

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования  
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"  
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского



УТВЕРЖДАЮ

Проректор по образовательной деятельности КФУ

Е.А. Турилова

17 февраля 2023 г.

*подписано электронно-цифровой подписью*

## Программа дисциплины

Групповой анализ дифференциальных уравнений

Направление подготовки: 01.04.01 - Математика

Профиль подготовки: Геометрия и ее приложения

Квалификация выпускника: магистр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

Год начала обучения по образовательной программе: 2023

## Содержание

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения ОПОП ВО
2. Место дисциплины (модуля) в структуре ОПОП ВО
3. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся
4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий
  - 4.1. Структура и тематический план контактной и самостоятельной работы по дисциплине (модулю)
  - 4.2. Содержание дисциплины (модуля)
5. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)
6. Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю)
7. Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)
8. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)
9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)
10. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)
11. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)
12. Средства адаптации преподавания дисциплины (модуля) к потребностям обучающихся инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья
13. Приложение №1. Фонд оценочных средств
14. Приложение №2. Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)
15. Приложение №3. Перечень информационных технологий, используемых для освоения дисциплины (модуля), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем

Программу дисциплины разработал(а)(и): доцент, к.н. Шурыгин В.В. (Кафедра геометрии, отделение математики),  
1 Vadim.Shurygin@kpfu.ru

**1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения ОПОП ВО**

Обучающийся, освоивший дисциплину (модуль), должен обладать следующими компетенциями:

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
ПК-1	Способен формулировать и решать актуальные и значимые задачи фундаментальной и прикладной математики, исследовать математические модели в естествознании, цифровой экономике и управлении
ПК-3	Способен ориентироваться в современных алгоритмах компьютерной математики, обладать способностями к эффективному применению и реализации математически сложных алгоритмов в современных программных комплексах

Обучающийся, освоивший дисциплину (модуль):

Должен знать:

основные понятия теории дифференциальных уравнений, определения и свойства математических объектов в этой области, формулировки утверждений, методы их доказательства, области применения методов группового анализа, возможные сферы их приложений

Должен уметь:

решать задачи вычислительного и теоретического характера в области дифференциальных уравнений,

Должен владеть:

математическим аппаратом дифференциальных уравнений, методами нахождения решений дифференциальных уравнений с помощью симметрий, методами группового анализа

Должен демонстрировать способность и готовность:

Ориентироваться в теории и практике группового анализа, основанных на результатах общего курса дифференциальных уравнений

**2. Место дисциплины (модуля) в структуре ОПОП ВО**

Данная дисциплина (модуль) включена в раздел "Б1.В.ДВ.06.02 Дисциплины (модули)" основной профессиональной образовательной программы 01.04.01 "Математика (Геометрия и ее приложения)" и относится к дисциплинам по выбору части ОПОП ВО, формируемой участниками образовательных отношений.

Осваивается на 1 курсе в 2 семестре.

**3. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся**

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетных(ые) единиц(ы) на 108 часа(ов).

Контактная работа - 28 часа(ов), в том числе лекции - 14 часа(ов), практические занятия - 14 часа(ов), лабораторные работы - 0 часа(ов), контроль самостоятельной работы - 0 часа(ов).

Самостоятельная работа - 44 часа(ов).

Контроль (зачёт / экзамен) - 36 часа(ов).

Форма промежуточного контроля дисциплины: экзамен во 2 семестре.

**4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий**

**4.1 Структура и тематический план контактной и самостоятельной работы по дисциплине (модулю)**

N	Разделы дисциплины / модуля	Семестр	Виды и часы контактной работы, их трудоемкость (в часах)						Самостоятельная работа
			Лекции, всего	Лекции в эл. форме	Практические занятия, всего	Практические в эл. форме	Лабораторные работы, всего	Лабораторные в эл. форме	
1.	Тема 1. Диффеоморфизмы. Векторные поля	2	1	0	1	0	0	0	4
2.	Тема 2. Однопараметрические группы преобразований.	2	2	0	2	0	0	0	4
3.	Тема 3. Инварианты группы преобразований	2	1	0	1	0	0	0	4
4.	Тема 4. Группы, допускаемые дифференциальными уравнениями	2	2	0	2	0	0	0	6
5.	Тема 5. Алгебры Ли и многопараметрические группы преобразований.	2	1	0	1	0	0	0	4
6.	Тема 6. Интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений, допускающих группу симметрий	2	2	0	2	0	0	0	6
7.	Тема 7. Понижение порядка и интегрирование дифференциальных уравнений высших порядков, допускающих группу симметрий	2	2	0	2	0	0	0	6
8.	Тема 8. Интегрирование уравнений второго порядка	2	2	0	2	0	0	0	6
9.	Тема 9. Признаки линейности уравнения второго порядка	2	1	0	1	0	0	0	4
	Итого		14	0	14	0	0	0	44

