

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования  
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"  
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского



*подписано электронно-цифровой подписью*

## Программа дисциплины

Решение уравнений в целых числах

Направление подготовки: 44.03.05 - Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)

Профиль подготовки: Математика, информатика и информационные технологии

Квалификация выпускника: бакалавр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

Год начала обучения по образовательной программе: 2022

## Содержание

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения ОПОП ВО
2. Место дисциплины (модуля) в структуре ОПОП ВО
3. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся
4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий
  - 4.1. Структура и тематический план контактной и самостоятельной работы по дисциплине (модулю)
  - 4.2. Содержание дисциплины (модуля)
5. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)
6. Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю)
7. Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)
8. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)
9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)
10. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)
11. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)
12. Средства адаптации преподавания дисциплины (модуля) к потребностям обучающихся инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья
13. Приложение №1. Фонд оценочных средств
14. Приложение №2. Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)
15. Приложение №3. Перечень информационных технологий, используемых для освоения дисциплины (модуля), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем

Программу дисциплины разработал(а)(и): доцент, к.н. Фалилеева М.В. (Кафедра теории и технологий преподавания математики и информатики, отделение педагогического образования), Marina.Falileeva@kpfu.ru

### 1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения ОПОП ВО

Обучающийся, освоивший дисциплину (модуль), должен обладать следующими компетенциями:

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
ПК-2	Способен обеспечивать содержание математического образования в средних общеобразовательных учреждениях

Обучающийся, освоивший дисциплину (модуль):

Должен знать:

категории школьных задач на делимость, в частности, известные математические понятия, теоремы и методы, связанные с решением уравнений в целых числах, школьной и олимпиадной математике

Должен уметь:

решать известные школьные задачи на делимость, в частности, доказательства известных теорем школьной и олимпиадной математики

Должен владеть:

методами и приемами решения любых школьных, олимпиадных задач на делимость, в частности, в частности анализирует условие задачи, выдвигает гипотезы решения, аргументировано выстраивает решение задачи

### 2. Место дисциплины (модуля) в структуре ОПОП ВО

Данная дисциплина (модуль) включена в раздел "Б1.В.ДВ.01.02 Дисциплины (модули)" основной профессиональной образовательной программы 44.03.05 "Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки) (Математика, информатика и информационные технологии)" и относится к дисциплинам по выбору части ОПОП ВО, формируемой участниками образовательных отношений.

Осваивается на 5 курсе в 9 семестре.

### 3. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся

Общая трудоемкость дисциплины составляет 2 зачетных(ые) единиц(ы) на 72 часа(ов).

Контактная работа - 55 часа(ов), в том числе лекции - 18 часа(ов), практические занятия - 36 часа(ов), лабораторные работы - 0 часа(ов), контроль самостоятельной работы - 1 часа(ов).

Самостоятельная работа - 8 часа(ов).

Контроль (зачёт / экзамен) - 9 часа(ов).

Форма промежуточного контроля дисциплины: экзамен в 9 семестре.

### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

#### 4.1 Структура и тематический план контактной и самостоятельной работы по дисциплине (модулю)

N	Разделы дисциплины / модуля	Се-местр	Виды и часы контактной работы, их трудоемкость (в часах)						Само-стоя-тельная ра-бота
			Лекции, всего	Лекции в эл. форме	Практи-ческие занятия, всего	Практи-ческие в эл. форме	Лабора-торные работы, всего	Лабора-торные в эл. форме	
1.	Тема 1. Основные арифметические функции и их свойства.	9	2	0	6	0	0	0	2

N	Разделы дисциплины / модуля	Се- местр	Виды и часы контактной работы, их трудоемкость (в часах)						Само- стоя- тель- ная ра- бота
			Лекции, всего	Лекции в эл. форме	Практи- ческие занятия, всего	Практи- ческие в эл. форме	Лабора- торные работы, всего	Лабора- торные в эл. форме	
2.	Тема 2. Числовые тождества, связанные с арифметическими функциями	9	2	0	6	0	0	0	1
3.	Тема 3. Решение линейных диофантовых уравнений.	9	4	0	6	0	0	0	1
4.	Тема 4. Решение уравнений 2-й степени в целых числах методом разложения на множители.	9	4	0	6	0	0	0	1
5.	Тема 5. Решение уравнений 2-й степени различными методами. Метод оценки. Использование свойств точных квадратов и точных кубов.	9	4	0	4	0	0	0	1
6.	Тема 6. Отдельные методы решения уравнений в целых числах.	9	2	0	8	0	0	0	2
	Итого		18	0	36	0	0	0	8

#### 4.2 Содержание дисциплины (модуля)

##### Тема 1. Основные арифметические функции и их свойства.

Целая часть числа и ее свойства. Решение задач с помощью целой части. Количество натуральных делителей. Подсчет количества делителей с заданными свойствами. Сумма натуральных делителей. Совершенные числа. Теоремы Евклида и Эйлера о совершенных числах. Решение задач на подсчет количества целых решений уравнения.

##### Тема 2. Числовые тождества, связанные с арифметическими функциями

Решение задач на подсчет целочисленных точек. Доказательство числовых тождеств, связанных с подсчетом целочисленных точек с помощью числовых функций. Точки с натуральными координатами. Подсчёт количество точек с натуральными координатами двумя способами. Связь суммы целых частей с количествами натуральных делителей.

##### Тема 3. Решение линейных диофантовых уравнений.

Основные методы решений линейных уравнений в целых числах: метод выделения целой части, сведение к решению числовых сравнений с одной неизвестной, метод конечных цепных дробей, метод Эйлера, метод перебора полной системы вычетов, сведение к системе сравнений первой степени (разложение модуля сравнения на простые множители).

