

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования  
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"  
Институт вычислительной математики и информационных технологий



*подписано электронно-цифровой подписью*

## **Программа дисциплины** Прикладной функциональный анализ

Направление подготовки: 01.04.04 - Прикладная математика  
Профиль подготовки: Вычислительная геометрия и высокопроизводительные вычисления  
Квалификация выпускника: магистр  
Форма обучения: очное  
Язык обучения: русский  
Год начала обучения по образовательной программе: 2024

## Содержание

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения ОПОП ВО
2. Место дисциплины (модуля) в структуре ОПОП ВО
3. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся
4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий
  - 4.1. Структура и тематический план контактной и самостоятельной работы по дисциплине (модулю)
  - 4.2. Содержание дисциплины (модуля)
5. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)
6. Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю)
7. Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)
8. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)
9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)
10. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)
11. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)
12. Средства адаптации преподавания дисциплины (модуля) к потребностям обучающихся инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья
13. Приложение №1. Фонд оценочных средств
14. Приложение №2. Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)
15. Приложение №3. Перечень информационных технологий, используемых для освоения дисциплины (модуля), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем

Программу дисциплины разработал(а)(и): доцент, к.н. (доцент) Сидоров А.М. (кафедра прикладной математики и искусственного интеллекта, отделение прикладной математики и информатики), Anatoly.Sidorov@kpfu.ru

**1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения ОПОП ВО**

Обучающийся, освоивший дисциплину (модуль), должен обладать следующими компетенциями:

<b>Шифр компетенции</b>	<b>Расшифровка приобретаемой компетенции</b>
ПК-2	Способен к проведению научно-исследовательских разработок по отдельным разделам темы
ПК-3	Способен применять знания и методы дисциплин естественно-научного и математического цикла при проведении научных исследований, в том числе математического и компьютерного моделирования и высокопроизводительных вычислений

Обучающийся, освоивший дисциплину (модуль):

Должен знать:

разделы функционального анализа, которые традиционно используются при исследовании свойств дифференциальных уравнений с частными производными, при построении численных методов решения задач математической физики, и знакомство с которыми необходимо для математика-прикладника.

Должен уметь:

практически решать примеры по функциональному анализу.

Должен владеть:

курсами по нелинейным уравнениям с частными производными и по численным методам решения уравнений математической физики.

Должен демонстрировать способность и готовность:

полное ознакомление с теорией и методами функционального анализа.

## 2. Место дисциплины (модуля) в структуре ОПОП ВО

Данная дисциплина (модуль) включена в раздел "Б1.В.ДВ.01.02 Дисциплины (модули)" основной профессиональной образовательной программы 01.04.04 "Прикладная математика (Вычислительная геометрия и высокопроизводительные вычисления)" и относится к дисциплинам по выбору части ОПОП ВО, формируемой участниками образовательных отношений.

Осваивается на 1 курсе в 1 семестре.

## 3. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся

Общая трудоемкость дисциплины составляет 5 зачетных(ые) единиц(ы) на 180 часа(ов).

Контактная работа - 34 часа(ов), в том числе лекции - 34 часа(ов), практические занятия - 0 часа(ов), лабораторные работы - 0 часа(ов), контроль самостоятельной работы - 0 часа(ов).

Самостоятельная работа - 92 часа(ов).

Контроль (зачёт / экзамен) - 54 часа(ов).

Форма промежуточного контроля дисциплины: экзамен в 1 семестре.

## 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

### 4.1 Структура и тематический план контактной и самостоятельной работы по дисциплине (модулю)

N	Разделы дисциплины / модуля	Се- местр	Виды и часы контактной работы, их трудоемкость (в часах)						Само- стоя- тель- ная ра- бота
			Лекции, всего	Лекции в эл. форме	Практи- ческие занятия, всего	Практи- ческие в эл. форме	Лабора- торные работы, всего	Лабора- торные в эл. форме	
1.	Тема 1. Пространства и отображения	1	4	0	0	0	0	0	10
2.	Тема 2. Теория двойственности и проекторы	1	4	0	0	0	0	0	10
3.	Тема 3. Нормальная разрешимость. Операторы Нетера	1	4	0	0	0	0	0	10
4.	Тема 4. Характеристические операторы Нетера. Операторы Фредгольма	1	5	0	0	0	0	0	10
5.	Тема 5. Аппроксимация и интерполяция	1	4	0	0	0	0	0	10
6.	Тема 6. Условия единственности решений операторных уравнений	1	5	0	0	0	0	0	15
7.	Тема 7. Сходимость приближенной схемы	1	5	0	0	0	0	0	10
8.	Тема 8. Метод Галеркина. Аппроксимация двойственности	1	5	0	0	0	0	0	15
	Итого		36	0	0	0	0	0	90

