

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования  
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"  
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского



УТВЕРЖДАЮ

Проректор по образовательной деятельности КФУ

Е.А. Турилова

28 февраля 2025 г.

подписано электронно-цифровой подписью

## Программа дисциплины

### Геометрия и анализ на многообразиях

Направление подготовки: 01.04.01 - Математика

Профиль подготовки: Геометрия и ее приложения

Квалификация выпускника: магистр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

Год начала обучения по образовательной программе: 2025

## **Содержание**

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения ОПОП ВО
2. Место дисциплины (модуля) в структуре ОПОП ВО
3. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся
4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий
  - 4.1. Структура и тематический план контактной и самостоятельной работы по дисциплине (модулю)
  - 4.2. Содержание дисциплины (модуля)
5. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)
6. Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю)
7. Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)
8. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)
9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)
10. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)
11. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)
12. Средства адаптации преподавания дисциплины (модуля) к потребностям обучающихся инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья
13. Приложение №1. Фонд оценочных средств
14. Приложение №2. Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)
15. Приложение №3. Перечень информационных технологий, используемых для освоения дисциплины (модуля), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем

Программу дисциплины разработал(а)(и): заведующий кафедрой, д.н. Попов А.А. (Кафедра геометрии, отделение математики), aropov@kpfu.ru ; Кордюков Юрий Аркадьевич

## **1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения ОПОП ВО**

Обучающийся, освоивший дисциплину (модуль), должен обладать следующими компетенциями:

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
ПК-2	Способен организовывать научно-исследовательскую и научно-производственную работу, управлять научным коллективом, публично представлять собственные и известные научные результаты
ПК-5	Обладать знаниями о здоровьесбережении и организации здорового образа жизни

Обучающийся, освоивший дисциплину (модуль):

Должен знать:

определения и свойства основных объектов теории групп Ли и локально тривиальных расслоений, формулировки наиболее важных утверждений, методы их

доказательств, возможные сферы приложений.

Должен уметь:

решать задачи вычислительного и теоретического характера в области теории групп Ли и локально тривиальных расслоений, устанавливать взаимосвязи между понятиями, доказывать утверждения.

Должен владеть:

методами решения различных задач теории групп Ли и расслоенных пространств.

Должен демонстрировать способность и готовность:

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

- 1) Знать определения и свойства основных объектов теории групп Ли и локально три-вияльных расслоений, формулировки наиболее важных утверждений, методы их доказательств, возможные сферы приложений.
- 2) Уметь решать задачи вычислительного и теоретического характера в области теории групп Ли и локально тривиальных расслоений, устанавливать взаимосвязи между понятиями, доказывать утверждения.
- 3) Владеть методами решения различных задач теории групп Ли и расслоенных пространств.
- 4) Демонстрировать способность и готовность применять полученные знания и навыки в научно-исследовательской работе и преподавании.

## **2. Место дисциплины (модуля) в структуре ОПОП ВО**

Данная дисциплина (модуль) включена в раздел "Б1.В.ДВ.03.02 Дисциплины (модули)" основной профессиональной образовательной программы 01.04.01 "Математика (Геометрия и ее приложения)" и относится к дисциплинам по выбору части ОПОП ВО, формируемой участниками образовательных отношений.

Осваивается на 1 курсе в 1 семестре.

## **3. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся**

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зачетных(ые) единиц(ы) на 144 часа(ов).

Контактная работа - 46 часа(ов), в том числе лекции - 24 часа(ов), практические занятия - 22 часа(ов), лабораторные работы - 0 часа(ов), контроль самостоятельной работы - 0 часа(ов).

Самостоятельная работа - 53 часа(ов).

Контроль (зачёт / экзамен) - 45 часа(ов).

Форма промежуточного контроля дисциплины: экзамен в 1 семестре.

