

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования  
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"  
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского



УТВЕРЖДАЮ

Проректор по образовательной деятельности КФУ

Е.А. Григорьева  
26 февраля 2024 г.



подписано электронно-цифровой подписью

## Программа дисциплины

Топологические векторные пространства

Направление подготовки: 02.03.01 - Математика и компьютерные науки

Профиль подготовки: Наука о данных

Квалификация выпускника: бакалавр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

Год начала обучения по образовательной программе: 2024

## **Содержание**

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения ОПОП ВО
2. Место дисциплины (модуля) в структуре ОПОП ВО
3. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся
4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий
  - 4.1. Структура и тематический план контактной и самостоятельной работы по дисциплине (модулю)
  - 4.2. Содержание дисциплины (модуля)
5. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)
6. Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю)
7. Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)
8. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)
9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)
10. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)
11. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)
12. Средства адаптации преподавания дисциплины (модуля) к потребностям обучающихся инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья
13. Приложение №1. Фонд оценочных средств
14. Приложение №2. Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)
15. Приложение №3. Перечень информационных технологий, используемых для освоения дисциплины (модуля), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем

Программу дисциплины разработал(а)(и): доцент, к.н. Скворцова Г.Ш. (Кафедра математического анализа, отделение математики), galih@yandex.ru

## **1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения ОПОП ВО**

Обучающийся, освоивший дисциплину (модуль), должен обладать следующими компетенциями:

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
ПК-2	Способен демонстрировать базовые знания математических и естественных наук, основ программирования и информационных технологий
ПК-4	Способен создавать и исследовать новые математические модели в естественных науках, промышленности и бизнесе, с учетом возможностей современных информационных технологий и программирования и компьютерной техники
ПК-5	Способен использовать современные методы разработки и реализации конкретных алгоритмов математических моделей на базе языков программирования и пакетов прикладных программ моделирования

Обучающийся, освоивший дисциплину (модуль):

Должен знать:

основные понятия теории векторных пространств: векторный базис; линейные отображения; топология, задаваемая семейством полунорм.

Должен уметь:

совершать операции с векторными пространствами, исследовать свойства различных топологий в векторных пространствах, исследовать свойства непрерывных линейных функционалов.

Должен владеть:

методами и приемами теории топологических векторных пространств.

Должен демонстрировать способность и готовность:

Студент должен демонстрировать способность и готовность к проведению научно-исследовательской работы в области функционального анализа, а также проектной работы с использованием функционального анализа.

## **2. Место дисциплины (модуля) в структуре ОПОП ВО**

Данная дисциплина (модуль) включена в раздел "Б1.В.ДВ.02.01 Дисциплины (модули)" основной профессиональной образовательной программы 02.03.01 "Математика и компьютерные науки (Наука о данных)" и относится к дисциплинам по выбору части ОПОП ВО, формируемой участниками образовательных отношений.

Осваивается на 3 курсе в 5 семестре.

## **3. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся**

Общая трудоемкость дисциплины составляет 2 зачетных(ые) единиц(ы) на 72 часа(ов).

Контактная работа - 36 часа(ов), в том числе лекции - 18 часа(ов), практические занятия - 18 часа(ов), лабораторные работы - 0 часа(ов), контроль самостоятельной работы - 0 часа(ов).

Самостоятельная работа - 36 часа(ов).

Контроль (зачёт / экзамен) - 0 часа(ов).

Форма промежуточного контроля дисциплины: зачет в 5 семестре.