**4.2 Содержание дисциплины (модуля)**

**Тема 1. Диффеоморфизмы. Векторные поля**

Лекция:

Диффеоморфизмы открытых множеств в  $R^n$ . Замена координат на открытом множестве. Гладкие многообразия. Касательные векторы и касательное пространство. Векторные поля. Дифференцирования алгебр. Дифференцирования алгебры функций на гладком многообразии. Коммутатор дифференцирований. Тождество Якоби.

Практика:

Векторные поля. Натуральный репер. Производная функции вдоль векторного поля. Примеры. Скобка Ли векторных полей. Поток векторных полей. Касательное векторное поле к потоку. Примеры.

**Тема 2. Однопараметрические группы преобразований.**

Лекция:

Однопараметрические группы преобразований. Уравнение Ли. Теорема Ли об однозначном задании группы преобразований ее касательным векторным полем.

Практика:

Теорема о приведении закона умножения в произвольной однопараметрической группе к стандартному виду. Примеры. Задание одной и той же группы преобразований при помощи перепараметризации.

**Тема 3. Инварианты группы преобразований**

Лекция:

Инварианты группы преобразований. Критерий инварианта. Инфинитезимальный оператор группы. Инвариантные уравнения. Теорема об инвариантности системы уравнений относительно группы. Теорема о задании инвариантной поверхности с помощью инвариантов группы.

Практика:

Примеры. Теорема о приведении однопараметрической группы преобразований к переносам. Примеры инвариантного представления поверхностей

#### **Тема 4. Группы, допускаемые дифференциальными уравнениями**

Лекция:

Группы, допускаемые дифференциальными уравнениями. Дифференциальные переменные и дифференциальные функции. Дифференциальные многообразия. Группы точечных преобразований. Формулы продолжения. Определяющие уравнения. Теорема о допускаемой группе.

Практика:

Примеры групп, допускаемых дифференциальными уравнениями. Примеры групп точечных преобразований. Вычисления композиций преобразований.

#### **Тема 5. Алгебры Ли и многопараметрические группы преобразований.**

Алгебры Ли и многопараметрические группы преобразований.

Вычисление многопараметрических групп с помощью алгебр Ли инфинитезимальных симметрий. Примеры коммутативных, некоммутативных многопараметрических группы преобразований. Примеры преобразований, не образующих многопараметрическую группу. Связь с алгебрами Ли.

#### **Тема 6. Интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений, допускающих группу симметрий**

Лекция:

Интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений, допускающих группу симметрий. Интегрирующий множитель. Замена переменных с помощью симметрии.

Обыкновенные уравнения второго порядка.

Практика:

Примеры интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, допускающих группу симметрий. Инвариантные решения.

Нахождение общего вида уравнения первого порядка, допускающего данную симметрию.

#### **Тема 7. Понижение порядка и интегрирование дифференциальных уравнений высших порядков, допускающих группу симметрий**

Лекция:

Дифференциальные инварианты высших порядков и их выражение через дифференциальные инварианты нулевого и первого порядков. Теорема Ли о размерности алгебры Ли симметрий. Решение определяющего уравнения.

Практика:

Примеры вычисления инвариантов высших порядков.

Нахождение общего вида уравнения второго порядка, допускающего данную симметрию. Понижение порядка с помощью симметрии.

