

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования  
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"  
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского



*подписано электронно-цифровой подписью*

## Программа дисциплины

Римановы поверхности

Направление подготовки: 01.04.01 - Математика

Профиль подготовки: Геометрия и ее приложения

Квалификация выпускника: магистр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

Год начала обучения по образовательной программе: 2023

## Содержание

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения ОПОП ВО
2. Место дисциплины (модуля) в структуре ОПОП ВО
3. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся
4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий
  - 4.1. Структура и тематический план контактной и самостоятельной работы по дисциплине (модулю)
  - 4.2. Содержание дисциплины (модуля)
5. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)
6. Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю)
7. Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)
8. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)
9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)
10. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)
11. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)
12. Средства адаптации преподавания дисциплины (модуля) к потребностям обучающихся инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья
13. Приложение №1. Фонд оценочных средств
14. Приложение №2. Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)
15. Приложение №3. Перечень информационных технологий, используемых для освоения дисциплины (модуля), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем

Программу дисциплины разработал(а)(и): заведующий кафедрой, д.н. (профессор) Насыров С.Р. (Кафедра математического анализа, отделение математики), Samyon.Nasyrov@kpfu.ru

**1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения ОПОП ВО**

Обучающийся, освоивший дисциплину (модуль), должен обладать следующими компетенциями:

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
ПК-1	Способен формулировать и решать актуальные и значимые задачи фундаментальной и прикладной математики, исследовать математические модели в естествознании, цифровой экономике и управлении

Обучающийся, освоивший дисциплину (модуль):

Должен знать:

основные факты теории римановых поверхностей и их конформных отображений.

Должен уметь:

вводить комплексную структуру на гладких поверхностях, определять голоморфность функции, отображающей одну риманову поверхность на другую.

Должен владеть:

методами теории поверхностей и использовать их на практике.

Должен демонстрировать способность и готовность:

1. Владеть основными идеями и методами теории римановых поверхностей.
2. Знать основные понятия и результаты теории (абстрактная риманова поверхность, разветвленное накрытие, аналитические функции и дифференциалы, униформизация).
3. Уметь строить разветвленные накрытия плоской области на сфере Римана, соответствующие заданной подгруппе фундаментальной группы, вычислять топологические характеристики компактных римановых поверхностей - разветвленных накрытий, применять методы теории римановых поверхностей к исследованию аналитических функций.

**2. Место дисциплины (модуля) в структуре ОПОП ВО**

Данная дисциплина (модуль) включена в раздел "Б1.В.ДВ.01.01 Дисциплины (модули)" основной профессиональной образовательной программы 01.04.01 "Математика (Геометрия и ее приложения)" и относится к дисциплинам по выбору части ОПОП ВО, формируемой участниками образовательных отношений.

Осваивается на 1 курсе в 1 семестре.

**3. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся**

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетных(ые) единиц(ы) на 108 часа(ов).

Контактная работа - 34 часа(ов), в том числе лекции - 12 часа(ов), практические занятия - 22 часа(ов), лабораторные работы - 0 часа(ов), контроль самостоятельной работы - 0 часа(ов).

Самостоятельная работа - 47 часа(ов).

Контроль (зачёт / экзамен) - 27 часа(ов).

Форма промежуточного контроля дисциплины: экзамен в 1 семестре.

**4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий**

**4.1 Структура и тематический план контактной и самостоятельной работы по дисциплине (модулю)**

N	Разделы дисциплины / модуля	Се- местр	Виды и часы контактной работы, их трудоемкость (в часах)						Само- стоя- тель- ная ра- бота
			Лекции, всего	Лекции в эл. форме	Практи- ческие занятия, всего	Практи- ческие в эл. форме	Лабора- торные работы, всего	Лабора- торные в эл. форме	
1.	Тема 1. Абстрактные римановы поверхности и голоморфные отображения	1	2	0	4	0	0	0	9
2.	Тема 2. Фундаментальные группы	1	2	0	4	0	0	0	10
3.	Тема 3. Разветвленные и неразветвленные накрытия.	1	4	0	6	0	0	0	10
4.	Тема 4. Накрытия Галуа. Преобразования наложения.	1	2	0	4	0	0	0	10
5.	Тема 5. Классификация римановых поверхностей. Униформизация.	1	2	0	4	0	0	0	8
	Итого		12	0	22	0	0	0	47

