

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования  
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"  
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского



**УТВЕРЖДАЮ**

Проректор по образовательной деятельности КФУ

\_\_\_\_\_ Турилова Е.А.

"\_\_" \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

## **Программа дисциплины**

Накрывающие пространства и группы

Направление подготовки: 01.04.01 - Математика

Профиль подготовки: Анализ на многообразиях

Квалификация выпускника: магистр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

Год начала обучения по образовательной программе: 2024

## Содержание

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения ОПОП ВО
2. Место дисциплины (модуля) в структуре ОПОП ВО
3. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся
4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий
  - 4.1. Структура и тематический план контактной и самостоятельной работы по дисциплине (модулю)
  - 4.2. Содержание дисциплины (модуля)
5. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)
6. Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю)
7. Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)
8. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)
9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)
10. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)
11. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)
12. Средства адаптации преподавания дисциплины (модуля) к потребностям обучающихся инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья
13. Приложение №1. Фонд оценочных средств
14. Приложение №2. Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)
15. Приложение №3. Перечень информационных технологий, используемых для освоения дисциплины (модуля), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем

Программу дисциплины разработал(а)(и): профессор, д.н. (доцент) Гумеров Р.Н. (Кафедра математического анализа, отделение математики), Renat.Gumerov@krfu.ru

**1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения ОПОП ВО**

Обучающийся, освоивший дисциплину (модуль), должен обладать следующими компетенциями:

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
ПК-3	Способен организовывать научноисследовательскую и научно-производственную работу, управлять научным коллективом, публично представлять собственные и известные научные результаты

Обучающийся, освоивший дисциплину (модуль):

Должен знать:

Знать основные понятия и результаты по теории накрывающих пространств и групп, такие как накрывающее отображение, путь, поднятие пути, умножение путей, фундаментальная группа, критерий поднятия пути в терминах фундаментальной группы, простейшие факты и понятия теории топологических групп, теорема Понтрягина о поднятии групповой структуры, основные понятия и факты теории обратных спектров, обобщение теоремы Понтрягина для не локально связных топологических групп.

Должен уметь:

Уметь вычислять основные фундаментальные группы топологических пространств.

Должен владеть:

Владеть методами теории накрывающих отображений.

Должен демонстрировать способность и готовность:

Использовать основные понятия и результаты по теории накрывающих пространств и групп, такие как накрывающее отображение, путь, поднятие пути, умножение путей, фундаментальная группа, критерий поднятия пути в терминах фундаментальной группы, простейшие факты и понятия теории топологических групп, теорема Понтрягина о поднятии групповой структуры, основные понятия и факты теории обратных спектров, обобщение теоремы Понтрягина для не локально связных топологических групп.

Вычислять основные фундаментальные группы топологических пространств.

Владеть методами теории накрывающих отображений.

**2. Место дисциплины (модуля) в структуре ОПОП ВО**

Данная дисциплина (модуль) включена в раздел "Б1.В.ДВ.08.03 Дисциплины (модули)" основной профессиональной образовательной программы 01.04.01 "Математика (Анализ на многообразиях)" и относится к дисциплинам по выбору части ОПОП ВО, формируемой участниками образовательных отношений.

Осваивается на 2 курсе в 3 семестре.

**3. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся**

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зачетных(ые) единиц(ы) на 144 часа(ов).

Контактная работа - 36 часа(ов), в том числе лекции - 0 часа(ов), практические занятия - 36 часа(ов), лабораторные работы - 0 часа(ов), контроль самостоятельной работы - 0 часа(ов).

Самостоятельная работа - 72 часа(ов).

Контроль (зачёт / экзамен) - 36 часа(ов).

Форма промежуточного контроля дисциплины: экзамен в 3 семестре.