### 4.2 Содержание дисциплины (модуля)

#### Тема 1. Пространства и отображения

Множества и элементы множеств. Отображения множества на множество. Левое обратное отображение и правое обратное отображение. Линейное пространство. Линейная независимость элементов. Левый и правый обратные операторы. Пространства со скалярным произведением. Ортогональность. Ортонормированные системы элементов. Процесс ортогонализации Шмидта.

## **Тема 2. Теория двойственности и проекторы**

Двойственные пространства. невырожденная двойственность. Пара двойственных операторов. Свойства двойственных операторов. Двойственность интегральных операторов Фредгольма. Конечномерные пространства. Пространство, двойственное к конечномерному. Конечномерный оператор. Проектор. Разложение пространства в прямую сумму. Биортонормированные системы элементов.

## **Тема 3. Нормальная разрешимость. Операторы Нетера**

Аннуляторы и их свойства. Замыкание множества и бязамкнутые множества. Множества нулей и множества значений линейных операторов. Нормальная разрешимость оператора. Операторы Нетера, их размерности и индекс. Примеры операторов Нетера. Линейный оператор в конечномерных пространствах. Соответствие между элементами пространств.

Свойства сужения оператора Нетера.

## **Тема 4. Характеристические операторы Нетера. Операторы Фредгольма**

Канонические операторы Фредгольма (в конечномерных и в бесконечномерных пространствах). Характеристические операторы Нетера. Зависимость обратимости оператора Нетера от его индекса. Критерий фредгольмовости оператора: лемма Шмидта и теорема Никольского. Интегральные операторы Фредгольма. Существование и единственность решения интегрального уравнения Фредгольма.

## **Тема 5. Аппроксимация и интерполяция**

Абстрактные приближенные схемы: определение и примеры. Нормированные пространства. Ограниченные линейные операторы. Норма оператора. Условие существования ограниченного обратного оператора. Аппроксимирующие пространства. Операторы аппроксимации и интерполяции. невырожденная аппроксимация. Аппроксимирующий оператор. Оценки погрешности элементов. Леммы об априорной оценке погрешностей решений операторных уравнений.

## **Тема 6. Условия единственности решений операторных уравнений**

Условие существования ограниченного обратного оператора у аппроксимирующего оператора. Условие существования ограниченного обратного оператора у точного оператора. Интегральное уравнение Фредгольма: метод механических квадратур, кубические нормы. Интегральное уравнение Фредгольма: метод Галеркина, сферические нормы. Существование решений операторных уравнений. Квазирешения. Оценки невязок уравнений.

## **Тема 7. Сходимость приближенной схемы**

Два определения сходимости последовательности аппроксимирующих решений. Сильная сходимость последовательности аппроксимирующих операторов к точному оператору. Две теоремы о сходимости приближенной схемы. Проверка условия единственности решений аппроксимирующих уравнений. Метод усечения бесконечной системы линейных алгебраических уравнений: кубические нормы и сферические нормы. Устойчивость приближенной схемы.

## **Тема 8. Метод Галеркина. Аппроксимация двойственности**

Приближенное уравнение метода Галеркина. Равносильность методу усечения бесконечной системы линейных алгебраических уравнений. Метод полуобращения операторного уравнения. Аппроксимация двойственных пространств и двойственных операторов. Аппроксимационные диаграммы. Абстрактное линейное программирование. Пример: задача о распределении нагрузки вдоль упругой струны.

## **5. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)**

Самостоятельная работа обучающихся выполняется по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия. Самостоятельная работа подразделяется на самостоятельную работу на аудиторных занятиях и на внеаудиторную самостоятельную работу. Самостоятельная работа обучающихся включает как полностью самостоятельное освоение отдельных тем (разделов) дисциплины, так и проработку тем (разделов), осваиваемых во время аудиторной работы. Во время самостоятельной работы обучающиеся читают и конспектируют учебную, научную и справочную литературу, выполняют задания, направленные на закрепление знаний и отработку умений и навыков, готовятся к текущему и промежуточному контролю по дисциплине.