**4.2 Содержание дисциплины (модуля)**

**Тема 1. Абстрактные римановы поверхности и голоморфные отображения**

Примеры римановых поверхностей. Определение поверхности, гладкой поверхности и римановой поверхности. Примеры абстрактных римановых поверхностей. Тор как римано-ва поверхность. Голоморфные функции на римановой поверхности. Теорема Римана об устранимой особенности. Аналитические отображения одной римановой поверхности в другую. Теорема единственности. Мероморфные функции на римановой поверхности. Локальное представление голоморфной функции на римановой поверхности. Открытость непостоянных аналитических отображений римановых поверхностей и ее следствия.

**Тема 2. Фундаментальные группы**

Фундаментальные группы. Определение и основные свойства. Индуцированный гомоморфизм. Примеры односвязных пространств. Фундаментальная группа окружности. Фундаментальная группа букета окружностей. Деформационные ретракты и их фундаментальные группы. Фундаментальная группа многосвязной области на плоскости. Фундаментальная группа проколотых тора, бутылки Клейна и проективной плоскости. Фундаментальная группа тора, бутылки Клейна и проективной плоскости. Фундаментальная группа сферы с ручками.

**Тема 3. Разветвленные и неразветвленные накрытия.**

Накрытия. Неразветвленные накрытия. Неразветвленные накрытия римановых поверхностей. Теорема о единственности поднятия отображения на неразветвленное накрытие. Теорема о накрывающей гомотопии (формулировка). Безграничные неразветвленные накрытия и свойство поднятия кривых. Существование поднятия отображения на неразветвленное безграничное накрытие. Универсальное накрытие. Теорема о существовании универсального накрытия. Классификация римановых поверхностей.

**Тема 4. Накрытия Галуа. Преобразования наложения.**

Накрытия Галуа и их свойства. Группа преобразований наложения универсального накрытия. Группа преобразований наложения накрытия и ее связь с фундаментальной группой. Соответствие между накрытиями и полными классами сопряженных подгрупп. Накрытия Галуа и нормальные подгруппы фундаментальной группы.

**Тема 5. Классификация римановых поверхностей. Униформизация.**

Униформизация римановых поверхностей. Фактор-поверхность римановой поверхности. Изоморфность накрытий римановой поверхности, соответствующей одно и той же группе. Эллиптические и параболические римановы поверхности. Римановы поверхности гиперболического типа. Фундаментальный многоугольник и его свойства.

**5. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)**

Самостоятельная работа обучающихся выполняется по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия. Самостоятельная работа подразделяется на самостоятельную работу на аудиторных занятиях и на внеаудиторную самостоятельную работу. Самостоятельная работа обучающихся включает как полностью самостоятельное освоение отдельных тем (разделов) дисциплины, так и проработку тем (разделов), осваиваемых во время аудиторной работы. Во время самостоятельной работы обучающиеся читают и конспектируют учебную, научную и справочную литературу, выполняют задания, направленные на закрепление знаний и отработку умений и навыков, готовятся к текущему и промежуточному контролю по дисциплине.