**4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий**

**4.1 Структура и тематический план контактной и самостоятельной работы по дисциплине (модулю)**

N	Разделы дисциплины / модуля	Се- местр	Виды и часы контактной работы, их трудоемкость (в часах)						Само- стоя- тель- ная ра- бота
			Лекции, всего	Лекции в эл. форме	Практи- ческие занятия, всего	Практи- ческие в эл. форме	Лабора- торные работы, всего	Лабора- торные в эл. форме	
1.	Тема 1. Накрывающие отображения. Пути. Поднятие путей.	3	0	0	6	0	0	0	6
2.	Тема 2. Фундаментальные группы. Поднятие отображений	3	0	0	6	0	0	0	6
3.	Тема 3. Топологические группы и Теорема Понтрягина	3	0	0	6	0	0	0	15
4.	Тема 4. Обратные спектры топологических пространств и групп. Обратные пределы.	3	0	0	6	0	0	0	15
5.	Тема 5. Аппроксимация накрытия компактной группы	3	0	0	6	0	0	0	15
6.	Тема 6. Обобщение теоремы Понтрягина и следствия	3	0	0	6	0	0	0	15
	Итого		0	0	36	0	0	0	72

**4.2 Содержание дисциплины (модуля)**

**Тема 1. Накрывающие отображения. Пути. Поднятие путей.**

Определение накрывающего отображения. Конечнолистное накрывающее отображение.

Бесконечнолистное накрывающее отображение.

Примеры. Гомоморфизмы. Накрывающие отображения окружности. Тривиальные накрывающие отображения.

Основные топологические свойства накрывающих отображений и путей.

Поднятие путей относительно отображений.

**Тема 2. Фундаментальные группы. Поднятие отображений**

Определение фундаментальной группы. Примеры вычисления фундаментальной группы.

Основные свойства фундаментальной группы. Поднятие отображений в терминах фундаментальной группы. Примеры.

Топологическая группа. Топологические и алгебраические свойства топологических групп. Коммутативность фундаментальной группы произвольной топологической группы.

**Тема 3. Топологические группы и Теорема Понтрягина**

Определение топологической группы. Свойства. База окрестностей единицы группы. Примеры топологических групп, матричные группы. Основные свойства топологических групп. Теорема Понтрягина

о поднятии групповой структуры на накрывающее пространство локально линейно связной группы. Доказательство теоремы Понтрягина.

**Тема 4. Обратные спектры топологических пространств и групп. Обратные пределы.**

Понятие обратного спектра и обратного предела. Построение обратных пределов в категории топологических пространств и групп. Свойства спектров и их обратных пределов. Топология обратных пределов. Морфизмы обратных спектров, предельные морфизмы.

R-адические солениды. Накрывающие отображения соленидов.

**Тема 5. Аппроксимация накрытия компактной группы**

Аппроксимация конечнолистного накрывающего отображения компактной группы конечнолистными накрывающими отображениями связных локально линейно связных групп. Частично упорядоченные множества.

Конфинальное множество. Обратные спектры и обратные пределы. Разбиение единицы, подчиненное покрытие. Диагональ отображений.

**Тема 6. Обобщение теоремы Понтрягина и следствия**

Напоминание фактов о поднятии путей и отображений в терминах фундаментальной группы.

Доказательство теоремы о накрывающей группе для накрытий не локально связных групп.

Приложение этой теоремы к уравнениям с функциональными коэффициентами. Многочлены Вейерштрасса. Их свойства. Средние на компактных группах.

### **5. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)**

Самостоятельная работа обучающихся выполняется по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия. Самостоятельная работа подразделяется на самостоятельную работу на аудиторных занятиях и на внеаудиторную самостоятельную работу. Самостоятельная работа обучающихся включает как полностью самостоятельное освоение отдельных тем (разделов) дисциплины, так и проработку тем (разделов), осваиваемых во время аудиторной работы. Во время самостоятельной работы обучающиеся читают и конспектируют учебную, научную и справочную литературу, выполняют задания, направленные на закрепление знаний и отработку умений и навыков, готовятся к текущему и промежуточному контролю по дисциплине.