**4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий**

**4.1 Структура и тематический план контактной и самостоятельной работы по дисциплине (модулю)**

N	Разделы дисциплины / модуля	Се-мestr	Виды и часы контактной работы, их трудоемкость (в часах)						Само-стое-тель-ная ра-бота
			Лекции, всего	Лекции в эл. форме	Практические занятия, всего	Практические в эл. форме	Лабора-торные работы, всего	Лабора-торные в эл. форме	
1.	Тема 1. Гладкие многообразия	1	4	0	2	0	0	0	8
2.	Тема 2. Дифференциальные формы	1	4	0	4	0	0	0	8
3.	Тема 3. Связности на векторных расслоениях	1	4	0	4	0	0	0	8
4.	Тема 4. Римановы многообразия	1	4	0	4	0	0	0	8
5.	Тема 5. Связности на римановы многообразиях	1	4	0	4	0	0	0	8
6.	Тема 6. Операторы Дирака	1	4	0	4	0	0	0	13
	Итого		24	0	22	0	0	0	53

**4.2 Содержание дисциплины (модуля)**

**Тема 1. Гладкие многообразия**

Гладкие многообразия. Примеры гладких многообразий.

Подмногообразия.

Гладкие функции и отображения.

Касательное пространство.

Касательное расслоение многообразия.

Векторные поля.

Скобка Ли.

Группа Ли.

Алгебра Ли.

Алгебра Ли, ассоциированная с группой Ли.

Примеры групп и алгебр Ли.

**Тема 2. Дифференциальные формы**

Дифференциальные формы.

Операции над дифференциальными формами, их свойства.

Внешний дифференциал.

Комплекс де Рама и когомологии де Рама.

Лемма Пуанкаре.

Ориентация многообразия.

Интегрирование дифференциальных форм по многообразию.

Формула Стокса.

**Тема 3. Связности на векторных расслоениях**

Векторное расслоение.

Функции склейки векторного расслоения.

Примеры векторных расслоений.

Тензорные расслоения.

Тензоры.

Связность на векторном расслоении.

Форма связности в локальных координатах.

Форма кривизна.

Связности в касательном расслоении.

Кручение связности.

Ковариантное дифференцирование дифференциальных форм.

#### **Тема 4. Римановы многообразия**

Тензорные расслоения.

Риманова метрика. Риманово многообразие. Примеры.

Изометрия римановых многообразий. Форма риманова объема.

Дивергенция векторного поля. Теорема о дивергенции.

Оператор Лапласа-Бельтрами.

Оператор Ходжа Лапласа.

Гармонические формы.

Теория Ходжа.

Дифференциальные формы и векторный анализ.

#### **Тема 5. Связности на римановы многообразиях**

Риманова связность.

Основная теорема римановой геометрии.

Символы Кристоффеля.

Тензор римановой кривизны, его свойства.

Тензор Риччи.

Скалярная кривизна.

Лапласиан Бохнера.

Формула Бохнера.

Теорема Бохнера об обращении в нуль.

#### **Тема 6. Операторы Дирака**

Оператор Дирака в плоском пространстве. Алгебра Клиффорда и матрицы Дирака. Спиноры и спинорное представление. Расслоение Дирака. Оператор Дирака на многообразии. Примеры. Формула Лихнеровича.

Теорема об индексе для оператора Дирака, ее частные случаи. Теорема Лихнеровича о топологических препятствиях к существованию метрики положительной скалярной кривизны.

### **5. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)**

Самостоятельная работа обучающихся выполняется по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия. Самостоятельная работа подразделяется на самостоятельную работу на аудиторных занятиях и на внеаудиторную самостоятельную работу. Самостоятельная работа обучающихся включает как полностью самостоятельное освоение отдельных тем (разделов) дисциплины, так и проработку тем (разделов), осваиваемых во время аудиторной работы. Во время самостоятельной работы обучающиеся читают и конспектируют учебную, научную и справочную литературу, выполняют задания, направленные на закрепление знаний и отработку умений и навыков, готовятся к текущему и промежуточному контролю по дисциплине.

Организация самостоятельной работы обучающихся регламентируется нормативными документами, учебно-методической литературой и электронными образовательными ресурсами, включая:

Порядок организации и осуществления образовательной деятельности по образовательным программам высшего образования - программам бакалавриата, программам специалитета, программам магистратуры (утвержден приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации от 6 апреля 2021 года №245)

Письмо Министерства образования Российской Федерации №14-55-996ин/15 от 27 ноября 2002 г. "Об активизации самостоятельной работы студентов высших учебных заведений"

Устав федерального государственного автономного образовательного учреждения "Казанский (Приволжский) федеральный университет"

Правила внутреннего распорядка федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования "Казанский (Приволжский) федеральный университет"