#### **Тема 8. Интегрирование уравнений второго порядка**

Лекция:

Интегрирование в квадратурах с помощью двумерной алгебры симметрий. Разрешимые алгебры Ли. Общая схема интегрирования уравнений второго порядка, допускающих двумерную алгебру симметрий. Классификация двумерных алгебр Ли (4 типа). Пример реализации алгоритма. Пример уравнения, не допускающего группу, но интегрируемого в квадратурах. Общая классификация уравнений второго порядка

Практика:

Разбор примеров. Пример уравнения, не допускающего группу. Пример уравнения, не допускающего группу, но интегрируемого в квадратурах. Уравнения, допускающие 3-мерную алгебру Ли.

#### **Тема 9. Признаки линеаризуемости уравнения второго порядка**

Признаки линеаризуемости уравнения второго порядка. Обыкновенные дифференциальные уравнения, обладающие фундаментальной системой решений. Теорема Ли о ФСР.

Разбор примеров. Группы на прямой и уравнение Риккати. Теоремы о линеаризации уравнений Риккати.

Инвариантные решения. Оптимальная система инвариантных решений. Нахождение оптимальной системы.

### **5. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)**

Самостоятельная работа обучающихся выполняется по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия. Самостоятельная работа подразделяется на самостоятельную работу на аудиторных занятиях и на внеаудиторную самостоятельную работу. Самостоятельная работа обучающихся включает как полностью самостоятельное освоение отдельных тем (разделов) дисциплины, так и проработку тем (разделов), осваиваемых во время аудиторной работы. Во время самостоятельной работы обучающиеся читают и конспектируют учебную, научную и справочную литературу, выполняют задания, направленные на закрепление знаний и отработку умений и навыков, готовятся к текущему и промежуточному контролю по дисциплине.

Организация самостоятельной работы обучающихся регламентируется нормативными документами, учебно-методической литературой и электронными образовательными ресурсами, включая:

Порядок организации и осуществления образовательной деятельности по образовательным программам высшего образования - программам бакалавриата, программам специалитета, программам магистратуры (утвержден приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации от 6 апреля 2021 года №245)

Письмо Министерства образования Российской Федерации №14-55-99бин/15 от 27 ноября 2002 г. "Об активизации самостоятельной работы студентов высших учебных заведений"

Устав федерального государственного автономного образовательного учреждения "Казанский (Приволжский) федеральный университет"

Правила внутреннего распорядка федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования "Казанский (Приволжский) федеральный университет"

Локальные нормативные акты Казанского (Приволжского) федерального университета

## **6. Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю)**

Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю) включает оценочные материалы, направленные на проверку освоения компетенций, в том числе знаний, умений и навыков. Фонд оценочных средств включает оценочные средства текущего контроля и оценочные средства промежуточной аттестации.

В фонде оценочных средств содержится следующая информация:

- соответствие компетенций планируемым результатам обучения по дисциплине (модулю);
- критерии оценивания сформированности компетенций;
- механизм формирования оценки по дисциплине (модулю);
- описание порядка применения и процедуры оценивания для каждого оценочного средства;
- критерии оценивания для каждого оценочного средства;
- содержание оценочных средств, включая требования, предъявляемые к действиям обучающихся, демонстрируемым результатам, задания различных типов.

Фонд оценочных средств по дисциплине находится в Приложении 1 к программе дисциплины (модулю).

## **7. Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)**

Освоение дисциплины (модуля) предполагает изучение основной и дополнительной учебной литературы. Литература может быть доступна обучающимся в одном из двух вариантов (либо в обоих из них):

- в электронном виде - через электронные библиотечные системы на основании заключенных КФУ договоров с правообладателями;

- в печатном виде - в Научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского. Обучающиеся получают учебную литературу на абонементе по читательским билетам в соответствии с правилами пользования Научной библиотекой.

Электронные издания доступны дистанционно из любой точки при введении обучающимся своего логина и пароля от личного кабинета в системе "Электронный университет". При использовании печатных изданий библиотечный фонд должен быть укомплектован ими из расчета не менее 0,5 экземпляра (для обучающихся по ФГОС 3++ - не менее 0,25 экземпляра) каждого из изданий основной литературы и не менее 0,25 экземпляра дополнительной литературы на каждого обучающегося из числа лиц, одновременно осваивающих данную дисциплину.

Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля), находится в Приложении 2 к рабочей программе дисциплины. Он подлежит обновлению при изменении условий договоров КФУ с правообладателями электронных изданий и при изменении комплектования фондов Научной библиотеки КФУ.