Организация самостоятельной работы обучающихся регламентируется нормативными документами, учебно-методической литературой и электронными образовательными ресурсами, включая:

Порядок организации и осуществления образовательной деятельности по образовательным программам высшего образования - программам бакалавриата, программам специалитета, программам магистратуры (утвержден приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации от 6 апреля 2021 года №245)

Письмо Министерства образования Российской Федерации №14-55-99бин/15 от 27 ноября 2002 г. "Об активизации самостоятельной работы студентов высших учебных заведений"

Устав федерального государственного автономного образовательного учреждения "Казанский (Приволжский) федеральный университет"

Правила внутреннего распорядка федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования "Казанский (Приволжский) федеральный университет"

Локальные нормативные акты Казанского (Приволжского) федерального университета

Учебно-методические материалы по дисциплине - [www.abcrnb.ru](http://www.abcrnb.ru)

#### **6. Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю)**

Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю) включает оценочные материалы, направленные на проверку освоения компетенций, в том числе знаний, умений и навыков. Фонд оценочных средств включает оценочные средства текущего контроля и оценочные средства промежуточной аттестации.

В фонде оценочных средств содержится следующая информация:

- соответствие компетенций планируемому результату обучения по дисциплине (модулю);
- критерии оценивания сформированности компетенций;
- механизм формирования оценки по дисциплине (модулю);
- описание порядка применения и процедуры оценивания для каждого оценочного средства;
- критерии оценивания для каждого оценочного средства;
- содержание оценочных средств, включая требования, предъявляемые к действиям обучающихся, демонстрируемым результатам, задания различных типов.

Фонд оценочных средств по дисциплине находится в Приложении 1 к программе дисциплины (модулю).

#### **7. Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)**

Освоение дисциплины (модуля) предполагает изучение основной и дополнительной учебной литературы. Литература может быть доступна обучающимся в одном из двух вариантов (либо в обоих из них):

- в электронном виде - через электронные библиотечные системы на основании заключенных КФУ договоров с правообладателями;

- в печатном виде - в Научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского. Обучающиеся получают учебную литературу на абонементе по читательским билетам в соответствии с правилами пользования Научной библиотекой.

Электронные издания доступны дистанционно из любой точки при введении обучающимся своего логина и пароля от личного кабинета в системе "Электронный университет". При использовании печатных изданий библиотечный фонд должен быть укомплектован ими из расчета не менее 0,5 экземпляра (для обучающихся по ФГОС 3++ - не менее 0,25 экземпляра) каждого из изданий основной литературы и не менее 0,25 экземпляра дополнительной литературы на каждого обучающегося из числа лиц, одновременно осваивающих данную дисциплину.

Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля), находится в Приложении 2 к рабочей программе дисциплины. Он подлежит обновлению при изменении условий договоров КФУ с правообладателями электронных изданий и при изменении комплектования фондов Научной библиотеки КФУ.

#### **8. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

Википедия - <http://ru.wikipedia.org>

Команда MS Teams -

<https://teams.microsoft.com/l/team/19%3ac4dd2ea531ad45e0bec6bebdd83b0d5e%40thread.tacv2/conversations?groupId=1b5954de-1db7>

