

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования  
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"  
Институт вычислительной математики и информационных технологий



*подписано электронно-цифровой подписью*

## Программа дисциплины

Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений

Направление подготовки: 01.04.04 - Прикладная математика

Профиль подготовки: Вычислительная геометрия и высокопроизводительные вычисления

Квалификация выпускника: магистр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

Год начала обучения по образовательной программе: 2024

## Содержание

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения ОПОП ВО
2. Место дисциплины (модуля) в структуре ОПОП ВО
3. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся
4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий
  - 4.1. Структура и тематический план контактной и самостоятельной работы по дисциплине (модулю)
  - 4.2. Содержание дисциплины (модуля)
5. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)
6. Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю)
7. Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)
8. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)
9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)
10. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)
11. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)
12. Средства адаптации преподавания дисциплины (модуля) к потребностям обучающихся инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья
13. Приложение №1. Фонд оценочных средств
14. Приложение №2. Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)
15. Приложение №3. Перечень информационных технологий, используемых для освоения дисциплины (модуля), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем

Программу дисциплины разработал(а)(и): доцент, к.н. Маркина А.Г. (кафедра прикладной математики и искусственного интеллекта, отделение прикладной математики и информатики), AngGMarkina@kpfu.ru ; заместитель директора по научной деятельности Тумаков Д.Н. (Директорат Института ВМ и ИТ, Институт вычислительной математики и информационных технологий), Dmitri.Tumakov@kpfu.ru

**1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения ОПОП ВО**

Обучающийся, освоивший дисциплину (модуль), должен обладать следующими компетенциями:

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
ПК-3	Способен применять знания и методы дисциплин естественно-научного и математического цикла при проведении научных исследований, в том числе математического и компьютерного моделирования и высокопроизводительных вычислений
ПК-4	Разработка, отладка, рефакторинг программного кода, баз данных, информационных ресурсов; проектирование и интеграция программного обеспечения, управление проектами в области ИТ

Обучающийся, освоивший дисциплину (модуль):

Должен знать:

фундаментальные понятия дисциплины, быть знакомыми с современным состоянием дисциплины, основные методы решения линейных дифференциальных и интегральных уравнений.

Должен уметь:

уметь решать простейшие уравнения

Должен владеть:

навыками применения дифференциальных и интегральных уравнений для решения современных задач.

Должен демонстрировать способность и готовность:

решить численно или аналитически обыкновенное дифференциальное и интегральное уравнение

**2. Место дисциплины (модуля) в структуре ОПОП ВО**

Данная дисциплина (модуль) включена в раздел "Б1.В.ДВ.03.01 Дисциплины (модули)" основной профессиональной образовательной программы 01.04.04 "Прикладная математика (Вычислительная геометрия и высокопроизводительные вычисления)" и относится к дисциплинам по выбору части ОПОП ВО, формируемой участниками образовательных отношений.

Осваивается на 1 курсе в 2 семестре.

**3. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся**

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зачетных(ые) единиц(ы) на 144 часа(ов).

Контактная работа - 34 часа(ов), в том числе лекции - 0 часа(ов), практические занятия - 0 часа(ов), лабораторные работы - 34 часа(ов), контроль самостоятельной работы - 0 часа(ов).

Самостоятельная работа - 56 часа(ов).

Контроль (зачёт / экзамен) - 54 часа(ов).

Форма промежуточного контроля дисциплины: экзамен во 2 семестре.