Организация самостоятельной работы обучающихся регламентируется нормативными документами, учебно-методической литературой и электронными образовательными ресурсами, включая:

Порядок организации и осуществления образовательной деятельности по образовательным программам высшего образования - программам бакалавриата, программам специалитета, программам магистратуры (утвержден приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации от 6 апреля 2021 года №245)

Письмо Министерства образования Российской Федерации №14-55-99бин/15 от 27 ноября 2002 г. "Об активизации самостоятельной работы студентов высших учебных заведений"

Устав федерального государственного автономного образовательного учреждения "Казанский (Приволжский) федеральный университет"

Правила внутреннего распорядка федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования "Казанский (Приволжский) федеральный университет"

Локальные нормативные акты Казанского (Приволжского) федерального университета

Topology Atlas - <http://at.yorku.ca/>

мцнмо - <http://www.mccme.ru/free-books/>

учебные материалы мех-мата МГУ - <http://www.mexmat.net/materials/3/>

### **6. Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю)**

Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю) включает оценочные материалы, направленные на проверку освоения компетенций, в том числе знаний, умений и навыков. Фонд оценочных средств включает оценочные средства текущего контроля и оценочные средства промежуточной аттестации.

В фонде оценочных средств содержится следующая информация:

- соответствие компетенций планируемым результатам обучения по дисциплине (модулю);
- критерии оценивания сформированности компетенций;
- механизм формирования оценки по дисциплине (модулю);
- описание порядка применения и процедуры оценивания для каждого оценочного средства;
- критерии оценивания для каждого оценочного средства;
- содержание оценочных средств, включая требования, предъявляемые к действиям обучающихся, демонстрируемым результатам, задания различных типов.

Фонд оценочных средств по дисциплине находится в Приложении 1 к программе дисциплины (модулю).

### **7. Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)**

Освоение дисциплины (модуля) предполагает изучение основной и дополнительной учебной литературы. Литература может быть доступна обучающимся в одном из двух вариантов (либо в обоих из них):

- в электронном виде - через электронные библиотечные системы на основании заключенных КФУ договоров с правообладателями;
- в печатном виде - в Научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского. Обучающиеся получают учебную литературу на абонементе по читательским билетам в соответствии с правилами пользования Научной библиотекой.

Электронные издания доступны дистанционно из любой точки при введении обучающимся своего логина и пароля от личного кабинета в системе "Электронный университет". При использовании печатных изданий библиотечный фонд должен быть укомплектован ими из расчета не менее 0,5 экземпляра (для обучающихся по ФГОС 3++ - не менее 0,25 экземпляра) каждого из изданий основной литературы и не менее 0,25 экземпляра дополнительной литературы на каждого обучающегося из числа лиц, одновременно осваивающих данную дисциплину.

Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля), находится в Приложении 2 к рабочей программе дисциплины. Он подлежит обновлению при изменении условий договоров КФУ с правообладателями электронных изданий и при изменении комплектования фондов Научной библиотеки КФУ.

### 8. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

Topology Atlas - <http://at.yorku.ca/>

мцнмо - <http://www.mccme.ru/free-books/>

учебные материалы мех-мата МГУ - <http://www.mexmat.net/materials/3/>

### 9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Вид работ	Методические рекомендации
практические занятия	Повторить соответствующие разделы теории групп и общей топологии. В ходе занятий вести конспектирование решений задач. Желательно участвовать в обсуждении всех решаемых задач. Обращать внимание на научные выводы и практические рекомендации, связанные с рассматриваемыми задачами. Отмечать результаты, показывающие тесную связь алгебраических и топологических понятий.
самостоятельная работа	Перед каждым занятием необходимо решать задачи и прорабатывать теоретический материал предыдущего занятия. При этом учесть рекомендации преподавателя и требования учебной программы. Дорабатывать свой конспект, делая в нем соответствующие записи из литературы, рекомендованной преподавателем и предусмотренной учебной программой. При подготовке к занятиям использовать литературу предложенную преподавателем и обращаться за методической помощью к нему.
экзамен	К экзамену повторить все определения и формулировки и доказательства всех теорем из курса. Желательно попытаться доказать теоремы без использования конспектов. Прорешать все задачи и примеры, разобранные на занятиях и в домашних заданиях. Рекомендуется прорешать дополнительные задачи аналогичного типа из рекомендованных задачников и учебников. Рекомендуется также посмотреть доказательства теорем в дополнительной литературе.

