

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования  
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"  
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского



**УТВЕРЖДАЮ**  
Проректор по образовательной деятельности КФУ  
\_\_\_\_\_ Турилова Е.А.  
"\_\_\_" \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

**Программа дисциплины**  
Функциональный анализ

Направление подготовки: 02.03.01 - Математика и компьютерные науки  
Профиль подготовки: Наука о данных  
Квалификация выпускника: бакалавр  
Форма обучения: очное  
Язык обучения: русский  
Год начала обучения по образовательной программе: 2024

## Содержание

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения ОПОП ВО
2. Место дисциплины (модуля) в структуре ОПОП ВО
3. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся
4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий
  - 4.1. Структура и тематический план контактной и самостоятельной работы по дисциплине (модулю)
  - 4.2. Содержание дисциплины (модуля)
5. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)
6. Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю)
7. Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)
8. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)
9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)
10. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)
11. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)
12. Средства адаптации преподавания дисциплины (модуля) к потребностям обучающихся инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья
13. Приложение №1. Фонд оценочных средств
14. Приложение №2. Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)
15. Приложение №3. Перечень информационных технологий, используемых для освоения дисциплины (модуля), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем

Программу дисциплины разработал(а)(и): профессор, д.н. (доцент) Гумеров Р.Н. (Кафедра математического анализа, отделение математики), Renat.Gumerov@krfu.ru ; Гумеров Ренат Нельсонович

**1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения ОПОП ВО**

Обучающийся, освоивший дисциплину (модуль), должен обладать следующими компетенциями:

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
ОПК-1	Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности

Обучающийся, освоивший дисциплину (модуль):

Должен знать:

основные понятия и результаты по функциональному анализу ( мера и интеграл Лебега, полные метрические и нормированные пространства, принцип сжимающих отображений, ограниченные линейные операторы и функционалы в нормированных пространствах, основные принципы линейного анализа, свойства компактных операторов в гильбертовых пространствах, спектральная теорема для компактного самосопряжённого оператора, теоремы Фредгольма, производные Гато и Фреше, теорема о неявной функции, условия существования экстремумов функционалов ).

Должен уметь:

Уметь вычислять интеграл Лебега. Уметь применять принцип сжимающих отображений для доказательства существования и единственности решения функциональных уравнений, систем линейных уравнений, интегральных уравнений в основных функциональных пространствах. Уметь вычислять нормы ограниченных линейных функционалов и операторов

Уметь применять теорию операторов для исследования операторных уравнений.

Должен владеть:

методами теории меры и интеграла, линейного анализа, теории компактных операторов в гильбертовом пространстве.

Должен демонстрировать способность и готовность:

1. Знать: основные понятия и результаты по функциональному анализу ( мера и интеграл Лебега, полные метрические и нормированные пространства, принцип сжимающих отображений, ограниченные линейные операторы и функционалы в нормированных пространствах, основные принципы линейного анализа, свойства компактных операторов в гильбертовых пространствах, спектральная теорема для компактного самосопряжённого оператора, теоремы Фредгольма, производные Гато и Фреше, теорема о неявной функции, условия существования экстремумов функционалов ).
2. Уметь вычислять интеграл Лебега. Уметь применять принцип сжимающих отображений для доказательства существования и единственности решения функциональных уравнений, систем линейных уравнений, интегральных уравнений в основных функциональных пространствах. Уметь вычислять нормы ограниченных линейных функционалов и операторов
3. Владеть: методами теории меры и интеграла, линейного анализа, теории компактных операторов в гильбертовом пространстве.

**2. Место дисциплины (модуля) в структуре ОПОП ВО**

Данная дисциплина (модуль) включена в раздел "Б1.О.18 Дисциплины (модули)" основной профессиональной образовательной программы 02.03.01 "Математика и компьютерные науки (Наука о данных)" и относится к обязательной части ОПОП ВО.

Осваивается на 3 курсе в 5, 6 семестрах.