**4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий**

**4.1 Структура и тематический план контактной и самостоятельной работы по дисциплине (модулю)**

N	Разделы дисциплины / модуля	Се- местр	Виды и часы контактной работы, их трудоемкость (в часах)						Само- стоя- тель- ная ра- бота
			Лекции, всего	Лекции в эл. форме	Практи- ческие занятия, всего	Практи- ческие в эл. форме	Лабораторные работы, всего	Лабораторные в эл. форме	
1.	Тема 1. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений	2	0	0	0	0	14	0	26
2.	Тема 2. Численные методы решения интегральных уравнений	2	0	0	0	0	16	0	24
3.	Тема 3. Численные методы решения интегро-дифференциальных уравнений	2	0	0	0	0	4	0	6
	Итого		0	0	0	0	34	0	56

#### 4.2 Содержание дисциплины (модуля)

##### Тема 1. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений

Дифференциальные уравнения (ДУ) - основа математических моделей физических и других явлений и процессов. Основная цель теории ДУ разработка методов поиска решений дифференциальных уравнений и исследование их свойств. Уравнение называется дифференциальным, если в нем содержатся производные искомых функций или дифференциалы величин, зависимости между которыми

нужно найти. Обыкновенное ДУ имеет вид  $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ ,

где  $x$  - независимая переменная,  $y = y(x)$  - искомая функция. Порядок уравнения определяется порядком старшей производной в уравнении. В ДУ с частными производными искомая функция зависит от двух и более независимых переменных. Решением ДУ называют такую функцию  $y(x)$ , которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество. Решить обыкновенное дифференциальное уравнение - значит найти все его решения.

##### Тема 2. Численные методы решения интегральных уравнений

Классификация интегральных уравнений. Уравнения Фредгольма второго рода. Теоремы. Уравнения с вырожденным ядром. Метод коллокаций. Метод наименьших квадратов. Метод механических квадратур. Метод Галеркина. Выбор в качестве системы базисных функций полиномов Чебышева первого рода, полиномов Лагерра и т.д. Уравнения Фредгольма первого рода. Методы регуляризации.

##### Тема 3. Численные методы решения интегро-дифференциальных уравнений

Математические модели многих физических процессов включают в себя обыкновенные интегро-дифференциальные уравнения (ИДУ), неразрешенные относительно главной части. Для интегро-дифференциальных уравнений под главной частью понимается старшая производная искомой вектор-функции. Начальная (краевая) задача для таких уравнений требует исследования на предмет существования и единственности непрерывно дифференцируемого решения. Даже если решение таких задач существует, единственно и достаточно гладкое, то его, как правило, не удастся найти в аналитическом виде. Если для таких задач применить численные методы, разработанные для ИДУ, разрешенных относительно главной части, то в результате мы получим систему линейных (нелинейных) алгебраических уравнений, которая либо не имеет решения, либо имеет множество решений. Даже в линейном случае стандартные дискретные методы часто порождают неустойчивый процесс. Таким образом, возникает необходимость в разработке и программной реализации эффективных численных методов решения таких задач.

#### 5. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)

Самостоятельная работа обучающихся выполняется по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия. Самостоятельная работа подразделяется на самостоятельную работу на аудиторных занятиях и на внеаудиторную самостоятельную работу. Самостоятельная работа обучающихся включает как полностью самостоятельное освоение отдельных тем (разделов) дисциплины, так и проработку тем (разделов), осваиваемых во время аудиторной работы. Во время самостоятельной работы обучающиеся читают и конспектируют учебную, научную и справочную литературу, выполняют задания, направленные на закрепление знаний и отработку умений и навыков, готовятся к текущему и промежуточному контролю по дисциплине.

Организация самостоятельной работы обучающихся регламентируется нормативными документами, учебно-методической литературой и электронными образовательными ресурсами, включая:

Порядок организации и осуществления образовательной деятельности по образовательным программам высшего образования - программам бакалавриата, программам специалитета, программам магистратуры (утвержден приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации от 6 апреля 2021 года №245)

Письмо Министерства образования Российской Федерации №14-55-99бин/15 от 27 ноября 2002 г. "Об активизации самостоятельной работы студентов высших учебных заведений"

Устав федерального государственного автономного образовательного учреждения "Казанский (Приволжский) федеральный университет"

Правила внутреннего распорядка федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования "Казанский (Приволжский) федеральный университет"

Локальные нормативные акты Казанского (Приволжского) федерального университета

#### **6. Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю)**

Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю) включает оценочные материалы, направленные на проверку освоения компетенций, в том числе знаний, умений и навыков. Фонд оценочных средств включает оценочные средства текущего контроля и оценочные средства промежуточной аттестации.