Организация самостоятельной работы обучающихся регламентируется нормативными документами, учебно-методической литературой и электронными образовательными ресурсами, включая:

Порядок организации и осуществления образовательной деятельности по образовательным программам высшего образования - программам бакалавриата, программам специалитета, программам магистратуры (утвержден приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации от 6 апреля 2021 года №245)

Письмо Министерства образования Российской Федерации №14-55-99бин/15 от 27 ноября 2002 г. "Об активизации самостоятельной работы студентов высших учебных заведений"

Устав федерального государственного автономного образовательного учреждения "Казанский (Приволжский) федеральный университет"

Правила внутреннего распорядка федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования "Казанский (Приволжский) федеральный университет"

Локальные нормативные акты Казанского (Приволжского) федерального университета

## **6. Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю)**

Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю) включает оценочные материалы, направленные на проверку освоения компетенций, в том числе знаний, умений и навыков. Фонд оценочных средств включает оценочные средства текущего контроля и оценочные средства промежуточной аттестации.

В фонде оценочных средств содержится следующая информация:

- соответствие компетенций планируемым результатам обучения по дисциплине (модулю);
- критерии оценивания сформированности компетенций;
- механизм формирования оценки по дисциплине (модулю);
- описание порядка применения и процедуры оценивания для каждого оценочного средства;
- критерии оценивания для каждого оценочного средства;
- содержание оценочных средств, включая требования, предъявляемые к действиям обучающихся, демонстрируемым результатам, задания различных типов.

Фонд оценочных средств по дисциплине находится в Приложении 1 к программе дисциплины (модулю).

## **7. Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)**

Освоение дисциплины (модуля) предполагает изучение основной и дополнительной учебной литературы. Литература может быть доступна обучающимся в одном из двух вариантов (либо в обоих из них):

- в электронном виде - через электронные библиотечные системы на основании заключенных КФУ договоров с правообладателями;

- в печатном виде - в Научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского. Обучающиеся получают учебную литературу на абонементе по читательским билетам в соответствии с правилами пользования Научной библиотекой.

Электронные издания доступны дистанционно из любой точки при введении обучающимся своего логина и пароля от личного кабинета в системе "Электронный университет". При использовании печатных изданий библиотечный фонд должен быть укомплектован ими из расчета не менее 0,5 экземпляра (для обучающихся по ФГОС 3++ - не менее 0,25 экземпляра) каждого из изданий основной литературы и не менее 0,25 экземпляра дополнительной литературы на каждого обучающегося из числа лиц, одновременно осваивающих данную дисциплину.

Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля), находится в Приложении 2 к рабочей программе дисциплины. Он подлежит обновлению при изменении условий договоров КФУ с правообладателями электронных изданий и при изменении комплектования фондов Научной библиотеки КФУ.

## **8. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

Белошапка В.К. Курс лекций по комплексному анализу. Москва. 2005 -  
<http://dmvn.mexmat.net/content/ccalculus/complexcalculus-6s-beloshapka.pdf>

мцнмо - <http://www.mccme.ru/free-books/>

Прасолов В.В., Задачи по топологии, Московский центр непрерывного математического образования, 2014 - <https://e.lanbook.com/reader/book/80151/#1>

### 9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Вид работ	Методические рекомендации
лекции	Перед занятием студенты должны повторить материал предыдущих лекций, освежить в памяти основные понятия, прочитать соответствующий в учебниках и учебных пособиях. Особое внимание стоит уделить определениям, теоремам и прочим утверждениям, которые нужно хорошо осознать и уверенно ими оперировать. При необходимости можно также решать задачи и упражнения.
практические занятия	Студенты перед занятием должны повторить теоретический материал по своим конспектам лекций, учебникам и учебным пособиям. Следует выполнить домашнее задание и, в случае необходимости, решать дополнительные задачи. При возникновении затруднений следует обратиться к преподавателю с просьбой объяснить непонятные места.
самостоятельная работа	При самостоятельной работе следует использовать все имеющиеся средства: конспекты лекций, материалы практических занятий, учебники и учебные пособия, материалы, находящиеся в сети Интернет. Особое внимание следует уделять творческому освоению курса, способности решать самостоятельно практические задания, а также доказывать простые факты и теоремы.
экзамен	На зачете студенту следует повторить все основные понятия курса, просмотреть решения всех задач, практических заданий. Основное внимание следует уделять определениям, формулировкам основных теорем и утверждений. Нелюбо также повторить основные темы по курсу математического анализа, чтобы уверенно оперировать основными понятиями дифференциального и интегрального исчисления.