Локальные нормативные акты Казанского (Приволжского) федерального университета

Connections in the second order tangent bundle with extended structure group -

<http://link.springer.com/article/10.1134/S199508021403010X>

Notes on Differential Geometry and Lie Groups - <https://www.cis.upenn.edu/~cis610/diffgeom-n.pdf>

On the higher order geometry of Weil bundles over smooth manifolds and over parameter-dependent manifolds -  
[https://ljm.kpfu.ru/old/Volume\\_18/18\\_4.pdf](https://ljm.kpfu.ru/old/Volume_18/18_4.pdf)

## **6. Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю)**

Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю) включает оценочные материалы, направленные на проверку освоения компетенций, в том числе знаний, умений и навыков. Фонд оценочных средств включает оценочные средства текущего контроля и оценочные средства промежуточной аттестации.

В фонде оценочных средств содержится следующая информация:

- соответствие компетенций планируемым результатам обучения по дисциплине (модулю);
- критерии оценивания сформированности компетенций;
- механизм формирования оценки по дисциплине (модулю);
- описание порядка применения и процедуры оценивания для каждого оценочного средства;
- критерии оценивания для каждого оценочного средства;
- содержание оценочных средств, включая требования, предъявляемые к действиям обучающихся, демонстрируемым результатам, задания различных типов.

Фонд оценочных средств по дисциплине находится в Приложении 1 к программе дисциплины (модулю).

## **7. Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)**

Освоение дисциплины (модуля) предполагает изучение основной и дополнительной учебной литературы. Литература может быть доступна обучающимся в одном из двух вариантов (либо в обоих из них):

- в электронном виде - через электронные библиотечные системы на основании заключенных КФУ договоров с правообладателями;
- в печатном виде - в Научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского. Обучающиеся получают учебную литературу на абонементе по читательским билетам в соответствии с правилами пользования Научной библиотекой.

Электронные издания доступны дистанционно из любой точки при введении обучающимся своего логина и пароля от личного кабинета в системе "Электронный университет". При использовании печатных изданий библиотечный фонд должен быть укомплектован ими из расчета не менее 0,5 экземпляра (для обучающихся по ФГОС 3++ - не менее 0,25 экземпляра) каждого из изданий основной литературы и не менее 0,25 экземпляра дополнительной литературы на каждого обучающегося из числа лиц, одновременно осваивающих данную дисциплину.

Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля), находится в Приложении 2 к рабочей программе дисциплины. Он подлежит обновлению при изменении условий договоров КФУ с правообладателями электронных изданий и при изменении комплектования фондов Научной библиотеки КФУ.

## **8. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

Connections in the second order tangent bundle with extended structure group -  
<http://link.springer.com/article/10.1134/S199508021403010X>

Notes on Differential Geometry and Lie Groups - <https://www.cis.upenn.edu/~cis610/diffgeom-n.pdf>

On the higher order geometry of Weil bundles over smooth manifolds and over parameter-dependent manifolds -  
[https://ljm.kpfu.ru/old/Volume\\_18/18\\_4.pdf](https://ljm.kpfu.ru/old/Volume_18/18_4.pdf)

## **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

Вид работ	Методические рекомендации
лекции	В ходе лекционных занятий вести конспектирование учебного материала. Обращать внимание на категории, формулировки, раскрывающие содержание тех или иных явлений и процессов, научные выводы и практические рекомендации. Задавать преподавателю уточняющие вопросы с целью уяснения теоретических положений и оптимальных способов решения различных типов задач.
практические занятия	При подготовке к практическому занятию следует освежить в памяти теоретический материал, изложенный преподавателем на лекциях, относящийся к изучаемой на занятии теме. Во время практического занятия следует отмечать излагаемые преподавателем методы и приемы решения задач, а при самостоятельном решении задач из домашнего задания следует по каждой не решенной задаче подготовить вопросы к преподавателю для разбора на аудиторном занятии.