В фонде оценочных средств содержится следующая информация:

- соответствие компетенций планируемым результатам обучения по дисциплине (модулю);
- критерии оценивания сформированности компетенций;
- механизм формирования оценки по дисциплине (модулю);
- описание порядка применения и процедуры оценивания для каждого оценочного средства;
- критерии оценивания для каждого оценочного средства;
- содержание оценочных средств, включая требования, предъявляемые к действиям обучающихся, демонстрируемым результатам, задания различных типов.

Фонд оценочных средств по дисциплине находится в Приложении 1 к программе дисциплины (модулю).

#### **7. Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)**

Освоение дисциплины (модуля) предполагает изучение основной и дополнительной учебной литературы. Литература может быть доступна обучающимся в одном из двух вариантов (либо в обоих из них):

- в электронном виде - через электронные библиотечные системы на основании заключенных КФУ договоров с правообладателями;
- в печатном виде - в Научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского. Обучающиеся получают учебную литературу на абонементе по читательским билетам в соответствии с правилами пользования Научной библиотекой.

Электронные издания доступны дистанционно из любой точки при введении обучающимся своего логина и пароля от личного кабинета в системе "Электронный университет". При использовании печатных изданий библиотечный фонд должен быть укомплектован ими из расчета не менее 0,5 экземпляра (для обучающихся по ФГОС 3++ - не менее 0,25 экземпляра) каждого из изданий основной литературы и не менее 0,25 экземпляра дополнительной литературы на каждого обучающегося из числа лиц, одновременно осваивающих данную дисциплину.

Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля), находится в Приложении 2 к рабочей программе дисциплины. Он подлежит обновлению при изменении условий договоров КФУ с правообладателями электронных изданий и при изменении комплектования фондов Научной библиотеки КФУ.

#### **8. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

[http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=2298](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=2298) - [http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=2298](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=2298)

[http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=2298](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=2298) - [http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=2298](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=2298)

<http://e.lanbook.com/view/book/4397/> - <http://e.lanbook.com/view/book/4397/>

<http://znanium.com/bookread.php?book=350803> - <http://znanium.com/bookread.php?book=350803>

<http://znanium.com/bookread.php?book=350803> - <http://znanium.com/bookread.php?book=350803>

Команда MS Teams "Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений" -

<https://teams.microsoft.com/l/team/19%3ad10fcedd1c044e68966c0af6a44205cd%40thread.tacv2/conversations?groupId=927dada8-46a6>

#### **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

Вид работ	Методические рекомендации
лабораторные работы	Содержание лабораторных работ посвящено изучению основ решения дифференциальных и интегральных уравнений. Рассматриваются принципы программирования для интегральных и дифференциальных задач, обработки массивов и файлов, использования структурированных типов данных, подпрограмм с особенностями передачи в них параметров. Приводятся различные приемы программирования, в том числе использование указателей и ссылок, динамически распределяемой памяти. Все работы ориентированы на применения структурного подхода и модульности, представлены принципы работы с библиотечными ресурсами. В каждой лабораторной работе приводится пример выполнения типового задания с учетом предъявляемых требований. Необходимо изучить теорию по заданной теме, только после этого приступать к лабораторным заданиям. Реализация данной дисциплины предполагает как очное, так и дистанционное форму обучения.
самостоятельная работа	Содержание самостоятельных работ посвящено изучению основ алгоритмизации вычислительных процессов. Рассматриваются принципы программирования разветвляющихся и циклических вычислительных процессов, обработки массивов и файлов, использования структурированных типов данных, подпрограмм с особенностями передачи в них параметров. Приводятся различные приемы программирования, в том числе использование указателей и ссылок, динамически распределяемой памяти. Все работы ориентированы на применения структурного подхода и модульности, представлены принципы работы с библиотечными ресурсами.
экзамен	Проверка теоретических знаний производится в виде опроса по любым вопросам, входящим в программу. Вопрос, как правило, формулируется в виде просьбы написать на листе бумаги короткий (10-15 строк) код, иллюстрирующий то или иное понятие языка программирования. Обычно задается от двух до пяти вопросов. Студенты, не сдавшие теоретическую часть, автоматически не допускаются к выполнению практической части экзамена.