### 10. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем, представлен в Приложении 3 к рабочей программе дисциплины (модуля).

### 11. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Материально-техническое обеспечение образовательного процесса по дисциплине (модулю) включает в себя следующие компоненты:

Помещения для самостоятельной работы обучающихся, укомплектованные специализированной мебелью (столы и стулья) и оснащенные компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду КФУ.

Учебные аудитории для контактной работы с преподавателем, укомплектованные специализированной мебелью (столы и стулья).

Компьютер и принтер для распечатки раздаточных материалов.

## **12. Средства адаптации преподавания дисциплины к потребностям обучающихся инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья**

При необходимости в образовательном процессе применяются следующие методы и технологии, облегчающие восприятие информации обучающимися инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья:

- создание текстовой версии любого нетекстового контента для его возможного преобразования в альтернативные формы, удобные для различных пользователей;
- создание контента, который можно представить в различных видах без потери данных или структуры, предусмотреть возможность масштабирования текста и изображений без потери качества, предусмотреть доступность управления контентом с клавиатуры;
- создание возможностей для обучающихся воспринимать одну и ту же информацию из разных источников - например, так, чтобы лица с нарушениями слуха получали информацию визуально, с нарушениями зрения - аудиально;
- применение программных средств, обеспечивающих возможность освоения навыков и умений, формируемых дисциплиной, за счёт альтернативных способов, в том числе виртуальных лабораторий и симуляционных технологий;
- применение дистанционных образовательных технологий для передачи информации, организации различных форм интерактивной контактной работы обучающегося с преподавателем, в том числе вебинаров, которые могут быть использованы для проведения виртуальных лекций с возможностью взаимодействия всех участников дистанционного обучения, проведения семинаров, выступления с докладами и защиты выполненных работ, проведения тренингов, организации коллективной работы;
- применение дистанционных образовательных технологий для организации форм текущего и промежуточного контроля;
- увеличение продолжительности сдачи обучающимся инвалидом или лицом с ограниченными возможностями здоровья форм промежуточной аттестации по отношению к установленной продолжительности их сдачи:
- продолжительности сдачи зачёта или экзамена, проводимого в письменной форме, - не более чем на 90 минут;
- продолжительности подготовки обучающегося к ответу на зачёте или экзамене, проводимом в устной форме, - не более чем на 20 минут;
- продолжительности выступления обучающегося при защите курсовой работы - не более чем на 15 минут.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО и учебным планом по направлению 01.04.01 "Математика" и магистерской программе "Анализ на многообразиях".

### Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)

Направление подготовки: 01.04.01 - Математика

Профиль подготовки: Анализ на многообразиях

Квалификация выпускника: магистр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

Год начала обучения по образовательной программе: 2024

#### Основная литература:

1. Паньженский, В. И. Введение в дифференциальную геометрию : учебное пособие / В. И. Паньженский. - 2-е изд., испр. - Санкт-Петербург : Лань, 2022. - 240 с. - ISBN 978-5-8114-1979-1. - Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/212126> (дата обращения: 23.01.2024). - Режим доступа: для авториз. пользователей.
2. Скопенков, А. Б. Алгебраическая топология с геометрической точки зрения : учебное пособие / А. Б. Скопенков. - 2-е изд., доп. - Москва : МЦНМО, 2020. - 301 с. - ISBN 978-5-4439-3561-4. - Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/267725> (дата обращения: 23.01.2024). - Режим доступа: для авториз. пользователей.
3. Подран, В. Е. Элементы топологии : учебное пособие / В. Е. Подран. - 3-е изд., стер. - Санкт-Петербург : Лань, 2020. - 188 с. - ISBN 978-5-8114-5835-6. - Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/147138> (дата обращения: 23.01.2024). - Режим доступа: для авториз. пользователей.