Вид работ	Методические рекомендации
самостоятельная работа	Самостоятельная работа студента по освоению теоретического материала состоит из изучения обязательного материала, изложенного на лекциях, и дополнительного изучения материала по рекомендованной учебной литературе для углубленного усвоения предмета и понимания, где и как пройденный материал может применяться. При решении задач из домашнего задания следует разобрать способы решения типовых задач, разобранные на аудиторном занятии. При подготовке к контрольной работе следует повторить весь материал, относящийся к темам контрольной работы, руководствуясь конкретными указаниями преподавателя.
экзамен	Экзамен проводится в письменной форме. Экзаменационный билет содержит два вопроса из программы курса и одну задачу. Полный ответ на каждый вопрос оценивается в 20 баллов, правильное решение задачи оценивается в 10 баллов. Неполный ответ, частичное решение задачи и решение задачи, содержащее ошибки, оцениваются меньшим числом баллов. Экзамен считается сданным, если при ответе на экзаменационный билет набрано не менее 28 баллов. При простановке оценки число баллов, набранных на экзамене, суммируется с числом баллов, набранных на практических занятиях. Экзаменационный билет содержит вопросы и задачи из всех разделов программы. При подготовке к экзамену следует ориентироваться на приведенный в п. 6.3 образец экзаменационного билета.

## **10. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем, представлен в Приложении 3 к рабочей программе дисциплины (модуля).

## **11. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)**

Материально-техническое обеспечение образовательного процесса по дисциплине (модулю) включает в себя следующие компоненты:

Помещения для самостоятельной работы обучающихся, укомплектованные специализированной мебелью (столы и стулья) и оснащенные компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду КФУ.

Учебные аудитории для контактной работы с преподавателем, укомплектованные специализированной мебелью (столы и стулья).

Компьютер и принтер для распечатки раздаточных материалов.

Мультимедийная аудитория.

## **12. Средства адаптации преподавания дисциплины к потребностям обучающихся инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья**

При необходимости в образовательном процессе применяются следующие методы и технологии, облегчающие восприятие информации обучающимися инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья:

- создание текстовой версии любого нетекстового контента для его возможного преобразования в альтернативные формы, удобные для различных пользователей;
- создание контента, который можно представить в различных видах без потери данных или структуры, предусмотреть возможность масштабирования текста и изображений без потери качества, предусмотреть доступность управления контентом с клавиатуры;
- создание возможностей для обучающихся воспринимать одну и ту же информацию из разных источников - например, так, чтобы лица с нарушениями слуха получали информацию визуально, с нарушениями зрения - аудиально;
- применение программных средств, обеспечивающих возможность освоения навыков и умений, формируемых дисциплиной, за счёт альтернативных способов, в том числе виртуальных лабораторий и симуляционных технологий;

- применение дистанционных образовательных технологий для передачи информации, организации различных форм интерактивной контактной работы обучающегося с преподавателем, в том числе вебинаров, которые могут быть использованы для проведения виртуальных лекций с возможностью взаимодействия всех участников дистанционного обучения, проведения семинаров, выступления с докладами и защиты выполненных работ, проведения тренингов, организации коллективной работы;
- применение дистанционных образовательных технологий для организации форм текущего и промежуточного контроля;
- увеличение продолжительности сдачи обучающимся инвалидом или лицом с ограниченными возможностями здоровья форм промежуточной аттестации по отношению к установленной продолжительности их сдачи:

  - продолжительности сдачи зачёта или экзамена, проводимого в письменной форме, - не более чем на 90 минут;
  - продолжительности подготовки обучающегося к ответу на зачёте или экзамене, проводимом в устной форме, - не более чем на 20 минут;
  - продолжительности выступления обучающегося при защите курсовой работы - не более чем на 15 минут.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО и учебным планом по направлению 01.04.01 "Математика" и магистерской программе "Геометрия и ее приложения".

*Приложение 2*  
к рабочей программе дисциплины (модуля)  
Б1.В.ДВ.03.02 Геометрия и анализ на многообразиях

**Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)**

Направление подготовки: 01.04.01 - Математика

Профиль подготовки: Геометрия и ее приложения

Квалификация выпускника: магистр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

Год начала обучения по образовательной программе: 2025

**Основная литература:**

1. Сандракова, Е. В. Дифференциальные формы на гладких многообразиях : учебное пособие / Е. В. Сандракова, Е. В. Сумин. - Москва : НИЯУ МИФИ, 2014. - 140 с. - ISBN 978-5-7262-2005-5. - Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/103230> (дата обращения: 14.05.2025). - Режим доступа: для авториз. пользователей.
2. Исковских, В. А. Многомерная геометрия - ;, 2016. - 624 с.: ISBN 978-5-4439-2499-1. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/958699> (дата обращения: 06.08.2025). - Режим доступа: по подписке.
3. Онищук, Н. М. Тензоры и тензорные поля на гладком многообразии : учебное пособие / Н. М. Онищук. - Томск : ТГУ, 2012. - 104 с. - Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/44926> (дата обращения: 14.05.2025). - Режим доступа: для авториз. пользователей.