## **4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий**

### **4.1 Структура и тематический план контактной и самостоятельной работы по дисциплине (модулю)**

N	Разделы дисциплины / модуля	Се-мestr	Виды и часы контактной работы, их трудоемкость (в часах)							Само-стое-тель-ная ра-бота
			Лекции, всего	Лекции в эл. форме	Практи-ческие занятия, всего	Практи-ческие в эл. форме	Лабора-торные работы, всего	Лабора-торные в эл. форме		
1.	Тема 1. Векторные пространства и базис Гамеля Прямые суммы и тензорные произведения векторных пространств, фактор-пространства	5	4	0	2	0	0	0	6	
2.	Тема 2. Линейные отображения и алгебраически двойственное пространство Топология в терминах открытых множеств и окрестностей	5	2	0	4	0	0	0	4	
3.	Тема 3. Топологические векторные пространства. Аксиомы счетности и сепарабельность.	5	2	0	2	0	0	0	6	
4.	Тема 4. Непрерывные отображения в топологических векторных пространствах. Сходимости в терминах сетей и ультрафильтров. Изоморфизмы топологических векторных пространств.	5	4	0	4	0	0	0	6	
5.	Тема 5. Локально выпуклые пространства. Метризуемость и пространства Фреше.	5	2	0	2	0	0	0	6	
6.	Тема 6. Тихоновская топология, двойственность, слабая и *-слабая топологии. Теорема о биполяре. Теорема Банаха-Алаоглу.	5	2	0	2	0	0	0	4	
7.	Тема 7. Ограниченные линейные функционалы. Теорема Хана-Банаха. Банаховы пределы. Рефлексивность. Стереотипные пространства. Топология Макки.	5	2	0	2	0	0	0	4	
	Итого		18	0	18	0	0	0	36	

#### 4.2 Содержание дисциплины (модуля)

##### Тема 1. Векторные пространства и базис Гамеля Прямые суммы и тензорные произведения векторных пространств, фактор-пространства

Определение векторного пространства, линейной оболочки множества, линейно-независимой системы векторов и базиса Гамеля. Формулировка леммы Цорна. Доказательство существования базиса Гамеля. Теорема о равномощности базисов. Примеры бесконечномерных и несчетномерных пространств. Определение прямой суммы векторных пространств и фактор-пространства. Определение свободной группы и тензорного произведения.

##### Тема 2. Линейные отображения и алгебраически двойственное пространство Топология в терминах открытых множеств и окрестностей

Определение линейного отображения. Определение изоморфизма векторных пространств. Алгебраически сопряженное пространство. Каноническое отображение во второе сопряженное пространство. Свойства ядер и образов линейных отображений. Аксиомы топологии в терминах открытых множеств и в терминах окрестностей. Теорема об их эквивалентности. Эквивалентность определений непрерывности в терминах открытых множеств и в терминах окрестностей.

##### Тема 3. Топологические векторные пространства. Аксиомы счетности и сепарабельность.

Согласованность топологии с векторными операциями. Критерий согласованности топологии со структурой векторного пространства в терминах окрестностей. Первая и вторая аксиомы счетности. Сепарабельность. Доказательство того, что из второй аксиомы счетности следует первая и следует сепарабельность. Подбор примеров.

##### Тема 4. Непрерывные отображения в топологических векторных пространствах. Сходимости в терминах сетей и ультрафильтров. Изоморфизмы топологических векторных пространств.

Секвенциальная и обычная непрерывности. Сходимость в терминах сетей (направленностей) и ультрафильтров. Непрерывность в терминах сетей (направленностей) и ультрафильтров. Их эквивалентность обычной непрерывности. Изоморфизмы топологических векторных пространств. Доказательство изоморфности и неизоморфности некоторых топологических векторных пространств.

#### **Тема 5. Локально выпуклые пространства. Метризуемость и пространства Фреше.**

Определение выпуклости, определение полунормы, определение поглощающего множества, определение уравновешенного множества. Теорема о функционале Минковского. Непрерывность умножения на скаляр и сложения векторов в локально-выпуклом пространстве. Фактор-пространства локально выпуклого пространства. Теорема о метризуемости локально выпуклого пространства. Проверка метризуемости некоторых локально выпуклых пространств. Проверка эквивалентности задания топологий различными системами полунорм.

#### **Тема 6. Тихоновская топология, двойственность, слабая и \*-слабая топологии. Теорема о биполяре.**

##### **Теорема Банаха-Алаоглу.**

Определение тихоновского произведения топологических пространств. Сохранение свойства компактности для тихоновских произведений соответствующих топологических пространств. Скобка двойственности. Определения слабой и \*-слабой топологий. Теорема о биполяре. Теорема Банаха-Алаоглу. Сохранения свойств  $T_0$ ,  $T_1$ ,  $T_2$  для тихоновских произведений соответствующих топологических пространств. Сохранение связности и линейной связности.

