

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования  
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"  
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского



**УТВЕРЖДАЮ**  
Проректор по образовательной деятельности КФУ  
\_\_\_\_\_ Турилова Е.А.  
"\_\_\_" \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

**Программа дисциплины**  
Спектральная теорема

Направление подготовки: 01.03.01 - Математика  
Профиль подготовки: Математика в цифровой экономике  
Квалификация выпускника: бакалавр  
Форма обучения: очное  
Язык обучения: русский  
Год начала обучения по образовательной программе: 2024

## Содержание

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения ОПОП ВО
2. Место дисциплины (модуля) в структуре ОПОП ВО
3. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся
4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий
  - 4.1. Структура и тематический план контактной и самостоятельной работы по дисциплине (модулю)
  - 4.2. Содержание дисциплины (модуля)
5. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)
6. Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю)
7. Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)
8. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)
9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)
10. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)
11. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)
12. Средства адаптации преподавания дисциплины (модуля) к потребностям обучающихся инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья
13. Приложение №1. Фонд оценочных средств
14. Приложение №2. Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)
15. Приложение №3. Перечень информационных технологий, используемых для освоения дисциплины (модуля), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем

Программу дисциплины разработал(а)(и): доцент, к.н. Скворцова Г.Ш. (Кафедра математического анализа, отделение математики), galiyha@mail.ru

**1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения ОПОП ВО**

Обучающийся, освоивший дисциплину (модуль), должен обладать следующими компетенциями:

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
ПК-2	Способен активно участвовать в исследовании новых математических моделей в естественных науках

Обучающийся, освоивший дисциплину (модуль):

Должен знать:

Основные положения функционального исчисления операторов: самосопряженность и замкнутость операторов, спектр оператора, разложение единицы, проекторнозначные меры.

Должен уметь:

определять является ли заданный оператор самосопряженным, замкнутым ; вычислять спектр оператора, находить мультипликаторы операторов, записывать функции от операторов.

Должен владеть:

основными приемами функционального исчисления операторов.

**2. Место дисциплины (модуля) в структуре ОПОП ВО**

Данная дисциплина (модуль) включена в раздел "Б1.В.ДВ.06.04 Дисциплины (модули)" основной профессиональной образовательной программы 01.03.01 "Математика (Математика в цифровой экономике)" и относится к дисциплинам по выбору части ОПОП ВО, формируемой участниками образовательных отношений.

Осваивается на 4 курсе в 7 семестре.

**3. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся**

Общая трудоемкость дисциплины составляет 2 зачетных(ые) единиц(ы) на 72 часа(ов).

Контактная работа - 52 часа(ов), в том числе лекции - 26 часа(ов), практические занятия - 26 часа(ов), лабораторные работы - 0 часа(ов), контроль самостоятельной работы - 0 часа(ов).

Самостоятельная работа - 20 часа(ов).

Контроль (зачёт / экзамен) - 0 часа(ов).

Форма промежуточного контроля дисциплины: зачет в 7 семестре.

**4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий**

**4.1 Структура и тематический план контактной и самостоятельной работы по дисциплине (модулю)**

N	Разделы дисциплины / модуля	Се-местр	Виды и часы контактной работы, их трудоемкость (в часах)						Само-стоя-тельная ра-бота
			Лекции, всего	Лекции в эл. форме	Практи-ческие занятия, всего	Практи-ческие в эл. форме	Лабора-торные работы, всего	Лабора-торные в эл. форме	
1.	Тема 1. Эрмитовы и самосопряженные операторы	7	6	0	6	0	0	0	10
2.	Тема 2. Спектр оператора	7	5	0	5	0	0	0	10
3.	Тема 3. Спектральная теорема для самосопряженного оператора в терминах мультипликаторов.	7	5	0	5	0	0	0	0

N	Разделы дисциплины / модуля	Се- местр	Виды и часы контактной работы, их трудоемкость (в часах)						Само- стоя- тель- ная ра- бота
			Лекции, всего	Лекции в эл. форме	Практи- ческие занятия, всего	Практи- ческие в эл. форме	Лабора- торные работы, всего	Лабора- торные в эл. форме	
4.	Тема 4. Спектральная теорема для самосопряженного оператора в терминах разложения единицы.	7	5	0	5	0	0	0	0
5.	Тема 5. Проекторнозначные меры и функциональное исчисление. Теорема Стоуна	7	5	0	5	0	0	0	0
	Итого		26	0	26	0	0	0	20

## 4.2 Содержание дисциплины (модуля)

### Тема 1. Эрмитовы и самосопряженные операторы

Понятие линейного оператора в гильбертовом пространстве. Понятие плотно заданного оператора в гильбертовом пространстве. Понятие замкнутого оператора в гильбертовом пространстве. Понятие замыкаемого оператора в гильбертовом пространстве. Понятия эрмитового и самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве. Свойства этих операторов.