**Дополнительная литература:**

1. Паньженский, В. И. Введение в дифференциальную геометрию : учебное пособие / В. И. Паньженский. - 2-е изд., испр. - Санкт-Петербург : Лань, 2015. - 240 с. - ISBN 978-5-8114-1979-1. - Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/67459> (дата обращения: 14.05.2025). - Режим доступа: для авториз. пользователей.
2. Сосов, Е. Н. Введение в теорию групп Ли: Учебно-методическое пособие. / Е.Н.Сосов. Казань: Казанский (Приволжский) федеральный университет. -2016. - 89 с.- URL: [http://kpfu.ru//staff\\_files/F709891002/Lie8.pdf](http://kpfu.ru//staff_files/F709891002/Lie8.pdf) (дата обращения: 14.05.2025). - Режим доступа: открыто
3. Ефимов, Н. В. Линейная алгебра и многомерная геометрия / Н. В. Ефимов, Э. Р. Розендорн. - 3-е изд. - Москва : Физматлит, 2004. - 464 с. - ISBN 978-5-9221-0386-5. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/544609> (дата обращения: 14.05.2025). - Режим доступа: по подписке.

*Приложение 3*  
к рабочей программе дисциплины (модуля)  
Б1.В.ДВ.03.02 Геометрия и анализ на многообразиях

**Перечень информационных технологий, используемых для освоения дисциплины (модуля), включая  
перечень программного обеспечения и информационных справочных систем**

Направление подготовки: 01.04.01 - Математика

Профиль подготовки: Геометрия и ее приложения

Квалификация выпускника: магистр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

Год начала обучения по образовательной программе: 2025

Освоение дисциплины (модуля) предполагает использование следующего программного обеспечения и информационно-справочных систем:

Операционная система Microsoft Windows 7 Профессиональная или Windows XP (Volume License)

Пакет офисного программного обеспечения Microsoft Office 365 или Microsoft Office Professional plus 2010

Браузер Mozilla Firefox

Браузер Google Chrome

Adobe Reader XI или Adobe Acrobat Reader DC

Kaspersky Endpoint Security для Windows

Учебно-методическая литература для данной дисциплины имеется в наличии в электронно-библиотечной системе "ZNANIUM.COM", доступ к которой предоставлен обучающимся. ЭБС "ZNANIUM.COM" содержит произведения крупнейших российских учёных, руководителей государственных органов, преподавателей ведущих вузов страны, высококвалифицированных специалистов в различных сферах бизнеса. Фонд библиотеки сформирован с учетом всех изменений образовательных стандартов и включает учебники, учебные пособия, учебно-методические комплексы, монографии, авторефераты, диссертации, энциклопедии, словари и справочники, законодательно-нормативные документы, специальные периодические издания и издания, выпускаемые издательствами вузов. В настоящее время ЭБС ZNANIUM.COM соответствует всем требованиям федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования (ФГОС ВО) нового поколения.

Учебно-методическая литература для данной дисциплины имеется в наличии в электронно-библиотечной системе Издательства "Лань", доступ к которой предоставлен обучающимся. ЭБС Издательства "Лань" включает в себя электронные версии книг издательства "Лань" и других ведущих издательств учебной литературы, а также электронные версии периодических изданий по естественным, техническим и гуманитарным наукам. ЭБС Издательства "Лань" обеспечивает доступ к научной, учебной литературе и научным периодическим изданиям по максимальному количеству профильных направлений с соблюдением всех авторских и смежных прав.

Учебно-методическая литература для данной дисциплины имеется в наличии в электронно-библиотечной системе "Консультант студента", доступ к которой предоставлен обучающимся. Многопрофильный образовательный ресурс "Консультант студента" является электронной библиотечной системой (ЭБС), предоставляющей доступ через сеть Интернет к учебной литературе и дополнительным материалам, приобретенным на основании прямых договоров с правообладателями. Полностью соответствует требованиям федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования к комплектованию библиотек, в том числе электронных, в части формирования фондов основной и дополнительной литературы.