**3. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся**

Общая трудоемкость дисциплины составляет 6 зачетных(ые) единиц(ы) на 216 часа(ов).

Контактная работа - 128 часа(ов), в том числе лекции - 64 часа(ов), практические занятия - 64 часа(ов), лабораторные работы - 0 часа(ов), контроль самостоятельной работы - 0 часа(ов).

Самостоятельная работа - 70 часа(ов).

Контроль (зачёт / экзамен) - 18 часа(ов).

Форма промежуточного контроля дисциплины: зачет в 5 семестре; экзамен в 6 семестре.

**4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий**

**4.1 Структура и тематический план контактной и самостоятельной работы по дисциплине (модулю)**

N	Разделы дисциплины / модуля	Се-местр	Виды и часы контактной работы, их трудоемкость (в часах)						Само-стоя-тельная ра-бота
			Лекции, всего	Лекции в эл. форме	Практи-ческие занятия, всего	Практи-ческие в эл. форме	Лабора-торные работы, всего	Лабора-торные в эл. форме	
1.	Тема 1. Системы множеств и меры. Мера Лебега.	5	10	0	10	0	0	0	10
2.	Тема 2. Измеримые функции. Интеграл Лебега.	5	8	0	8	0	0	0	10
3.	Тема 3. Полные метрические пространства. Компактность и предкомпактность. Принцип сжимающих отображений.	5	6	0	6	0	0	0	10
4.	Тема 4. Нормированные и банаховы пространства. Линейные операторы и функционалы. Основные принципы линейного анализа	5	10	0	10	0	0	0	10
5.	Тема 5. Ограниченные линейные операторы в гильбертовом пространстве	6	15	0	15	0	0	0	14
6.	Тема 6. Спектральная теорема для компактного самосопряженного оператора. .	6	6	0	6	0	0	0	6
7.	Тема 7. Уравнения с компактными операторами. Теоремы Фредгольма.	6	6	0	6	0	0	0	6
8.	Тема 8. Элементы нелинейного анализа в нормированных пространствах.	6	3	0	3	0	0	0	4
	Итого		64	0	64	0	0	0	70

**4.2 Содержание дисциплины (модуля)**

**Тема 1. Системы множеств и меры. Мера Лебега.**

Системы множеств. Полукольцо. Кольцо. Минимальное кольцо. Алгебра.

Сигма-кольцо. Сигма алгебра. Их свойства (2).

Мера на полукольце. Продолжение меры. Сигма-аддитивная мера. Внешняя мера. Их основные свойства (2).

Измеримые по Лебегу множества и их свойства. Мера Лебега и ее свойства (2).

**Тема 2. Измеримые функции. Интеграл Лебега.**

Измеримые функции.(2) Различные виды сходимости. Теорема Егорова.(2)

Интеграл Лебега(2). Предельный переход под знаком интеграла.(2)

Абсолютная непрерывность. Неравенство Чебышева. Сравнение интегралов Римана и Лебега.Теорема Лузина.(2)

Заряды.Теорема Радона-Никодима.Теорема Фубини.Мера Лебега-Стилтьеса.(2)

### **Тема 3. Полные метрические пространства. Компактность и предкомпактность. Принцип сжимающих отображений.**

Полные метрические пространства. Теорема о пополнении и его единственности с точностью до изометрии.

Принцип вложенных шаров. Теоремы Бэра.Компактность и предкомпактность. Эпсилон-сети. Вполне ограниченные множества и пространства. Критерий предкомпактности. Сепарабельные пространства.

Принцип сжимающих отображений для полного метрического пространства.Приложения

### **Тема 4. Нормированные и банаховы пространства. Линейные операторы и функционалы. Основные принципы линейного анализа**

Нормированные и банаховы пространства. Конечномерные нормированные пространства. Их полнота.