### 10. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем, представлен в Приложении 3 к рабочей программе дисциплины (модуля).

### 11. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Материально-техническое обеспечение образовательного процесса по дисциплине (модулю) включает в себя следующие компоненты:

Помещения для самостоятельной работы обучающихся, укомплектованные специализированной мебелью (столы и стулья) и оснащенные компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду КФУ.

Учебные аудитории для контактной работы с преподавателем, укомплектованные специализированной мебелью (столы и стулья).

Компьютер и принтер для распечатки раздаточных материалов.

Мультимедийная аудитория.

### 12. Средства адаптации преподавания дисциплины к потребностям обучающихся инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья

При необходимости в образовательном процессе применяются следующие методы и технологии, облегчающие восприятие информации обучающимися инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья:

- создание текстовой версии любого нетекстового контента для его возможного преобразования в альтернативные формы, удобные для различных пользователей;
- создание контента, который можно представить в различных видах без потери данных или структуры, предусмотреть возможность масштабирования текста и изображений без потери качества, предусмотреть доступность управления контентом с клавиатуры;
- создание возможностей для обучающихся воспринимать одну и ту же информацию из разных источников - например, так, чтобы лица с нарушениями слуха получали информацию визуально, с нарушениями зрения - аудиально;

- применение программных средств, обеспечивающих возможность освоения навыков и умений, формируемых дисциплиной, за счёт альтернативных способов, в том числе виртуальных лабораторий и симуляционных технологий;
- применение дистанционных образовательных технологий для передачи информации, организации различных форм интерактивной контактной работы обучающегося с преподавателем, в том числе вебинаров, которые могут быть использованы для проведения виртуальных лекций с возможностью взаимодействия всех участников дистанционного обучения, проведения семинаров, выступления с докладами и защиты выполненных работ, проведения тренингов, организации коллективной работы;
- применение дистанционных образовательных технологий для организации форм текущего и промежуточного контроля;
- увеличение продолжительности сдачи обучающимся инвалидом или лицом с ограниченными возможностями здоровья форм промежуточной аттестации по отношению к установленной продолжительности их сдачи:
- продолжительности сдачи зачёта или экзамена, проводимого в письменной форме, - не более чем на 90 минут;
- продолжительности подготовки обучающегося к ответу на зачёте или экзамене, проводимом в устной форме, - не более чем на 20 минут;
- продолжительности выступления обучающегося при защите курсовой работы - не более чем на 15 минут.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО и учебным планом по направлению 01.04.01 "Математика" и магистерской программе "Геометрия и ее приложения".



### Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)

Направление подготовки: 01.04.01 - Математика

Профиль подготовки: Геометрия и ее приложения

Квалификация выпускника: магистр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

Год начала обучения по образовательной программе: 2023

#### Основная литература:

1. Свешников, А. Г. Теория функций комплексной переменной : учебник / А. Г. Свешников, А. Н. Тихонов ; под редакцией В. А. Ильина. - 6-е изд. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2010. - 336 с. - ISBN 978-5-9221-0133-2. - Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/48167> (дата обращения: 03.03.2022). - Режим доступа: для авториз. пользователей.
2. Половинкин, Е. С. Теория функций комплексного переменного : учебник / Е.С. Половинкин. - 2-е изд., перераб. и доп. - Москва : ИНФРА-М, 2022. - 253 с. - (Высшее образование: Бакалавриат). - DOI 10.12737/1845987. - ISBN 978-5-16-017359-7. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/1845987> (дата обращения: 03.03.2022). - Режим доступа: по подписке.
3. Шабунин, М. И. Теория функций комплексного переменного : учебное пособие / М. И. Шабунин, Ю. В. Сидоров. - 5-е изд. - Москва : Лаборатория знаний, 2020. - 303 с. - ISBN 978-5-00101-916-9. - Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/151505> (дата обращения: 03.03.2022). - Режим доступа: для авториз. пользователей.
4. Коган, Е. А. Теория функций комплексной переменной и операционное исчисление : учебное пособие / Е.А. Коган, Г.С. Жукова. - Москва : ИНФРА-М, 2020. - 180 с. - (Высшее образование: Бакалавриат). - DOI 10.12737/1058889. - ISBN 978-5-16-015816-7. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/1058889> (дата обращения: 03.03.2022). - Режим доступа: по подписке.

