционных технологий;
- применение дистанционных образовательных технологий для передачи информации, организации различных форм интерактивной контактной работы обучающегося с преподавателем, в том числе вебинаров, которые могут быть использованы для проведения виртуальных лекций с возможностью взаимодействия всех участников дистанционного обучения, проведения семинаров, выступления с докладами и защиты выполненных работ, проведения тренингов, организации коллективной работы;
- применение дистанционных образовательных технологий для организации форм текущего и промежуточного контроля;
- увеличение продолжительности сдачи обучающимся инвалидом или лицом с ограниченными возможностями здоровья форм промежуточной аттестации по отношению к установленной продолжительности их сдачи:
- продолжительности сдачи зачёта или экзамена, проводимого в письменной форме, - не более чем на 90 минут;
- продолжительности подготовки обучающегося к ответу на зачёте или экзамене, проводимом в устной форме, - не более чем на 20 минут;
- продолжительности выступления обучающегося при защите курсовой работы - не более чем на 15 минут.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО и учебным планом по направлению 01.04.01 "Математика" и магистерской программе "Геометрия и ее приложения".

Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)

Направление подготовки: 01.04.01 - Математика

Профиль подготовки: Геометрия и ее приложения

Квалификация выпускника: магистр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

Год начала обучения по образовательной программе: 2025

Основная литература:

1. Сосов, Е.Н. Введение в метрическую геометрию и ее приложения [Электронный ресурс] : учебно-методическое пособие / Е. Н. Сосов. - Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2015. - 98 с. - URL: http://kpfu.ru/staff_files/F170570806/05_34_001093.pdf (дата обращения: 14.05.2025). - Режим доступа: открыто
2. Примаков, Д. А. Геометрия и топология [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Д. А. Примаков, Р. Я. Хамидуллин. - 2-е изд., перераб. и доп. - М.: МФПА, 2011. - 272 с. - URL: <http://znanium.com/bookread.php?book=451172> (дата обращения: 14.05.2025). - Режим доступа: открыто
3. Сосов, Е.Н. Геометрия Лобачевского и ее применение в специальной теории относительности: учеб.-метод. пособие [Электронный ресурс]: [учебное пособие] / Е. Н. Сосов. - Казань: Казанский федеральный университет, 2016. - 84 с. URL: http://kpfu.ru/staff_files/F1069273397/SosovGeomLob.pdf (дата обращения: 14.05.2025). - Режим доступа: открыто

Дополнительная литература:

1. Деза, М. Изометрические полиэдральные подграфы в гиперкубах и кубических решетках [Электронный ресурс] : справочник / М. Деза, В.П. Гришухин, М.И. Штогрин. - Электрон. дан. - Москва : МЦНМО, 2008. - 192 с. - URL: <https://e.lanbook.com/book/9331> (дата обращения: 14.05.2025). - Режим доступа: открыто
2. Сизый, С.В. Лекции по дифференциальной геометрии [Электронный ресурс] : учебное пособие / С.В. Сизый. - Электрон. дан. - Москва : Физматлит, 2007. - 346 с. - URL: <https://e.lanbook.com/book/2320> (дата обращения: 14.05.2025). - Режим доступа: открыто
3. Исковских, В.А. Многомерная геометрия [Электронный ресурс] / В.А. Исковских ; ред.-сост. Вик. С. Куликов, Ю.Г. Прохоров, И.А. Чельцов. - Электрон. дан. - Москва : МЦНМО, 2016. - 616 с. - URL: <https://e.lanbook.com/book/80144> (дата обращения: 14.05.2025). - Режим доступа: открыто

*Приложение 3
к рабочей программе дисциплины (модуля)
Б1.В.ДВ.05.01 Метрическая геометрия*

Перечень информационных технологий, используемых для освоения дисциплины (модуля), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем

Направление подготовки: 01.04.01 - Математика

Профиль подготовки: Геометрия и ее приложения

Квалификация выпускника: магистр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

Год начала обучения по образовательной программе: 2025

Освоение дисциплины (модуля) предполагает использование следующего программного обеспечения и информационно-справочных систем:

Операционная система Microsoft Windows 7 Профессиональная или Windows XP (Volume License)

Пакет офисного программного обеспечения Microsoft Office 365 или Microsoft Office Professional plus 2010

Браузер Mozilla Firefox

Браузер Google Chrome

Adobe Reader XI или Adobe Acrobat Reader DC

Kaspersky Endpoint Security для Windows

Учебно-методическая литература для данной дисциплины имеется в наличии в электронно-библиотечной системе "ZNANIUM.COM", доступ к которой предоставлен обучающимся. ЭБС "ZNANIUM.COM" содержит произведения крупнейших российских учёных, руководителей государственных органов, преподавателей ведущих вузов страны, высококвалифицированных специалистов в различных сферах бизнеса. Фонд библиотеки сформирован с учетом всех изменений образовательных стандартов и включает учебники, учебные пособия, учебно-методические комплексы, монографии, авторефераты, диссертации, энциклопедии, словари и справочники, законодательно-нормативные документы, специальные периодические издания и издания, выпускаемые издательствами вузов. В настоящее время ЭБС ZNANIUM.COM соответствует всем требованиям федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования (ФГОС ВО) нового поколения.