Эквивалентность норм. Единственность нормированной топологии. Элемент наилучшего приближения. Его существование относительно конечномерного подпространства. Шкала абсолютно интегрируемых функций на пространствах с мерой. Интегральные неравенства Гельдера и Минковского. Операции над банаховыми пространствами. Прямая сумма. Фактор-пространство.Линейные операторы и функционалы. Непрерывность и ограниченность. Нормированное пространство линейных ограниченных операторов из одного нормированного пространства в другое. Обратимые операторы. Пополнение нормированного пространства. Сопряженное пространство.Продолжение ограниченных линейных операторов по непрерывности.

Основные принципы линейного анализа. Теорема Хана-Банаха и следствия. Теорема Банаха-Штейнгауза. Теорема Банаха об открытом отображении. Теорема о замкнутом графике. Второе сопряженное пространство.

### **Тема 5. Ограниченные линейные операторы в гильбертовом пространстве**

Унитарные и гильбертовы пространства. Теорема об элементе наилучшего приближения.Теорема об ортогональном разложении. Ортогональные суммы гильбертовых пространств. Размерность гильбертова пространства. Ортонормированный базис. Сепарабельность. Изоморфность.

Ограниченные линейные функционалы на гильбертовом пространстве. Теорема Рисса.

Ограниченные линейные операторы в гильбертовом пространстве. Билинейные формы и связь с операторами.

Сопряженный оператор. Алгебра ограниченных операторов на гильбертовом пространстве. Ортопроекторы. Унитарные операторы. Конечномерные операторы.

### **Тема 6. Спектральная теорема для компактного самосопряженного оператора. .**

Компактные операторы. Свойства компактных операторов в гильбертовом пространстве. Интегральные компактные операторы. Спектр и резольвента. Их свойства. Спектральная теорема для компактного самосопряженного оператора.

Уравнения с компактными операторами. Теоремы Фредгольма.





Вид работ	Методические рекомендации
самостоятельная работа	<p>Перед каждым занятием и каждой лекцией необходимо решать задачи предыдущего занятия и прорабатывать материал предыдущей лекции.</p> <p>При этом учесть рекомендации преподавателя и требования учебной программы.</p> <p>Дорабатывать свой конспект лекции, делая в нем соответствующие записи из литературы, рекомендованной преподавателем и предусмотренной учебной программой.</p> <p>При подготовке к занятиям использовать литературу предложенную преподавателем и обращаться за методической помощью к нему.</p>
зачет	<p>К зачету повторить все определения и формулировки основных теорем из курса. Просмотреть и понять доказательства теорем.</p> <p>Прорешать все задачи и примеры, разобранные на занятиях и в домашних заданиях. Рекомендуется прорешать дополнительные задачи аналогичного типа из рекомендованных задачников и учебников.</p>
экзамен	<p>К экзамену повторить все определения и формулировки и доказательства всех теорем из курса.</p> <p>Желательно попытаться доказать теоремы без использования конспектов.</p> <p>Прорешать все задачи и примеры, разобранные на занятиях и в домашних заданиях. Рекомендуется прорешать дополнительные задачи аналогичного типа из рекомендованных задачников и учебников.</p> <p>Рекомендуется также посмотреть доказательства теорем в дополнительной литературе.</p>

**10. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем, представлен в Приложении 3 к рабочей программе дисциплины (модуля).

**11. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)**

Материально-техническое обеспечение образовательного процесса по дисциплине (модулю) включает в себя следующие компоненты:

Помещения для самостоятельной работы обучающихся, укомплектованные специализированной мебелью (столы и стулья) и оснащенные компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду КФУ.

Учебные аудитории для контактной работы с преподавателем, укомплектованные специализированной мебелью (столы и стулья).

Компьютер и принтер для распечатки раздаточных материалов.

Мультимедийная аудитория.

Специализированная лаборатория.