#### Дополнительная литература:

1. Евграфов, М. А. Аналитические функции : учебное пособие / М. А. Евграфов. - 4-е изд. - Санкт-Петербург : Лань, 2022. - 448 с. - ISBN 978-5-8114-0809-2. - Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/210101> (дата обращения: 03.03.2022). - Режим доступа: для авториз. пользователей.
2. Львовский, С. М. Лекции по комплексному анализу : учебное пособие / С. М. Львовский. - 2-е изд., стер. - Москва : МЦНМО, 2009. - 136 с. - ISBN 978-5-94057-577-1. - Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/9365> (дата обращения: 03.03.2022). - Режим доступа: для авториз. пользователей.
3. Сборник задач по теории функций комплексного переменного и операционному исчислению: учебное пособие для студентов мех.-мат., физ. фак., фак. ВМК ун-та и фак-та повышения квалификации преподавателей / Л. А. Аксентьев. - Казань: Казанский государственный университет, 2005. - 124 с. - Текст : электронный. - URL: [http://dspace.kpfu.ru/xmlui/bitstream/handle/net/116254/zadachnik\\_tfk.pdf;jsessionid=B2B8FAEEACBDD2AD3E6431852D5E0CF6?se](http://dspace.kpfu.ru/xmlui/bitstream/handle/net/116254/zadachnik_tfk.pdf;jsessionid=B2B8FAEEACBDD2AD3E6431852D5E0CF6?se) (дата обращения: 03.03.2022). Режим доступа: открытый.
4. Зверович Э.И., Вещественный и комплексный анализ. В 6 ч. Ч. 2. Интегральное исчисление функций скалярного аргумента. Ч. 3. Дифференциальное исчисление : учебное пособие/ Э.И. Зверович - Минск : Выш. шк., 2008. - 306 с. - ISBN 978-985-06-1305-9 - Текст : электронный // ЭБС 'Консультант студента' : [сайт]. - URL : <https://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9789850613059.html> (дата обращения: 03.03.2022). - Режим доступа : по подписке.



**Перечень информационных технологий, используемых для освоения дисциплины (модуля), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем**

Направление подготовки: 01.04.01 - Математика

Профиль подготовки: Геометрия и ее приложения

Квалификация выпускника: магистр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

Год начала обучения по образовательной программе: 2023

Освоение дисциплины (модуля) предполагает использование следующего программного обеспечения и информационно-справочных систем:

Операционная система Microsoft Windows 7 Профессиональная или Windows XP (Volume License)

Пакет офисного программного обеспечения Microsoft Office 365 или Microsoft Office Professional plus 2010

Браузер Mozilla Firefox

Браузер Google Chrome

Adobe Reader XI или Adobe Acrobat Reader DC

Kaspersky Endpoint Security для Windows

Учебно-методическая литература для данной дисциплины имеется в наличии в электронно-библиотечной системе Издательства "Лань", доступ к которой предоставлен обучающимся. ЭБС Издательства "Лань" включает в себя электронные версии книг издательства "Лань" и других ведущих издательств учебной литературы, а также электронные версии периодических изданий по естественным, техническим и гуманитарным наукам. ЭБС Издательства "Лань" обеспечивает доступ к научной, учебной литературе и научным периодическим изданиям по максимальному количеству профильных направлений с соблюдением всех авторских и смежных прав.