#### **Тема 7. Ограничные линейные функционалы. Теорема Хана-Банаха. Банаховы пределы.**

##### **Рефлексивность. Стереотипные пространства. Топология Макки.**

Взаимосвязь непрерывности и ограниченности в локально-выпуклом пространстве. Геометрическая форма теоремы Хана-Банаха. Аналитическая форма теоремы Хана-Банаха. Банаховы пределы, взаимоотношения с верхними и нижними пределами. Определение рефлексивных топологических векторных пространств. Примеры. Стереотипная двойственность. Топология Макки. Доказательство рефлексивности некоторых пространств.

### **5. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)**

Самостоятельная работа обучающихся выполняется по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия. Самостоятельная работа подразделяется на самостоятельную работу на аудиторных занятиях и на внеаудиторную самостоятельную работу. Самостоятельная работа обучающихся включает как полностью самостоятельное освоение отдельных тем (разделов) дисциплины, так и проработку тем (разделов), осваиваемых во время аудиторной работы. Во время самостоятельной работы обучающиеся читают и конспектируют учебную, научную и справочную литературу, выполняют задания, направленные на закрепление знаний и отработку умений и навыков, готовятся к текущему и промежуточному контролю по дисциплине.

Организация самостоятельной работы обучающихся регламентируется нормативными документами, учебно-методической литературой и электронными образовательными ресурсами, включая:

Порядок организации и осуществления образовательной деятельности по образовательным программам высшего образования - программам бакалавриата, программам специалитета, программам магистратуры (утвержден приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации от 6 апреля 2021 года №245)

Письмо Министерства образования Российской Федерации №14-55-996ин/15 от 27 ноября 2002 г. "Об активизации самостоятельной работы студентов высших учебных заведений"

Устав федерального государственного автономного образовательного учреждения "Казанский (Приволжский) федеральный университет"

Правила внутреннего распорядка федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования "Казанский (Приволжский) федеральный университет"

Локальные нормативные акты Казанского (Приволжского) федерального университета

### **6. Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю)**

Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю) включает оценочные материалы, направленные на проверку освоения компетенций, в том числе знаний, умений и навыков. Фонд оценочных средств включает оценочные средства текущего контроля и оценочные средства промежуточной аттестации.

В фонде оценочных средств содержится следующая информация:

- соответствие компетенций планируемым результатам обучения по дисциплине (модулю);
- критерии оценивания сформированности компетенций;
- механизм формирования оценки по дисциплине (модулю);
- описание порядка применения и процедуры оценивания для каждого оценочного средства;
- критерии оценивания для каждого оценочного средства;
- содержание оценочных средств, включая требования, предъявляемые к действиям обучающихся, демонстрируемым результатам, задания различных типов.

Фонд оценочных средств по дисциплине находится в Приложении 1 к программе дисциплины (модулю).

## 7. Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)

Освоение дисциплины (модуля) предполагает изучение основной и дополнительной учебной литературы. Литература может быть доступна обучающимся в одном из двух вариантов (либо в обоих из них):

- в электронном виде - через электронные библиотечные системы на основании заключенных КФУ договоров с правообладателями;
  - в печатном виде - в Научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского. Обучающиеся получают учебную литературу на абонементе по читательским билетам в соответствии с правилами пользования Научной библиотекой.

Электронные издания доступны дистанционно из любой точки при введении обучающимся своего логина и пароля от личного кабинета в системе "Электронный университет". При использовании печатных изданий библиотечный фонд должен быть укомплектован ими из расчета не менее 0,5 экземпляра (для обучающихся по ФГОС 3++ - не менее 0,25 экземпляра) каждого из изданий основной литературы и не менее 0,25 экземпляра дополнительной литературы на каждого обучающегося из числа лиц, одновременно осваивающих данную дисциплину.

Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля), находится в Приложении 2 к рабочей программе дисциплины. Он подлежит обновлению при изменении условий договоров КФУ с правообладателями электронных изданий и при изменении комплектования фондов Научной библиотеки КФУ.