**12. Средства адаптации преподавания дисциплины к потребностям обучающихся инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья**

При необходимости в образовательном процессе применяются следующие методы и технологии, облегчающие восприятие информации обучающимися инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья:

- создание текстовой версии любого нетекстового контента для его возможного преобразования в альтернативные формы, удобные для различных пользователей;
- создание контента, который можно представить в различных видах без потери данных или структуры, предусмотреть возможность масштабирования текста и изображений без потери качества, предусмотреть доступность управления контентом с клавиатуры;
- создание возможностей для обучающихся воспринимать одну и ту же информацию из разных источников - например, так, чтобы лица с нарушениями слуха получали информацию визуально, с нарушениями зрения - аудиально;
- применение программных средств, обеспечивающих возможность освоения навыков и умений, формируемых дисциплиной, за счёт альтернативных способов, в том числе виртуальных лабораторий и симуляционных технологий;



- применение дистанционных образовательных технологий для передачи информации, организации различных форм интерактивной контактной работы обучающегося с преподавателем, в том числе вебинаров, которые могут быть использованы для проведения виртуальных лекций с возможностью взаимодействия всех участников дистанционного обучения, проведения семинаров, выступления с докладами и защиты выполненных работ, проведения тренингов, организации коллективной работы;
- применение дистанционных образовательных технологий для организации форм текущего и промежуточного контроля;
- увеличение продолжительности сдачи обучающимся инвалидом или лицом с ограниченными возможностями здоровья форм промежуточной аттестации по отношению к установленной продолжительности их сдачи:
- продолжительности сдачи зачёта или экзамена, проводимого в письменной форме, - не более чем на 90 минут;
- продолжительности подготовки обучающегося к ответу на зачёте или экзамене, проводимом в устной форме, - не более чем на 20 минут;
- продолжительности выступления обучающегося при защите курсовой работы - не более чем на 15 минут.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО и учебным планом по направлению 02.03.01 "Математика и компьютерные науки" и профилю подготовки "Наука о данных".

### Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)

Направление подготовки: 02.03.01 - Математика и компьютерные науки

Профиль подготовки: Наука о данных

Квалификация выпускника: бакалавр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

Год начала обучения по образовательной программе: 2024

#### Основная литература:

1. Хелемский, А. Я. Лекции по функциональному анализу : учебник / А. Я. Хелемский. - 2-е изд. - Москва : МЦНМО, 2014. - 560 с. - ISBN 978-5-4439-2043-6. - Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/56415> (дата обращения: 23.03.2022).- Режим доступа: для авториз. пользователей.
2. Власова, Е. А. Элементы функционального анализа : учебное пособие / Е. А. Власова, И. К. Марчевский. - Санкт-Петербург : Лань, 2022. - 400 с. - ISBN 978-5-8114-1958-6. - Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/212189> (дата обращения: 23.03.2022).- Режим доступа: для авториз. пользователей.
3. Павлов, Е. А. Основы функционального анализа : учебное пособие / Е. А. Павлов. - 2-е изд., стер. - Санкт-Петербург : Лань, 2020. - 88 с. - ISBN 978-5-8114-3635-4. - Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/116362> (дата обращения: 23.03.2022).- Режим доступа: для авториз. пользователей.
4. Бородин, П. А. Задачи по функциональному анализу : учебное пособие / П. А. Бородин, А. М. Савчук, И. А. Шейпак. - Москва : МЦНМО, 2017. - 336 с. - ISBN 978-5-4439-3092-3. - Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/92693> (дата обращения: 23.03.2022).- Режим доступа: для авториз. пользователей.
5. Люстерник, Л. А. Краткий курс функционального анализа : учебное пособие / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. - 2-е изд., стер. - Санкт-Петербург : Лань, 2022. - 272 с. - ISBN 978-5-8114-0976-1. - Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/210290> (дата обращения: 23.03.2022).- Режим доступа: для авториз. пользователей.