## **8. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

An introduction to symmetry methods in the solution of differential equations that occur in chemistry and chemical biology - <https://www.kent.ac.uk/smsas/personal/ph282/papers/IJQC05corrected.pdf>

ODEs Having Linear Symmetries - [https://www.maplesoft.com/support/help/maple/view.aspx?path=odeadvisor%2Flinear\\_sym](https://www.maplesoft.com/support/help/maple/view.aspx?path=odeadvisor%2Flinear_sym)  
 [SADE] A Maple package for the Symmetry Analysis of Differential Equations - <https://arxiv.org/abs/1004.3339>

**9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

Вид работ	Методические рекомендации
лекции	В ходе лекционных занятий следует вести конспектирование излагаемого учебного материала, учитывая используемые преподавателем электронные ресурсы, отмечая места, которые требующие дополнительной самостоятельной проработки по методическим пособиям и рекомендованным учебникам. Следует отмечать разделы, требующие дополнительного прояснения, для консультации у преподавателя. К каждой лекции необходимо повторять материал, изложенный преподавателем на предыдущих лекциях.
практические занятия	При подготовке к практическому занятию следует освежить в памяти теоретический материал, изложенный преподавателем на лекциях, относящийся к изучаемой на занятии теме. Во время практического занятия следует отмечать излагаемые преподавателем методы и приемы решения задач, а при самостоятельном решении задач из домашнего задания следует по каждой не решенной задаче подготовить вопросы к преподавателю для разбора на аудиторном занятии.
самостоятельная работа	В самостоятельной работе приветствуется изучение любой доступной литературы по смежным направлениям математики. Полезно разобрать содержание ряда классических монографий, рекомендованных для самостоятельного изучения. Рекомендовать данную литературу, сообразуясь с направлением курсовых исследований студентов.
экзамен	В ходе подготовки к экзамену освоить теоретический материал по всем темам. Для этого выучить все определения основных понятий и все основные формулы, формулировки теорем, затем понять идеи доказательств теорем и выучить эти доказательства. Повторить идеи и методы решения всех стандартных задач по всем темам. Выбрать сложные задачи и решить их.

**10. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем, представлен в Приложении 3 к рабочей программе дисциплины (модуля).

**11. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)**

Материально-техническое обеспечение образовательного процесса по дисциплине (модулю) включает в себя следующие компоненты:

Помещения для самостоятельной работы обучающихся, укомплектованные специализированной мебелью (столы и стулья) и оснащенные компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду КФУ.

Учебные аудитории для контактной работы с преподавателем, укомплектованные специализированной мебелью (столы и стулья).

Компьютер и принтер для распечатки раздаточных материалов.

Мультимедийная аудитория.

**12. Средства адаптации преподавания дисциплины к потребностям обучающихся инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья**

При необходимости в образовательном процессе применяются следующие методы и технологии, облегчающие восприятие информации обучающимися инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья:

- создание текстовой версии любого нетекстового контента для его возможного преобразования в альтернативные формы, удобные для различных пользователей;
- создание контента, который можно представить в различных видах без потери данных или структуры, предусмотреть возможность масштабирования текста и изображений без потери качества, предусмотреть доступность управления контентом с клавиатуры;

- создание возможностей для обучающихся воспринимать одну и ту же информацию из разных источников - например, так, чтобы лица с нарушениями слуха получали информацию визуально, с нарушениями зрения - аудиально;
- применение программных средств, обеспечивающих возможность освоения навыков и умений, формируемых дисциплиной, за счёт альтернативных способов, в том числе виртуальных лабораторий и симуляционных технологий;
- применение дистанционных образовательных технологий для передачи информации, организации различных форм интерактивной контактной работы обучающегося с преподавателем, в том числе вебинаров, которые могут быть использованы для проведения виртуальных лекций с возможностью взаимодействия всех участников дистанционного обучения, проведения семинаров, выступления с докладами и защиты выполненных работ, проведения тренингов, организации коллективной работы;
- применение дистанционных образовательных технологий для организации форм текущего и промежуточного контроля;
- увеличение продолжительности сдачи обучающимся инвалидом или лицом с ограниченными возможностями здоровья форм промежуточной аттестации по отношению к установленной продолжительности их сдачи:
- продолжительности сдачи зачёта или экзамена, проводимого в письменной форме, - не более чем на 90 минут;
- продолжительности подготовки обучающегося к ответу на зачёте или экзамене, проводимом в устной форме, - не более чем на 20 минут;
- продолжительности выступления обучающегося при защите курсовой работы - не более чем на 15 минут.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО и учебным планом по направлению 01.04.01 "Математика" и магистерской программе "Геометрия и ее приложения".



### Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)

Направление подготовки: 01.04.01 - Математика

Профиль подготовки: Геометрия и ее приложения

Квалификация выпускника: магистр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

Год начала обучения по образовательной программе: 2023

#### Основная литература:

1. Ибрагимов, Н. Х. Практический курс дифференциальных уравнений и математического моделирования. Классические и новые методы. Нелинейные математические модели. Симметрия и принципы инвариантности : учебник / Н. Х. Ибрагимов ; перевод с английского И. С. Емельяновой. - 2-е изд., доп. и испр. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2012. - 332 с. - ISBN 978-5-9221-1377-9. - Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/5268> (дата обращения: 11.11.2021). - Режим доступа: для авториз. пользователей.
2. Групповой анализ дифференциальных уравнений : [учебно-методическое пособие] / В. В. Шурыгин ; Казан. (Приволж.) федер. ун-т. - Казань : [Казанский (Приволжский) федеральный университет], 2010. - 55 с.
3. Ковалёв, В. А. Элементы теории поля: вариационные симметрии и геометрические инварианты : руководство / В. А. Ковалёв, Ю. Н. Радаев. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2009. - 160 с. - ISBN 978-5-9221-1177-5. - Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/2213> (дата обращения: 11.11.2021). - Режим доступа: для авториз. пользователей.

#### Дополнительная литература:

1. Бибиков, Ю. Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений : учебное пособие / Ю. Н. Бибиков. - 2-е изд., стер. - Санкт-Петербург : Лань, 2021. - 304 с. - ISBN 978-5-8114-1176-4. - Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/167875> (дата обращения: 11.11.2021). - Режим доступа: для авториз. пользователей.
2. Арнольд, В. И. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений : учебное пособие / В. И. Арнольд. - 4-е, изд. - Москва : МЦНМО, 2012. - 384 с. - ISBN 978-5-4439-2069-6. - Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/56388> (дата обращения: 11.11.2021). - Режим доступа: для авториз. пользователей.
3. Демидович, Б. П. Дифференциальные уравнения : учебное пособие для вузов / Б. П. Демидович, В. П. Моденов. - 6-е изд., стер. - Санкт-Петербург : Лань, 2022. - 280 с. - ISBN 978-5-8114-9441-5. - Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/195426> (дата обращения: 31.01.2022). - Режим доступа: для авториз. пользователей.

*Приложение 3*  
*к рабочей программе дисциплины (модуля)*  
*Б1.В.ДВ.06.02 Групповой анализ дифференциальных уравнений*

**Перечень информационных технологий, используемых для освоения дисциплины (модуля), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем**

Направление подготовки: 01.04.01 - Математика

Профиль подготовки: Геометрия и ее приложения

Квалификация выпускника: магистр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

Год начала обучения по образовательной программе: 2023

Освоение дисциплины (модуля) предполагает использование следующего программного обеспечения и информационно-справочных систем:

Операционная система Microsoft Windows 7 Профессиональная или Windows XP (Volume License)

Пакет офисного программного обеспечения Microsoft Office 365 или Microsoft Office Professional plus 2010

Браузер Mozilla Firefox

Браузер Google Chrome

Adobe Reader XI или Adobe Acrobat Reader DC

Kaspersky Endpoint Security для Windows

Учебно-методическая литература для данной дисциплины имеется в наличии в электронно-библиотечной системе Издательства "Лань", доступ к которой предоставлен обучающимся. ЭБС Издательства "Лань" включает в себя электронные версии книг издательства "Лань" и других ведущих издательств учебной литературы, а также электронные версии периодических изданий по естественным, техническим и гуманитарным наукам. ЭБС Издательства "Лань" обеспечивает доступ к научной, учебной литературе и научным периодическим изданиям по максимальному количеству профильных направлений с соблюдением всех авторских и смежных прав.