Портал математических интернет-ресурсов - <http://www.allmath.com/>

Портал математических интернет-ресурсов - <http://www.math.ru/>

Портал математических интернет-ресурсов - <http://www.exponenta.ru>

#### **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**



Вид работ	Методические рекомендации
лекции	Рекомендуется аккуратно вести конспект лекций, выделяя главные положения теории, и обращать особое внимание на примеры. Не следует пытаться записать абсолютно все, детали можно найти в рекомендованной литературе. Если лекция пропущена по уважительной причине, то желательно как можно быстрее попросить посмотреть (и переписать) конспект у товарища по группе. Если были предложены задачи для самостоятельного решения, то их желательно все разобрать. Перед следующей лекцией неплохо повторить материал предыдущей темы. Реализация данной дисциплины предполагает как очную, так и дистанционную форму обучения.
самостоятельная работа	Изучение данного курса предусматривает систематическую самостоятельную работу студентов над теоретическим материалом, текстами рекомендованных учебников и учебных пособий; развитие навыков самоконтроля, способствующих интенсификации учебного процесса. Студентам следует стремиться к активизации знаний на занятиях по другим естественно-научным дисциплинам, связанным с данным курсом. Основной целью самостоятельных занятий по данному курсу является углубленное изучение основных принципов построения приближенных схем, которые используются при аппроксимации граничных задач для дифференциальных уравнений и интегральных уравнений. При подготовке к каждому занятию необходимо обратиться к учебному пособию. Необходимо также изучить литературу и интернет-источники по данной теме, чтобы уточнить определения, формулировки основных результатов, найти аналоги решаемым задачам и выполняемым упражнениям. При работе с примерами необходимо стремиться не только к узнаванию алгоритма решения каждой конкретной задачи, но и к пониманию цели его употребления в данном контексте, функциональной нагрузки, которой данный пример обладает. Самостоятельная работа по изучению курса предполагает внеаудиторную работу. Этапы выполнения самостоятельных работ: 1. Просмотр учебного пособия и рекомендуемой литературы по теме задания. 2. Составление резюме прочитанной главы соответствующего раздела рекомендуемого теоретического источника или учебника. 3. Выполнение заданий по теме и их комментирование.
экзамен	При подготовке к экзамену обучающемуся рекомендуется составить план процесса подготовки, включающей изучение, повторение, систематизацию, логическую обработку материала, анализ полученной информации с выявлением возможных следствий и неявных свойств объектов, составлением списка возможных дополнительных вопросов и заданий, подготовку к выполнению практических задач по темам дисциплины.

#### 10. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем, представлен в Приложении 3 к рабочей программе дисциплины (модуля).

#### 11. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Материально-техническое обеспечение образовательного процесса по дисциплине (модулю) включает в себя следующие компоненты:

Помещения для самостоятельной работы обучающихся, укомплектованные специализированной мебелью (столы и стулья) и оснащенные компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду КФУ.

Учебные аудитории для контактной работы с преподавателем, укомплектованные специализированной мебелью (столы и стулья).

Компьютер и принтер для распечатки раздаточных материалов.

Мультимедийная аудитория.

Компьютерный класс.

#### 12. Средства адаптации преподавания дисциплины к потребностям обучающихся инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья

При необходимости в образовательном процессе применяются следующие методы и технологии, облегчающие восприятие информации обучающимися инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья:

- создание текстовой версии любого нетекстового контента для его возможного преобразования в альтернативные формы, удобные для различных пользователей;

- создание контента, который можно представить в различных видах без потери данных или структуры, предусмотреть возможность масштабирования текста и изображений без потери качества, предусмотреть доступность управления контентом с клавиатуры;
- создание возможностей для обучающихся воспринимать одну и ту же информацию из разных источников - например, так, чтобы лица с нарушениями слуха получали информацию визуально, с нарушениями зрения - аудиально;
- применение программных средств, обеспечивающих возможность освоения навыков и умений, формируемых дисциплиной, за счёт альтернативных способов, в том числе виртуальных лабораторий и симуляционных технологий;
- применение дистанционных образовательных технологий для передачи информации, организации различных форм интерактивной контактной работы обучающегося с преподавателем, в том числе вебинаров, которые могут быть использованы для проведения виртуальных лекций с возможностью взаимодействия всех участников дистанционного обучения, проведения семинаров, выступления с докладами и защиты выполненных работ, проведения тренингов, организации коллективной работы;
- применение дистанционных образовательных технологий для организации форм текущего и промежуточного контроля;
- увеличение продолжительности сдачи обучающимся инвалидом или лицом с ограниченными возможностями здоровья форм промежуточной аттестации по отношению к установленной продолжительности их сдачи:
- продолжительности сдачи зачёта или экзамена, проводимого в письменной форме, - не более чем на 90 минут;
- продолжительности подготовки обучающегося к ответу на зачёте или экзамене, проводимом в устной форме, - не более чем на 20 минут;
- продолжительности выступления обучающегося при защите курсовой работы - не более чем на 15 минут.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО и учебным планом по направлению 01.04.04 "Прикладная математика" и магистерской программе "Вычислительная геометрия и высокопроизводительные вычисления".



