

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования  
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"  
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского



**УТВЕРЖДАЮ**  
Проректор по образовательной деятельности КФУ  
\_\_\_\_\_ Турилова Е.А.  
"\_\_\_" \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

**Программа дисциплины**  
Дополнительные главы комплексного анализа

Направление подготовки: 01.04.01 - Математика  
Профиль подготовки: Анализ на многообразиях  
Квалификация выпускника: магистр  
Форма обучения: очное  
Язык обучения: русский  
Год начала обучения по образовательной программе: 2024

## Содержание

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения ОПОП ВО
2. Место дисциплины (модуля) в структуре ОПОП ВО
3. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся
4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий
  - 4.1. Структура и тематический план контактной и самостоятельной работы по дисциплине (модулю)
  - 4.2. Содержание дисциплины (модуля)
5. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)
6. Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю)
7. Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)
8. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)
9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)
10. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)
11. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)
12. Средства адаптации преподавания дисциплины (модуля) к потребностям обучающихся инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья
13. Приложение №1. Фонд оценочных средств
14. Приложение №2. Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)
15. Приложение №3. Перечень информационных технологий, используемых для освоения дисциплины (модуля), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем

Программу дисциплины разработал(а)(и): заведующий кафедрой, д.н. (профессор) Насыров С.Р. (Кафедра математического анализа, отделение математики), Samyon.Nasyrov@kpfu.ru ; Аксентьев Леонид Александрович

### 1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения ОПОП ВО

Обучающийся, освоивший дисциплину (модуль), должен обладать следующими компетенциями:

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
ПК-4	Способен ориентироваться в современных алгоритмах компьютерной математики; обладать способностями к эффективному применению и реализации математически сложных алгоритмов в современных программных комплексах
ПК-5	Способен преподавать математику и информатику в средней школе, специальных учебных заведениях, высших учебных заведениях на основе полученного фундаментального образования

Обучающийся, освоивший дисциплину (модуль):

Должен знать:

актуальные задачи комплексного анализа и научиться пользоваться современной журнальной и монографической литературой

Должен уметь:

ориентироваться в истории создания комплексного анализа

Должен владеть:

комплексным анализом при решении творческих задач

Должен демонстрировать способность и готовность:

публично представлять собственные и известные научные результаты по геометрической теории функций

### 2. Место дисциплины (модуля) в структуре ОПОП ВО

Данная дисциплина (модуль) включена в раздел "Б1.В.ДВ.09.02 Дисциплины (модули)" основной профессиональной образовательной программы 01.04.01 "Математика (Анализ на многообразиях)" и относится к дисциплинам по выбору части ОПОП ВО, формируемой участниками образовательных отношений.

Осваивается на 2 курсе в 3 семестре.

### 3. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зачетных(ые) единиц(ы) на 144 часа(ов).

Контактная работа - 56 часа(ов), в том числе лекции - 28 часа(ов), практические занятия - 28 часа(ов), лабораторные работы - 0 часа(ов), контроль самостоятельной работы - 0 часа(ов).

Самостоятельная работа - 61 часа(ов).

Контроль (зачёт / экзамен) - 27 часа(ов).

Форма промежуточного контроля дисциплины: экзамен в 3 семестре.

### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

#### 4.1 Структура и тематический план контактной и самостоятельной работы по дисциплине (модулю)

N	Разделы дисциплины / модуля	Се- местр	Виды и часы контактной работы, их трудоемкость (в часах)						Само- стоя- тель- ная ра- бота
			Лекции, всего	Лекции в эл. форме	Практи- ческие занятия, всего	Практи- ческие в эл. форме	Лабора- торные работы, всего	Лабора- торные в эл. форме	
N	Разделы дисциплины / модуля	Се- местр	Виды и часы контактной работы, их трудоемкость (в часах)						Само- стоя- тель- ная ра- бота
N	Разделы дисциплины / модуля	Се- местр	Лекции, всего	Лекции в эл. форме	Практи- ческие занятия, всего	Практи- ческие в эл. форме	Лабора- торные работы, всего	Лабора- торные в эл. форме	Само- стоя- тель- ная ра- бота
1.	Тема 1. Интегральные свойства аналитических функций	3	4	0	4	0	0	0	12
2.	Тема 2. Различные представления аналитических функций	3	6	0	6	0	0	0	14
3.	Тема 3. Геометрические свойства аналитических функций	3	6	0	6	0	0	0	12
4.	Тема 4. Семейства аналитических функций и их свойства	3	6	0	6	0	0	0	12
4.2	Тема 5. Обзор. Краткий обзор по приложениям комплексного анализа. Проблемы и задачи. Обсуждение и решение некоторых из них	3	6	0	6	0	0	0	11
	Тема 1. Интегральные свойства аналитических функций. Обобщенная форма леммы Шварца и её связь с принципом Линделёфа. Теорема Блоха. Теорема Никара, которая является обобщением теоремы Сохоцкого о поведении аналитической функции в окрестности существенно особой точки. Трансфинитный диаметр, постоянная Чебышева. Обобщение указанных теорем на случай гармонических отображений.								61

### Тема 2. Различные представления аналитических функций

Ёмкость и логарифмические потенциалы разных видов. Связь потенциалов с различными краевыми задачами. Интеграл Дирихле. Различные виды симметризации: симметризация областей относительно прямой, симметризация Штейнера в пространстве, симметризация Шварца. Теорема Фрагмена-Линделёфа. Экстремальные метрики и простые концы.

### Тема 3. Геометрические свойства аналитических функций

Элементарные свойства однолистных функций на примерах следующих классов: класс дробно-линейных функций, тригонометрические и гиперболические функции. Теоремы площадей. Логарифмические коэффициенты. Мажорация подчинённых аналитических функций. Теоремы вращения. Гипотеза Бибераха и её доказательство для подклассов однолистных функций.

### Тема 4. Семейства аналитических функций и их свойства

Вариации Шиффера и Голузина. Свойства экстремальных функций. Траектории квадратичных дифференциалов. Вывод дифференциального уравнения Лёвнера-Куфарева и свойства решений этого уравнения. Гидромеханическая характеристика решений уравнения Лёвнера-Куфарева. Прикладная характеристика квадратичных дифференциалов.

### Тема 5. Обзор. Краткий обзор по приложениям комплексного анализа. Проблемы и задачи. Обсуждение и решение некоторых из них.

Экстремальные задачи на классах однолистных функций и их приложения. Проблемы исследовательского характера. Приложения конформных отображений и конформных преобразования краевых задач. Обратная краевая задача теории крыла. Об условиях непрерывности граничных значений. Якобиан двумерного отображения и уравнение Бельтрами.

### 5. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)

Самостоятельная работа обучающихся выполняется по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия. Самостоятельная работа подразделяется на самостоятельную работу на аудиторных занятиях и на внеаудиторную самостоятельную работу. Самостоятельная работа обучающихся включает как полностью самостоятельное освоение отдельных тем (разделов) дисциплины, так и проработку тем (разделов), осваиваемых во время аудиторной работы. Во время самостоятельной работы обучающиеся читают и конспектируют учебную, научную и справочную литературу, выполняют задания, направленные на закрепление знаний и отработку умений и навыков, готовятся к текущему и промежуточному контролю по дисциплине.

Организация самостоятельной работы обучающихся регламентируется нормативными документами, учебно-методической литературой и электронными образовательными ресурсами, включая:

Порядок организации и осуществления образовательной деятельности по образовательным программам высшего образования - программам бакалавриата, программам специалитета, программам магистратуры (утвержден приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации от 6 апреля 2021 года №245)

Письмо Министерства образования Российской Федерации №14-55-99бин/15 от 27 ноября 2002 г. "Об активизации самостоятельной работы студентов высших учебных заведений"

Устав федерального государственного автономного образовательного учреждения "Казанский (Приволжский) федеральный университет"

Правила внутреннего распорядка федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования "Казанский (Приволжский) федеральный университет"

Локальные нормативные акты Казанского (Приволжского) федерального университета

## **6. Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю)**

Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю) включает оценочные материалы, направленные на проверку освоения компетенций, в том числе знаний, умений и навыков. Фонд оценочных средств включает оценочные средства текущего контроля и оценочные средства промежуточной аттестации.