## **8. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

Вики-конспекты ИТМО -

Независимый Московский университет - <https://www.mccme.ru/jum/>

Факультет математики НИУ ВШЭ - <http://vyshka.math.ru/>

## 9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Вид работ	Методические рекомендации
лекции	Рекомендуется помимо непосредственно материала разбираемого на лекциях также смотреть различные источники такие как: классические учебники, монографии, статьи. Также по некоторым темам есть исчерпывающее описание на различных интернет-ресурсах. Решение задач, помеченные звездочкой может быть неизвестно на данный момент.
практические занятия	Рекомендуется использовать системы компьютерной алгебры и системы символьных вычислений, а также систему компьютерной верстки LaTeX. Составителем программы подразумевается использование бесплатной системы "Sage". Также в некоторых фситуациях можно использовать интернет-сервис Wolfram Alpha или, в случае, если учащимся доступна лицензия, Wolfram Mathematica.
самостоятельная работа	Рекомендуется помимо непосредственно материала разбираемого на лекциях также смотреть различные источники такие как: классические учебники, монографии, статьи. Также по некоторым темам есть исчерпывающее описание на различных интернет-ресурсах. Решение задач, помеченные звездочкой может быть неизвестно на данный момент.
зачет	К зачету следует готовиться как по лекционной, теоретической части, так и по материалам практик и самостоятельной работы. И теория и практика в этом предмете считаются одинаково важными. При ответе на вопрос подразумевается представление не только теоретической схемы работы программы, но также и работающего листинга.

**10. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем, представлен в Приложении 3 к рабочей программе дисциплины (модуля).

## **11. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)**

Материально-техническое обеспечение образовательного процесса по дисциплине (модулю) включает в себя следующие компоненты:

Помещения для самостоятельной работы обучающихся, укомплектованные специализированной мебелью (столы и стулья) и оснащенные компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду КФУ.

Учебные аудитории для контактной работы с преподавателем, укомплектованные специализированной мебелью (столы и стулья).

Компьютер и принтер для распечатки раздаточных материалов.

Мультимедийная аудитория.

## **12. Средства адаптации преподавания дисциплины к потребностям обучающихся инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья**

При необходимости в образовательном процессе применяются следующие методы и технологии, облегчающие восприятие информации обучающимися инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья:

- создание текстовой версии любого нетекстового контента для его возможного преобразования в альтернативные формы, удобные для различных пользователей;
- создание контента, который можно представить в различных видах без потери данных или структуры, предусмотреть возможность масштабирования текста и изображений без потери качества, предусмотреть доступность управления контентом с клавиатуры;
- создание возможностей для обучающихся воспринимать одну и ту же информацию из разных источников - например, так, чтобы лица с нарушениями слуха получали информацию визуально, с нарушениями зрения - аудиально;
- применение программных средств, обеспечивающих возможность освоения навыков и умений, формируемых дисциплиной, за счёт альтернативных способов, в том числе виртуальных лабораторий и симуляционных технологий;
- применение дистанционных образовательных технологий для передачи информации, организации различных форм интерактивной контактной работы обучающегося с преподавателем, в том числе вебинаров, которые могут быть использованы для проведения виртуальных лекций с возможностью взаимодействия всех участников дистанционного обучения, проведения семинаров, выступления с докладами и защиты выполненных работ, проведения тренингов, организации коллективной работы;
- применение дистанционных образовательных технологий для организации форм текущего и промежуточного контроля;
- увеличение продолжительности сдачи обучающимся инвалидом или лицом с ограниченными возможностями здоровья форм промежуточной аттестации по отношению к установленной продолжительности их сдачи:
- продолжительности сдачи зачёта или экзамена, проводимого в письменной форме, - не более чем на 90 минут;
- продолжительности подготовки обучающегося к ответу на зачёте или экзамене, проводимом в устной форме, - не более чем на 20 минут;
- продолжительности выступления обучающегося при защите курсовой работы - не более чем на 15 минут.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО и учебным планом по направлению 02.03.01 "Математика и компьютерные науки" и профилю подготовки "Наука о данных".