#### Дополнительная литература:

1. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа : учебное пособие / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. - 7-е изд. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2009. - 572 с. - ISBN 978-5-9221-0266-7. - Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/2206> (дата обращения: 23.03.2022).- Режим доступа: для авториз. пользователей.
2. Шерстнев А. Н. Конспект лекций по математическому анализу: учебное пособие / А. Н. Шерстнев . - 5-е изд. - Электр. дан. (1 файл: 2,66 Мб) . - Казань: Казанский государственный университет, 2009. - 374 с. - Текст: электронный. - URL: [http://libweb.kpfu.ru/ebooks/05-IMM/05\\_33\\_2009\\_000165.pdf](http://libweb.kpfu.ru/ebooks/05-IMM/05_33_2009_000165.pdf) (дата обращения: 21.07.2023). - Режим доступа: открытый.
3. Филимоненкова, Н. В. Конспект лекций по функциональному анализу : учебное пособие / Н. В. Филимоненкова. - Санкт-Петербург : Лань, 2022. - 176 с. - ISBN 978-5-8114-1821-3. - Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/212048> (дата обращения: 23.03.2022).- Режим доступа: для авториз. пользователей.

4. Филимонова, Н. В. Сборник задач по функциональному анализу : учебное пособие / Н. В. Филимонова. - Санкт-Петербург : Лань, 2022. - 240 с. - ISBN 978-5-8114-1822-0. - Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/212057> (дата обращения: 23.03.2022).- Режим доступа: для авториз. пользователей.

5. Пирковский, А. Ю. Спектральная теория и функциональные исчисления для линейных операторов : учебное пособие / А. Ю. Пирковский. - Москва : МЦНМО, 2010. - 176 с. - ISBN 978-5-94057-573-3. - Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/9384> (дата обращения: 23.03.2022).- Режим доступа: для авториз. пользователей.

*Приложение 3  
к рабочей программе дисциплины (модуля)  
Б1.О.18 Функциональный анализ*

**Перечень информационных технологий, используемых для освоения дисциплины (модуля), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем**

Направление подготовки: 02.03.01 - Математика и компьютерные науки

Профиль подготовки: Наука о данных

Квалификация выпускника: бакалавр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

Год начала обучения по образовательной программе: 2024

Освоение дисциплины (модуля) предполагает использование следующего программного обеспечения и информационно-справочных систем:

Операционная система Microsoft Windows 7 Профессиональная или Windows XP (Volume License)

Пакет офисного программного обеспечения Microsoft Office 365 или Microsoft Office Professional plus 2010

Браузер Mozilla Firefox

Браузер Google Chrome

Adobe Reader XI или Adobe Acrobat Reader DC

Kaspersky Endpoint Security для Windows

Учебно-методическая литература для данной дисциплины имеется в наличии в электронно-библиотечной системе "ZNANIUM.COM", доступ к которой предоставлен обучающимся. ЭБС "ZNANIUM.COM" содержит произведения крупнейших российских учёных, руководителей государственных органов, преподавателей ведущих вузов страны, высококвалифицированных специалистов в различных сферах бизнеса. Фонд библиотеки сформирован с учетом всех изменений образовательных стандартов и включает учебники, учебные пособия, учебно-методические комплексы, монографии, авторефераты, диссертации, энциклопедии, словари и справочники, законодательно-нормативные документы, специальные периодические издания и издания, выпускаемые издательствами вузов. В настоящее время ЭБС ZNANIUM.COM соответствует всем требованиям федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования (ФГОС ВО) нового поколения.

Учебно-методическая литература для данной дисциплины имеется в наличии в электронно-библиотечной системе Издательства "Лань", доступ к которой предоставлен обучающимся. ЭБС Издательства "Лань" включает в себя электронные версии книг издательства "Лань" и других ведущих издательств учебной литературы, а также электронные версии периодических изданий по естественным, техническим и гуманитарным наукам. ЭБС Издательства "Лань" обеспечивает доступ к научной, учебной литературе и научным периодическим изданиям по максимальному количеству профильных направлений с соблюдением всех авторских и смежных прав.