В фонде оценочных средств содержится следующая информация:

- соответствие компетенций планируемым результатам обучения по дисциплине (модулю);
- критерии оценивания сформированности компетенций;
- механизм формирования оценки по дисциплине (модулю);
- описание порядка применения и процедуры оценивания для каждого оценочного средства;
- критерии оценивания для каждого оценочного средства;
- содержание оценочных средств, включая требования, предъявляемые к действиям обучающихся, демонстрируемым результатам, задания различных типов.

Фонд оценочных средств по дисциплине находится в Приложении 1 к программе дисциплины (модулю).

## **7. Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)**

Освоение дисциплины (модуля) предполагает изучение основной и дополнительной учебной литературы. Литература может быть доступна обучающимся в одном из двух вариантов (либо в обоих из них):

- в электронном виде - через электронные библиотечные системы на основании заключенных КФУ договоров с правообладателями;

- в печатном виде - в Научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского. Обучающиеся получают учебную литературу на абонементе по читательским билетам в соответствии с правилами пользования Научной библиотекой.

Электронные издания доступны дистанционно из любой точки при введении обучающимся своего логина и пароля от личного кабинета в системе "Электронный университет". При использовании печатных изданий библиотечный фонд должен быть укомплектован ими из расчета не менее 0,5 экземпляра (для обучающихся по ФГОС 3++ - не менее 0,25 экземпляра) каждого из изданий основной литературы и не менее 0,25 экземпляра дополнительной литературы на каждого обучающегося из числа лиц, одновременно осваивающих данную дисциплину.

Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля), находится в Приложении 2 к рабочей программе дисциплины. Он подлежит обновлению при изменении условий договоров КФУ с правообладателями электронных изданий и при изменении комплектования фондов Научной библиотеки КФУ.

## **8. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

MathGuide - <http://www.mathguide.de/> Wolfram MathWorld - <http://mathworld.wolfram.com/>

Единое окно доступа к образовательным ресурсам - <http://window.edu.ru/>

Общероссийский математический портал Math-Net.Ru - <http://www.mathnet.ru/>

## **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

Вид работ	Методические рекомендации
лекции	В ходе лекционных занятий следует вести конспектирование учебного материала. Обращать внимание на категории, формулировки, раскрывающие содержание тех или иных явлений и процессов, научные выводы и практические рекомендации, положительный опыт в ораторском искусстве. Желательно оставить в рабочих конспектах поля, на которых делать пометки из рекомендованной литературы, дополняющие материал прослушанной лекции, а также подчеркивающие особую важность теоретических положений. Задавать преподавателю уточняющие вопросы с целью уяснения теоретических положений, разрешения спорных ситуаций.
практические занятия	Рекомендуется после лекции самостоятельно разобраться в материале лекции и постараться его понять. При этом необходимо обращаться к учебному пособию, по которому излагается учебный материал. Дорабатывать свой конспект лекции, делая в нем соответствующие записи из литературы, рекомендованной преподавателем. В течение семестра на практических занятиях студенты решают задачи, указанные преподавателем, с отчётами о решённых задачах. Получают домашние задания для закрепления полученных на занятиях навыков. Проработанные лекции помогут в решении задач на практических занятиях и заданных на дом.
самостоятельная работа	Своевременное и качественное выполнение самостоятельной работы базируется на соблюдении настоящих рекомендаций и изучении рекомендованной литературы. Студент может дополнить список использованной литературы современными источниками, не представленными в списке рекомендованной литературы, и в дальнейшем использовать собственные подготовленные учебные материалы при написании выпускных работ. Кроме того, существуют и конкретные методические указания, которые зависят от уровня, способностей и предварительных знаний обучающихся. Их можно получить только на подробных консультациях, которые проводит преподаватель с группой или индивидуально.
экзамен	При подготовке к экзамену необходимо обратить внимание на ключевые понятия курса: 1) теорема Фрагмена-Линделёфа, 2) гипотеза Бибербаха и её доказательство для подклассов однолистных функций. 3) проблема коэффициентов в некоторых классах однолистных функций. Подготовить вопросы к консультации перед экзаменом.

**10. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем, представлен в Приложении 3 к рабочей программе дисциплины (модуля).