*Приложение 2*  
*к рабочей программе дисциплины (модуля)*  
*Б1.В.ДВ.01.02 Прикладной функциональный анализ*

**Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)**

Направление подготовки: 01.04.04 - Прикладная математика

Профиль подготовки: Вычислительная геометрия и высокопроизводительные вычисления

Квалификация выпускника: магистр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

Год начала обучения по образовательной программе: 2024

**Основная литература:**

1. Плещинский, Н.Б. Прикладной функциональный анализ: учебное пособие / Н.Б. Плещинский, И.Н. Плещинский. - Казань: Казанский федеральный университет, 2018. - 80 с. - Текст : электронный. - URL: [https://shelly.kpfu.ru/e-ksu/docs/F\\_297754050/afa18a.pdf](https://shelly.kpfu.ru/e-ksu/docs/F_297754050/afa18a.pdf) (дата обращения: 12.01.2024). - Режим доступа: открытый.
2. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа : учебное пособие / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. - 7-е изд. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2009. - 572 с. - ISBN 978-5-9221-0266-7. - Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/2206> (дата обращения: 12.01.2024). - Режим доступа: для авториз. пользователей.
3. Пирковский, А. Ю. Спектральная теория и функциональные исчисления для линейных операторов : учебное пособие / А. Ю. Пирковский. - Москва : МЦНМО, 2010. - 176 с. - ISBN 978-5-94057-573-3. - Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/9384> (дата обращения: 12.01.2024). - Режим доступа: для авториз. пользователей.

**Дополнительная литература:**

1. Треногин, В. А. Функциональный анализ : учебник / В. А. Треногин. - 4-е, изд. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2007. - 488 с. - ISBN 978-5-9221-0804-1. - Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/59471> (дата обращения: 12.01.2024). - Режим доступа: для авториз. пользователей.
2. Павлов, Е. А. Основы функционального анализа : учебное пособие / Е. А. Павлов. - 2-е изд., стер. - Санкт-Петербург : Лань, 2020. - 88 с. - ISBN 978-5-8114-3635-4. - Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/116362> (дата обращения: 12.01.2024). - Режим доступа: для авториз. пользователей.
3. Филимоненкова, Н. В. Конспект лекций по функциональному анализу : учебное пособие / Н. В. Филимоненкова. - Санкт-Петербург : Лань, 2022. - 176 с. - ISBN 978-5-8114-1821-3. - Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/212048> (дата обращения: 12.01.2024). - Режим доступа: для авториз. пользователей.

*Приложение 3  
к рабочей программе дисциплины (модуля)  
Б1.В.ДВ.01.02 Прикладной функциональный анализ*

**Перечень информационных технологий, используемых для освоения дисциплины (модуля), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем**

Направление подготовки: 01.04.04 - Прикладная математика

Профиль подготовки: Вычислительная геометрия и высокопроизводительные вычисления

Квалификация выпускника: магистр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

Год начала обучения по образовательной программе: 2024

Освоение дисциплины (модуля) предполагает использование следующего программного обеспечения и информационно-справочных систем:

Операционная система Microsoft Windows 7 Профессиональная или Windows XP (Volume License)

Пакет офисного программного обеспечения Microsoft Office 365 или Microsoft Office Professional plus 2010

Браузер Mozilla Firefox

Браузер Google Chrome

Adobe Reader XI или Adobe Acrobat Reader DC

Kaspersky Endpoint Security для Windows

Учебно-методическая литература для данной дисциплины имеется в наличии в электронно-библиотечной системе "ZNANIUM.COM", доступ к которой предоставлен обучающимся. ЭБС "ZNANIUM.COM" содержит произведения крупнейших российских учёных, руководителей государственных органов, преподавателей ведущих вузов страны, высококвалифицированных специалистов в различных сферах бизнеса. Фонд библиотеки сформирован с учетом всех изменений образовательных стандартов и включает учебники, учебные пособия, учебно-методические комплексы, монографии, авторефераты, диссертации, энциклопедии, словари и справочники, законодательно-нормативные документы, специальные периодические издания и издания, выпускаемые издательствами вузов. В настоящее время ЭБС ZNANIUM.COM соответствует всем требованиям федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования (ФГОС ВО) нового поколения.