### Тема 2. Спектр оператора

Понятие резольвентного множества замкнутого оператора в гильбертовом пространстве.

Понятие спектра и собственного вектора замкнутого оператора в гильбертовом пространстве. Свойство семейства резольвент замкнутого оператора в гильбертовом пространстве. Спектр самосопряженного оператора. Интегральное представление аналитических функций

### Тема 3. Спектральная теорема для самосопряженного оператора в терминах мультипликаторов.

Изоморфизм гильбертова пространства, построенного на собственных векторах, пространству интегрируемых с квадратом функций. Понятие оператора-мультипликатора в пространстве интегрируемых с квадратом функций. Спектральная теорема для самосопряженного оператора в терминах мультипликаторов на гильбертовом пространстве интегрируемых с квадратом функций.

### Тема 4. Спектральная теорема для самосопряженного оператора в терминах разложения единицы.

Понятие разложение единицы в гильбертовом пространстве. Свойства разложение единицы в гильбертовом пространстве. Спектральная теорема для самосопряженного оператора в терминах разложения единицы. Существование разложения единицы в спектральной теореме. Единственность разложения единицы в спектральной теореме.

### Тема 5. Проекторнозначные меры и функциональное исчисление. Теорема Стоуна

Понятие проекторнозначных мер в гильбертовом пространстве. Существование и единственность проекторнозначной меры в гильбертовом пространстве, ассоциированной с самосопряженным оператором. Существование и единственность измеримой функции от самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве. Унитарное представление самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве.

## 5. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)

Самостоятельная работа обучающихся выполняется по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия. Самостоятельная работа подразделяется на самостоятельную работу на аудиторных занятиях и на внеаудиторную самостоятельную работу. Самостоятельная работа обучающихся включает как полностью самостоятельное освоение отдельных тем (разделов) дисциплины, так и проработку тем (разделов), осваиваемых во время аудиторной работы. Во время самостоятельной работы обучающиеся читают и конспектируют учебную, научную и справочную литературу, выполняют задания, направленные на закрепление знаний и отработку умений и навыков, готовятся к текущему и промежуточному контролю по дисциплине.

Организация самостоятельной работы обучающихся регламентируется нормативными документами, учебно-методической литературой и электронными образовательными ресурсами, включая:

Порядок организации и осуществления образовательной деятельности по образовательным программам высшего образования - программам бакалавриата, программам специалитета, программам магистратуры (утвержден приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации от 6 апреля 2021 года №245)

Письмо Министерства образования Российской Федерации №14-55-99бин/15 от 27 ноября 2002 г. "Об активизации самостоятельной работы студентов высших учебных заведений"

Устав федерального государственного автономного образовательного учреждения "Казанский (Приволжский) федеральный университет"

Правила внутреннего распорядка федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования "Казанский (Приволжский) федеральный университет"

Локальные нормативные акты Казанского (Приволжского) федерального университета

### 6. Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю)

Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю) включает оценочные материалы, направленные на проверку освоения компетенций, в том числе знаний, умений и навыков. Фонд оценочных средств включает оценочные средства текущего контроля и оценочные средства промежуточной аттестации.

В фонде оценочных средств содержится следующая информация:

- соответствие компетенций планируемым результатам обучения по дисциплине (модулю);
- критерии оценивания сформированности компетенций;
- механизм формирования оценки по дисциплине (модулю);
- описание порядка применения и процедуры оценивания для каждого оценочного средства;
- критерии оценивания для каждого оценочного средства;
- содержание оценочных средств, включая требования, предъявляемые к действиям обучающихся, демонстрируемым результатам, задания различных типов.

Фонд оценочных средств по дисциплине находится в Приложении 1 к программе дисциплины (модулю).

### 7. Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)

Освоение дисциплины (модуля) предполагает изучение основной и дополнительной учебной литературы. Литература может быть доступна обучающимся в одном из двух вариантов (либо в обоих из них):

- в электронном виде - через электронные библиотечные системы на основании заключенных КФУ договоров с правообладателями;
- в печатном виде - в Научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского. Обучающиеся получают учебную литературу на абонементе по читательским билетам в соответствии с правилами пользования Научной библиотекой.

Электронные издания доступны дистанционно из любой точки при введении обучающимся своего логина и пароля от личного кабинета в системе "Электронный университет". При использовании печатных изданий библиотечный фонд должен быть укомплектован ими из расчета не менее 0,5 экземпляра (для обучающихся по ФГОС 3++ - не менее 0,25 экземпляра) каждого из изданий основной литературы и не менее 0,25 экземпляра дополнительной литературы на каждого обучающегося из числа лиц, одновременно осваивающих данную дисциплину.

Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля), находится в Приложении 2 к рабочей программе дисциплины. Он подлежит обновлению при изменении условий договоров КФУ с правообладателями электронных изданий и при изменении комплектования фондов Научной библиотеки КФУ.

### 8. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

A.N. Sherstnev, O.E. Tikhonov, \textit{On characterization of integrable sesquilinear forms,} A.N. Sherstnev, O.E. Tikhonov, \textit{On characterization of integrable sesquilinear forms,} - <http://arxiv.org/abs/1101.0558>

G.D. Lugovaya and A.N. Sherstnev, \textit{A characterization of orthogonal vector fields over  $W^*$ -algebras of type  $I_2$ ,} - <http://arxiv.org/abs/1301.4768>

Электронная библиотека КФУ - <http://www.ksu.ru/f5/index.php?id=7>

### 9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Вид работ	Методические рекомендации
лекции	Перед занятием студенты должны повторить материал предыдущих лекций, освежить в памяти основные понятия, прочитать соответствующий в учебниках и учебных пособиях. Особое внимание стоит уделить определениям, теоремам и прочим утверждениям, которые нужно хорошо осознать и уверенно ими оперировать. При необходимости можно также решать задачи и упражнения.

Вид работ	Методические рекомендации
практические занятия	Работа на практических занятиях предполагает систематическую и планомерную подготовку к занятию. После лекции следует познакомиться с планом практических занятий и списком обязательной и дополнительной литературы, которую необходимо прочитать, изучить и законспектировать. Разъяснение по вопросам новой темы даются преподавателем в конце предыдущего практического занятия
самостоятельная работа	САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА требует, прежде всего, изучения рекомендуемых источников и монографических работ, их реферирования, подготовки докладов и сообщений. Важным этапом в самостоятельной работе является повторение материала по конспекту лекции. Одна из главных составляющих внеаудиторной подготовки - работа с учебником. Она предполагает: внимательное прочтение, критическое осмысление содержания, обоснование собственной позиции по дискуссионным моментам, постановки интересующих вопросов, которые могут стать предметом обсуждения на семинаре. При работе с терминами необходимо обращаться к словарям, в том числе доступным в Интернете, например, на сайте <a href="http://dic.academic.ru">http://dic.academic.ru</a> .
зачет	При подготовке к ЗАЧЕТУ необходимо опираться, прежде всего, на лекции, а также на источники, которые разбирались на семинарах в течение семестра. Ответ на зачете предполагает полное и последовательное изложение изученного материала, а также демонстрацию способности и готовности применить полученные теоретические знания к предлагаемым практическим заданиям.

### 10. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем, представлен в Приложении 3 к рабочей программе дисциплины (модуля).

### 11. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Материально-техническое обеспечение образовательного процесса по дисциплине (модулю) включает в себя следующие компоненты:

Помещения для самостоятельной работы обучающихся, укомплектованные специализированной мебелью (столы и стулья) и оснащенные компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду КФУ.

Учебные аудитории для контактной работы с преподавателем, укомплектованные специализированной мебелью (столы и стулья).

Компьютер и принтер для распечатки раздаточных материалов.

Мультимедийная аудитория.

### 12. Средства адаптации преподавания дисциплины к потребностям обучающихся инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья

При необходимости в образовательном процессе применяются следующие методы и технологии, облегчающие восприятие информации обучающимися инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья:

- создание текстовой версии любого нетекстового контента для его возможного преобразования в альтернативные формы, удобные для различных пользователей;
- создание контента, который можно представить в различных видах без потери данных или структуры, предусмотреть возможность масштабирования текста и изображений без потери качества, предусмотреть доступность управления контентом с клавиатуры;
- создание возможностей для обучающихся воспринимать одну и ту же информацию из разных источников - например, так, чтобы лица с нарушениями слуха получали информацию визуально, с нарушениями зрения - аудиально;
- применение программных средств, обеспечивающих возможность освоения навыков и умений, формируемых дисциплиной, за счёт альтернативных способов, в том числе виртуальных лабораторий и симуляционных технологий;
- применение дистанционных образовательных технологий для передачи информации, организации различных форм интерактивной контактной работы обучающегося с преподавателем, в том числе вебинаров, которые могут быть использованы для проведения виртуальных лекций с возможностью взаимодействия всех участников дистанционного обучения, проведения семинаров, выступления с докладами и защиты выполненных работ, проведения тренингов, организации коллективной работы;
- применение дистанционных образовательных технологий для организации форм текущего и промежуточного контроля;

- увеличение продолжительности сдачи обучающимся инвалидом или лицом с ограниченными возможностями здоровья форм промежуточной аттестации по отношению к установленной продолжительности их сдачи;
- продолжительности сдачи зачёта или экзамена, проводимого в письменной форме, - не более чем на 90 минут;
- продолжительности подготовки обучающегося к ответу на зачёте или экзамене, проводимом в устной форме, - не более чем на 20 минут;
- продолжительности выступления обучающегося при защите курсовой работы - не более чем на 15 минут.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО и учебным планом по направлению 01.03.01 "Математика" и профилю подготовки "Математика в цифровой экономике".

### Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)

Направление подготовки: 01.03.01 - Математика

Профиль подготовки: Математика в цифровой экономике

Квалификация выпускника: бакалавр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

Год начала обучения по образовательной программе: 2024

#### Основная литература:

Основная литература:

1. Хелемский, А. Я. Лекции по функциональному анализу : учебник / А. Я. Хелемский. - 2-е изд. - Москва : МЦНМО, 2014. - 560 с. - ISBN 978-5-4439-2043-6. - Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/56415> (дата обращения: 16.03.2022). - Режим доступа: для авториз. пользователей.
2. Пирковский, А. Ю. Спектральная теория и функциональные исчисления для линейных операторов : учебное пособие / А. Ю. Пирковский. - Москва : МЦНМО, 2010. - 176 с. - ISBN 978-5-94057-573-3. - Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/9384> (дата обращения: 16.03.2022). - Режим доступа: для авториз. пользователей.
3. Бирман, М. Ш. Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве : учебное пособие / М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк. - 2-е изд., испр. и доп. - Санкт-Петербург : Лань, 2010. - 464 с. - ISBN 978-5-8114-1076-7. - Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/635> (дата обращения: 21.03.2022). - Режим доступа: для авториз. пользователей.

#### Дополнительная литература:

Дополнительная литература:

1. Шерстнев, А. Н. Методы билинейных форм в некоммутативной теории меры и интеграла / А. Н. Шерстнев. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2008. - 264 с. - ISBN 978-5-9221-0911-6. - Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/59501> (дата обращения: 19.02.2023). - Режим доступа: для авториз. пользователей.
2. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа : учебное пособие / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. - 7-е изд. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2009. - 572 с. - ISBN 978-5-9221-0266-7. - Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/2206> (дата обращения: 21.03.2022). - Режим доступа: для авториз. пользователей.
3. Хелемский, А. Я. Квантовый функциональный анализ в бескоординатном изложении : монография / А. Я. Хелемский. - Москва : МЦНМО, 2009. - 304 с. - ISBN 978-5-94057-507-8. - Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/9433> (дата обращения: 21.03.2022). - Режим доступа: для авториз. пользователей.

**Перечень информационных технологий, используемых для освоения дисциплины (модуля), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем**

Направление подготовки: 01.03.01 - Математика

Профиль подготовки: Математика в цифровой экономике

Квалификация выпускника: бакалавр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

Год начала обучения по образовательной программе: 2024

Освоение дисциплины (модуля) предполагает использование следующего программного обеспечения и информационно-справочных систем:

Операционная система Microsoft Windows 7 Профессиональная или Windows XP (Volume License)

Пакет офисного программного обеспечения Microsoft Office 365 или Microsoft Office Professional plus 2010

Браузер Mozilla Firefox

Браузер Google Chrome

Adobe Reader XI или Adobe Acrobat Reader DC

Kaspersky Endpoint Security для Windows

Учебно-методическая литература для данной дисциплины имеется в наличии в электронно-библиотечной системе "ZNANIUM.COM", доступ к которой предоставлен обучающимся. ЭБС "ZNANIUM.COM" содержит произведения крупнейших российских учёных, руководителей государственных органов, преподавателей ведущих вузов страны, высококвалифицированных специалистов в различных сферах бизнеса. Фонд библиотеки сформирован с учетом всех изменений образовательных стандартов и включает учебники, учебные пособия, учебно-методические комплексы, монографии, авторефераты, диссертации, энциклопедии, словари и справочники, законодательно-нормативные документы, специальные периодические издания и издания, выпускаемые издательствами вузов. В настоящее время ЭБС ZNANIUM.COM соответствует всем требованиям федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования (ФГОС ВО) нового поколения.

Учебно-методическая литература для данной дисциплины имеется в наличии в электронно-библиотечной системе Издательства "Лань", доступ к которой предоставлен обучающимся. ЭБС Издательства "Лань" включает в себя электронные версии книг издательства "Лань" и других ведущих издательств учебной литературы, а также электронные версии периодических изданий по естественным, техническим и гуманитарным наукам. ЭБС Издательства "Лань" обеспечивает доступ к научной, учебной литературе и научным периодическим изданиям по максимальному количеству профильных направлений с соблюдением всех авторских и смежных прав.