**11. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)**

Материально-техническое обеспечение образовательного процесса по дисциплине (модулю) включает в себя следующие компоненты:

Помещения для самостоятельной работы обучающихся, укомплектованные специализированной мебелью (столы и стулья) и оснащенные компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду КФУ.

Учебные аудитории для контактной работы с преподавателем, укомплектованные специализированной мебелью (столы и стулья).

Компьютер и принтер для распечатки раздаточных материалов.

Мультимедийная аудитория.

**12. Средства адаптации преподавания дисциплины к потребностям обучающихся инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья**

При необходимости в образовательном процессе применяются следующие методы и технологии, облегчающие восприятие информации обучающимися инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья:

- создание текстовой версии любого нетекстового контента для его возможного преобразования в альтернативные формы, удобные для различных пользователей;

- создание контента, который можно представить в различных видах без потери данных или структуры, предусмотреть возможность масштабирования текста и изображений без потери качества, предусмотреть доступность управления контентом с клавиатуры;
- создание возможностей для обучающихся воспринимать одну и ту же информацию из разных источников - например, так, чтобы лица с нарушениями слуха получали информацию визуально, с нарушениями зрения - аудиально;
- применение программных средств, обеспечивающих возможность освоения навыков и умений, формируемых дисциплиной, за счёт альтернативных способов, в том числе виртуальных лабораторий и симуляционных технологий;
- применение дистанционных образовательных технологий для передачи информации, организации различных форм интерактивной контактной работы обучающегося с преподавателем, в том числе вебинаров, которые могут быть использованы для проведения виртуальных лекций с возможностью взаимодействия всех участников дистанционного обучения, проведения семинаров, выступления с докладами и защиты выполненных работ, проведения тренингов, организации коллективной работы;
- применение дистанционных образовательных технологий для организации форм текущего и промежуточного контроля;
- увеличение продолжительности сдачи обучающимся инвалидом или лицом с ограниченными возможностями здоровья форм промежуточной аттестации по отношению к установленной продолжительности их сдачи:
- продолжительности сдачи зачёта или экзамена, проводимого в письменной форме, - не более чем на 90 минут;
- продолжительности подготовки обучающегося к ответу на зачёте или экзамене, проводимом в устной форме, - не более чем на 20 минут;
- продолжительности выступления обучающегося при защите курсовой работы - не более чем на 15 минут.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО и учебным планом по направлению 01.04.01 "Математика" и магистерской программе "Анализ на многообразиях".

### Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)

Направление подготовки: 01.04.01 - Математика

Профиль подготовки: Анализ на многообразиях

Квалификация выпускника: магистр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

Год начала обучения по образовательной программе: 2024

#### Основная литература:

1. Свешников, А. Г. Теория функций комплексной переменной: учебник / А. Г. Свешников, А. Н. Тихонов ; под редакцией В. А. Ильина. - 6-е изд. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2010. - 336 с. - ISBN 978-5-9221-0133-2. - Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/48167> (дата обращения: 03.03.2023). - Режим доступа: для авториз. пользователей.
2. Половинкин, Е. С. Теория функций комплексного переменного : учебник / Е. С. Половинкин. - 2-е изд., перераб. и доп. - Москва : ИНФРА-М, 2023. - 253 с. - (Высшее образование: Бакалавриат). - DOI 10.12737/1845987. - ISBN 978-5-16-017359-7. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/1913992> (дата обращения: 03.03.2023). - Режим доступа: по подписке.
3. Шабунин, М. И. Теория функций комплексного переменного : учебное пособие / М. И. Шабунин, Ю. В. Сидоров. - 5-е изд. - Москва : Лаборатория знаний, 2020. - 303 с. - ISBN 978-5-00101-916-9. - Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/151505> (дата обращения: 03.03.2023). - Режим доступа: для авториз. пользователей.
4. Коган, Е. А. Теория функций комплексной переменной и операционное исчисление: учебное пособие / Е.А. Коган, Г.С. Жукова. - Москва : ИНФРА-М, 2020. - 180 с. - (Высшее образование: Бакалавриат). - DOI 10.12737/1058889. - ISBN 978-5-16-015816-7. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/1058889> (дата обращения: 03.03.2023). - Режим доступа: по подписке.