*Приложение 2*  
к рабочей программе дисциплины (модуля)  
*Б1.В.ДВ.02.01 Топологические векторные пространства*

**Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)**

Направление подготовки: 02.03.01 - Математика и компьютерные науки

Профиль подготовки: Наука о данных

Квалификация выпускника: бакалавр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

Год начала обучения по образовательной программе: 2024

**Основная литература:**

Основная литература:

- 1.Хелемский, А. Я. Лекции по функциональному анализу : учебник / А. Я. Хелемский. - 2-е изд. - Москва: МЦНМО, 2014. - 560 с. - ISBN 978-5-4439-2043-6. - Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/56415> (дата обращения: 28.03.2022).- Режим доступа: для авториз. пользователей.
2. Султанбеков Ф.Ф. От решеток к булевым алгебрам: учебное пособие / Ф.Ф. Султанбеков. - Казань: Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2012. - 74 с. - Текст : электронный. - URL: [http://libweb.kpfu.ru/ebooks/05-IMM/05\\_33\\_2012\\_000032.pdf](http://libweb.kpfu.ru/ebooks/05-IMM/05_33_2012_000032.pdf) (дата обращения: 28.03.2022).- Режим доступа: для студентов и сотрудников КФУ.
3. Шерстнев А. Н. Конспект лекций по математическому анализу / А. Н. Шерстнев. - Изд. 5-е. - Электронные данные (1 файл: 2,66 Мб). - (Казань: Казанский государственный университет, 2009) . - Загл. с экрана. - Режим доступа: открытый. Текст: электронный. - URL:[http://libweb.kpfu.ru/ebooks/05-IMM/05\\_33\\_2009\\_000165.pdf](http://libweb.kpfu.ru/ebooks/05-IMM/05_33_2009_000165.pdf) (дата обращения: 28.03.2022).- Режим доступа: открытый.
4. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа : учебное пособие / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. - 7-е изд. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2009. - 572 с. - ISBN 978-5-9221-0266-7. - Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/2206> (дата обращения: 28.03.2022).- Режим доступа: для авториз. пользователей.

**Дополнительная литература:**

Дополнительная литература:

- 1.Люстерник, Л. А. Краткий курс функционального анализа : учебное пособие / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. - 2-е изд.,ст.ер. - Санкт-Петербург : Лань, 2022. - 272 с. - ISBN 978-5-8114-0976-1. - Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/210290> (дата обращения: 28.03.2022).- Режим доступа: для авториз. пользователей.
2. Треногин, В. А. Задачи и упражнения по функциональному анализу : учебное пособие / В. А. Треногин, Б. М. Писаревский, Т. С. Соболева. - 2-е изд., испр.и доп. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2005. - 240 с. - ISBN 5-9221-0271-0. - Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/2342> (дата обращения: 28.03.2022).- Режим доступа: для авториз. пользователей.
3. Пирковский, А. Ю. Спектральная теория и функциональные исчисления для линейных операторов : учебное пособие / А. Ю. Пирковский. - Москва : МЦНМО, 2010. - 176 с. - ISBN 978-5-94057-573-3. - Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/9384> (дата обращения: 28.03.2022).- Режим доступа: для авториз. пользователей.

*Приложение 3*  
к рабочей программе дисциплины (модуля)  
*Б1.В.ДВ.02.01 Топологические векторные пространства*

**Перечень информационных технологий, используемых для освоения дисциплины (модуля), включая  
перечень программного обеспечения и информационных справочных систем**

Направление подготовки: 02.03.01 - Математика и компьютерные науки

Профиль подготовки: Наука о данных

Квалификация выпускника: бакалавр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

Год начала обучения по образовательной программе: 2024

Освоение дисциплины (модуля) предполагает использование следующего программного обеспечения и информационно-справочных систем:

Операционная система Microsoft Windows 7 Профессиональная или Windows XP (Volume License)

Пакет офисного программного обеспечения Microsoft Office 365 или Microsoft Office Professional plus 2010

Браузер Mozilla Firefox

Браузер Google Chrome

Adobe Reader XI или Adobe Acrobat Reader DC

Kaspersky Endpoint Security для Windows