**10. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем, представлен в Приложении 3 к рабочей программе дисциплины (модуля).

**11. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)**

Материально-техническое обеспечение образовательного процесса по дисциплине (модулю) включает в себя следующие компоненты:

Помещения для самостоятельной работы обучающихся, укомплектованные специализированной мебелью (столы и стулья) и оснащенные компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду КФУ.

Учебные аудитории для контактной работы с преподавателем, укомплектованные специализированной мебелью (столы и стулья).

Компьютер и принтер для распечатки раздаточных материалов.

Компьютерный класс.

**12. Средства адаптации преподавания дисциплины к потребностям обучающихся инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья**

При необходимости в образовательном процессе применяются следующие методы и технологии, облегчающие восприятие информации обучающимися инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья:

- создание текстовой версии любого нетекстового контента для его возможного преобразования в альтернативные формы, удобные для различных пользователей;
- создание контента, который можно представить в различных видах без потери данных или структуры, предусмотреть возможность масштабирования текста и изображений без потери качества, предусмотреть доступность управления контентом с клавиатуры;
- создание возможностей для обучающихся воспринимать одну и ту же информацию из разных источников - например, так, чтобы лица с нарушениями слуха получали информацию визуально, с нарушениями зрения - аудиально;
- применение программных средств, обеспечивающих возможность освоения навыков и умений, формируемых дисциплиной, за счёт альтернативных способов, в том числе виртуальных лабораторий и симуляционных технологий;

- применение дистанционных образовательных технологий для передачи информации, организации различных форм интерактивной контактной работы обучающегося с преподавателем, в том числе вебинаров, которые могут быть использованы для проведения виртуальных лекций с возможностью взаимодействия всех участников дистанционного обучения, проведения семинаров, выступления с докладами и защиты выполненных работ, проведения тренингов, организации коллективной работы;
- применение дистанционных образовательных технологий для организации форм текущего и промежуточного контроля;
- увеличение продолжительности сдачи обучающимся инвалидом или лицом с ограниченными возможностями здоровья форм промежуточной аттестации по отношению к установленной продолжительности их сдачи:
- продолжительности сдачи зачёта или экзамена, проводимого в письменной форме, - не более чем на 90 минут;
- продолжительности подготовки обучающегося к ответу на зачёте или экзамене, проводимом в устной форме, - не более чем на 20 минут;
- продолжительности выступления обучающегося при защите курсовой работы - не более чем на 15 минут.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО и учебным планом по направлению 01.04.04 "Прикладная математика" и магистерской программе "Вычислительная геометрия и высокопроизводительные вычисления".

Приложение 2  
к рабочей программе дисциплины (модуля)  
Б1.В.ДВ.03.01 Численные методы решения дифференциальных и  
интегральных уравнений

**Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)**

Направление подготовки: 01.04.04 - Прикладная математика

Профиль подготовки: Вычислительная геометрия и высокопроизводительные вычисления

Квалификация выпускника: магистр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