#### Дополнительная литература:

1. Вик, Д. У. Теория гомологий. Введение в алгебраическую топологию / Д. У. Вик. - Москва : МЦНМО, 2005. - 288 с. - ISBN 5-94057-086-0. - Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/9310> (дата обращения: 23.01.2024). - Режим доступа: для авториз. пользователей.
2. Примаков, Д. А. Геометрия и топология : учебное пособие / Д. А. Примаков, Р. Я. Хамидуллин. - 2-е изд., перераб. и доп. - Москва : МФПА, 2011. - 272 с. (Университетская серия). - ISBN 978-5-902597-13-1. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/451172> (дата обращения: 23.01.2024). - Режим доступа: по подписке.
3. Гумеров Р. Н. Конечнolistные накрытия соленоидов: учебно-методическое пособие / Р. Н. Гумеров. - Казань : Казанский федеральный университет, 2014. - 17 с. - Текст : электронный. - URL: [https://kpfu.ru/portal/docs/F1922923958/Gumerov.\\_Konechnolistnye.nakrytiya.solenojdiv.pdf](https://kpfu.ru/portal/docs/F1922923958/Gumerov._Konechnolistnye.nakrytiya.solenojdiv.pdf) (дата обращения: 23.01.2024). - Режим доступа: открытый.
4. Исковских, В. А. Многомерная геометрия / В. А. Исковских ; составители В. С. Куликов [и др.]. - Москва : МЦНМО, 2016. - 616 с. - ISBN 978-5-4439-2499-1. - Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/80144> (дата обращения: 23.01.2024). - Режим доступа: для авториз. пользователей.



**Перечень информационных технологий, используемых для освоения дисциплины (модуля), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем**

Направление подготовки: 01.04.01 - Математика

Профиль подготовки: Анализ на многообразиях

Квалификация выпускника: магистр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

Год начала обучения по образовательной программе: 2024

Освоение дисциплины (модуля) предполагает использование следующего программного обеспечения и информационно-справочных систем:

Операционная система Microsoft Windows 7 Профессиональная или Windows XP (Volume License)

Пакет офисного программного обеспечения Microsoft Office 365 или Microsoft Office Professional plus 2010

Браузер Mozilla Firefox

Браузер Google Chrome

Adobe Reader XI или Adobe Acrobat Reader DC

Kaspersky Endpoint Security для Windows

Учебно-методическая литература для данной дисциплины имеется в наличии в электронно-библиотечной системе "ZNANIUM.COM", доступ к которой предоставлен обучающимся. ЭБС "ZNANIUM.COM" содержит произведения крупнейших российских учёных, руководителей государственных органов, преподавателей ведущих вузов страны, высококвалифицированных специалистов в различных сферах бизнеса. Фонд библиотеки сформирован с учетом всех изменений образовательных стандартов и включает учебники, учебные пособия, учебно-методические комплексы, монографии, авторефераты, диссертации, энциклопедии, словари и справочники, законодательно-нормативные документы, специальные периодические издания и издания, выпускаемые издательствами вузов. В настоящее время ЭБС ZNANIUM.COM соответствует всем требованиям федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования (ФГОС ВО) нового поколения.

Учебно-методическая литература для данной дисциплины имеется в наличии в электронно-библиотечной системе Издательства "Лань", доступ к которой предоставлен обучающимся. ЭБС Издательства "Лань" включает в себя электронные версии книг издательства "Лань" и других ведущих издательств учебной литературы, а также электронные версии периодических изданий по естественным, техническим и гуманитарным наукам. ЭБС Издательства "Лань" обеспечивает доступ к научной, учебной литературе и научным периодическим изданиям по максимальному количеству профильных направлений с соблюдением всех авторских и смежных прав.

Учебно-методическая литература для данной дисциплины имеется в наличии в электронно-библиотечной системе "Консультант студента", доступ к которой предоставлен обучающимся. Многопрофильный образовательный ресурс "Консультант студента" является электронной библиотечной системой (ЭБС), предоставляющей доступ через сеть Интернет к учебной литературе и дополнительным материалам, приобретенным на основании прямых договоров с правообладателями. Полностью соответствует требованиям федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования к комплектованию библиотек, в том числе электронных, в части формирования фондов основной и дополнительной литературы.