#### Дополнительная литература:

1. Евграфов, М. А. Аналитические функции : учебное пособие / М. А. Евграфов. - 4-е изд. - Санкт-Петербург : Лань, 2022. - 448 с. - ISBN 978-5-8114-0809-2. - Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/210101> (дата обращения: 03.03.2023). - Режим доступа: для авториз. пользователей.
2. Сборник задач по теории функций комплексного переменного и операционному исчислению: учебное пособие для студентов мех.-мат., физ. фак., фак. ВМК ун-та и фак-та повышения квалификации преподавателей / Л. А. Аксентьев. - Казань : Казанский государственный университет, 2005. - 124 с. - Текст : электронный. - URL: [http://dspace.kpfu.ru/xmlui/bitstream/handle/net/116254/zadachnik\\_tfk.pdf;jsessionid=B2B8FAEEACBDD2AD3E6431852D5E0CF6?se](http://dspace.kpfu.ru/xmlui/bitstream/handle/net/116254/zadachnik_tfk.pdf;jsessionid=B2B8FAEEACBDD2AD3E6431852D5E0CF6?se) (дата обращения: 03.03.2023). - Режим доступа: открытый.
3. Зверович Э.И., Вещественный и комплексный анализ. В 6 ч. Ч. 2. Интегральное исчисление функций скалярного аргумента. Ч. 3. Дифференциальное исчисление : учебное пособие / Э.И. Зверович - Минск : Выш. шк., 2008. - 306 с. - ISBN 978-985-06-1305-9 - Текст : электронный // ЭБС 'Консультант студента' : [сайт]. - URL : <https://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9789850613059.html> (дата обращения: 03.03.2023). - Режим доступа : по подписке.
4. Львовский, С. М. Лекции по комплексному анализу : учебное пособие / С. М. Львовский. - 2-е изд., стер. - Москва : МЦНМО, 2009. - 136 с. - ISBN 978-5-94057-577-1. - Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/9365> (дата обращения: 03.03.2023). - Режим доступа: для авториз. пользователей.



*Приложение 3*  
*к рабочей программе дисциплины (модуля)*  
*Б1.В.ДВ.09.02 Дополнительные главы комплексного анализа*

**Перечень информационных технологий, используемых для освоения дисциплины (модуля), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем**

Направление подготовки: 01.04.01 - Математика

Профиль подготовки: Анализ на многообразиях

Квалификация выпускника: магистр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

Год начала обучения по образовательной программе: 2024

Освоение дисциплины (модуля) предполагает использование следующего программного обеспечения и информационно-справочных систем:

Операционная система Microsoft Windows 7 Профессиональная или Windows XP (Volume License)

Пакет офисного программного обеспечения Microsoft Office 365 или Microsoft Office Professional plus 2010

Браузер Mozilla Firefox

Браузер Google Chrome

Adobe Reader XI или Adobe Acrobat Reader DC

Kaspersky Endpoint Security для Windows

Учебно-методическая литература для данной дисциплины имеется в наличии в электронно-библиотечной системе "ZNANIUM.COM", доступ к которой предоставлен обучающимся. ЭБС "ZNANIUM.COM" содержит произведения крупнейших российских учёных, руководителей государственных органов, преподавателей ведущих вузов страны, высококвалифицированных специалистов в различных сферах бизнеса. Фонд библиотеки сформирован с учетом всех изменений образовательных стандартов и включает учебники, учебные пособия, учебно-методические комплексы, монографии, авторефераты, диссертации, энциклопедии, словари и справочники, законодательно-нормативные документы, специальные периодические издания и издания, выпускаемые издательствами вузов. В настоящее время ЭБС ZNANIUM.COM соответствует всем требованиям федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования (ФГОС ВО) нового поколения.

Учебно-методическая литература для данной дисциплины имеется в наличии в электронно-библиотечной системе Издательства "Лань", доступ к которой предоставлен обучающимся. ЭБС Издательства "Лань" включает в себя электронные версии книг издательства "Лань" и других ведущих издательств учебной литературы, а также электронные версии периодических изданий по естественным, техническим и гуманитарным наукам. ЭБС Издательства "Лань" обеспечивает доступ к научной, учебной литературе и научным периодическим изданиям по максимальному количеству профильных направлений с соблюдением всех авторских и смежных прав.