Год начала обучения по образовательной программе: 2024

**Основная литература:**

1. Бахвалов, Н. С. Численные методы : учебник / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. - 9-е изд. - Москва : Лаборатория знаний, 2020. - 636 с. - ISBN 978-5-00101-836-0. - Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/126099> (дата обращения: 12.01.2024). - Режим доступа: для авториз. пользователей.
2. Карчевский, М. М. Лекции по уравнениям математической физики учебное пособие / М. М. Карчевский. - 4-е изд., стер. - Санкт-Петербург : Лань, 2023. - 164 с. - ISBN 978-5-507-46827-0. - Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/321200> (дата обращения: 12.01.2024). - Режим доступа: для авториз. пользователей.
3. Карчевский, М. М. Уравнения математической физики. Дополнительные главы : учебное пособие / М. М. Карчевский, М. Ф. Павлова. - 2-е изд., доп. - Санкт-Петербург : Лань, 2022. - 276 с. - ISBN 978-5-8114-2133-6. - Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/212288> (дата обращения: 12.01.2024). - Режим доступа: для авториз. пользователей.
4. Киреев, В. И. Численные методы в примерах и задачах : учебное пособие / В. И. Киреев, А. В. Пантелеев. - 4-е изд., испр. - Санкт-Петербург : Лань, 2022. - 448 с. - ISBN 978-5-8114-1888-6. - Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/212063> (дата обращения: 12.01.2024). - Режим доступа: для авториз. пользователей.

**Дополнительная литература:**

1. Хелемский, А. Я. Лекции по функциональному анализу : учебник / А. Я. Хелемский. - 2-е изд. - Москва : МЦНМО, 2014. - 560 с. - ISBN 978-5-4439-2043-6. - Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/56415> (дата обращения: 12.01.2024). - Режим доступа: для авториз. пользователей.
2. Васильева, А. Б. Интегральные уравнения : учебник / А. Б. Васильева, Н. А. Тихонов. - 3-е изд., стер. - Санкт-Петербург : Лань, 2022. - 160 с. - ISBN 978-5-8114-0911-2. - Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/210230> (дата обращения: 12.01.2024). - Режим доступа: для авториз. пользователей.
3. Тихонов, А. Н. Дифференциальные уравнения : учебник / А. Н. Тихонов, А. Б. Васильева, А. Г. Свешников. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2002. - 256 с. - ISBN 978-5-9221-0277-3. - Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/48171> (дата обращения: 12.01.2024). - Режим доступа: для авториз. пользователей.
4. Радин, В. П. Метод конечных элементов в динамических задачах сопротивления материалов : учебное пособие / В. П. Радин, Ю. Н. Самогин, В. П. Чирков. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2013. - 316 с. - ISBN 978-5-9221-1485-1. - Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/59668> (дата обращения: 12.01.2024). - Режим доступа: для авториз. пользователей.
5. Амосов, А. А. Вычислительные методы: учебное пособие / А. А. Амосов, Ю. А. Дубинский, Н. В. Копченова. - 5-е изд., стер. - Санкт-Петербург : Лань, 2023. - 672 с. - ISBN 978-5-507-47808-8. - Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/327497> (дата обращения: 12.01.2024). - Режим доступа: для авториз. пользователей.



*Приложение 3*  
*к рабочей программе дисциплины (модуля)*  
*Б1.В.ДВ.03.01 Численные методы решения дифференциальных и*  
*интегральных уравнений*

**Перечень информационных технологий, используемых для освоения дисциплины (модуля), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем**

Направление подготовки: 01.04.04 - Прикладная математика

Профиль подготовки: Вычислительная геометрия и высокопроизводительные вычисления

Квалификация выпускника: магистр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

Год начала обучения по образовательной программе: 2024

Освоение дисциплины (модуля) предполагает использование следующего программного обеспечения и информационно-справочных систем:

Операционная система Microsoft Windows 7 Профессиональная или Windows XP (Volume License)

Пакет офисного программного обеспечения Microsoft Office 365 или Microsoft Office Professional plus 2010

Браузер Mozilla Firefox

Браузер Google Chrome

Adobe Reader XI или Adobe Acrobat Reader DC

Kaspersky Endpoint Security для Windows