##### Тема 4. Решение уравнений 2-й степени в целых числах методом разложения на множители.

Преобразование уравнений 2-й степени специального вида к произведению линейных множителей. Условие конечности числа решений уравнения 2-й степени специального вида. Системы линейных уравнений и сравнений. Китайская теорема об остатках. Решение системы линейных сравнений с помощью линейных преобразований.

##### Тема 5. Решение уравнений 2-й степени различными методами. Метод оценки. Использование свойств точных квадратов и точных кубов.

Специальные методы решений уравнений 2-й степени в целых числах. Метод оценки. Выделение точных квадратов и кубов при решении уравнений в целых числах. Применение свойств точных квадратов и кубов для доказательства отсутствия решений уравнения в целых числах. Двучленные сравнения по простому и составному модулю. Квадратные корни из единицы.

##### Тема 6. Отдельные методы решения уравнений в целых числах.

Специальные методы решений уравнений 2-й степени в целых числах. Преобразований квадратичных уравнений к виду уравнения Ферма-Пелля. Представление чисел квадратичными формами. Представление натуральных чисел положительно определенными квадратичными формами. Решение квадратичных уравнений с помощью конечных цепных дробей.

#### 5. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)

Самостоятельная работа обучающихся выполняется по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия. Самостоятельная работа подразделяется на самостоятельную работу на аудиторных занятиях и на внеаудиторную самостоятельную работу. Самостоятельная работа обучающихся включает как полностью самостоятельное освоение отдельных тем (разделов) дисциплины, так и проработку тем (разделов), осваиваемых во время аудиторной работы. Во время самостоятельной работы обучающиеся читают и конспектируют учебную, научную и справочную литературу, выполняют задания, направленные на закрепление знаний и отработку умений и навыков, готовятся к текущему и промежуточному контролю по дисциплине.

Организация самостоятельной работы обучающихся регламентируется нормативными документами, учебно-методической литературой и электронными образовательными ресурсами, включая:

Порядок организации и осуществления образовательной деятельности по образовательным программам высшего образования - программам бакалавриата, программам специалитета, программам магистратуры (утвержден приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации от 6 апреля 2021 года №245)

Письмо Министерства образования Российской Федерации №14-55-99бин/15 от 27 ноября 2002 г. "Об активизации самостоятельной работы студентов высших учебных заведений"

Устав федерального государственного автономного образовательного учреждения "Казанский (Приволжский) федеральный университет"

Правила внутреннего распорядка федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования "Казанский (Приволжский) федеральный университет"

Локальные нормативные акты Казанского (Приволжского) федерального университета

## **6. Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю)**

Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю) включает оценочные материалы, направленные на проверку освоения компетенций, в том числе знаний, умений и навыков. Фонд оценочных средств включает оценочные средства текущего контроля и оценочные средства промежуточной аттестации.

В фонде оценочных средств содержится следующая информация:

- соответствие компетенций планируемым результатам обучения по дисциплине (модулю);
- критерии оценивания сформированности компетенций;
- механизм формирования оценки по дисциплине (модулю);
- описание порядка применения и процедуры оценивания для каждого оценочного средства;
- критерии оценивания для каждого оценочного средства;
- содержание оценочных средств, включая требования, предъявляемые к действиям обучающихся, демонстрируемым результатам, задания различных типов.

Фонд оценочных средств по дисциплине находится в Приложении 1 к программе дисциплины (модулю).

## **7. Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)**

Освоение дисциплины (модуля) предполагает изучение основной и дополнительной учебной литературы. Литература может быть доступна обучающимся в одном из двух вариантов (либо в обоих из них):

- в электронном виде - через электронные библиотечные системы на основании заключенных КФУ договоров с правообладателями;

- в печатном виде - в Научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского. Обучающиеся получают учебную литературу на абонементе по читательским билетам в соответствии с правилами пользования Научной библиотекой.

Электронные издания доступны дистанционно из любой точки при введении обучающимся своего логина и пароля от личного кабинета в системе "Электронный университет". При использовании печатных изданий библиотечный фонд должен быть укомплектован ими из расчета не менее 0,5 экземпляра (для обучающихся по ФГОС 3++ - не менее 0,25 экземпляра) каждого из изданий основной литературы и не менее 0,25 экземпляра дополнительной литературы на каждого обучающегося из числа лиц, одновременно осваивающих данную дисциплину.

Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля), находится в Приложении 2 к рабочей программе дисциплины. Он подлежит обновлению при изменении условий договоров КФУ с правообладателями электронных изданий и при изменении комплектования фондов Научной библиотеки КФУ.

## **8. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

Math.ru - <http://math.ru/lib/>

Задачи.Problems.ru - <http://www.problems.ru>

Интернет-библиотека В.Арнольда. МЦНМО - <http://ilib.mccme.ru>

### 9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Вид работ	Методические рекомендации
лекции	Приступая к изучению новой учебной дисциплины, необходимо ознакомиться с учебной программой, учебной, научной и методической литературой, завести новую тетрадь для выполнения практических заданий. Обращать внимание на категории, формулировки, раскрывающие содержание тех или иных явлений и процессов, научные выводы и практические рекомендации. Желательно оставить в рабочих конспектах поля, на которых делать пометки из рекомендованной литературы. Задавать преподавателю уточняющие вопросы с целью уяснения изучения нового материала, разрешения спорных ситуаций.
практические занятия	В ходе подготовки к практическим занятиям изучить литературу по вопросам, вызвавшим наибольшие затруднения на лекционных занятиях, при этом учесть рекомендации преподавателя и требования учебной программы. Выполнять учебные занятия, выдаваемые преподавателем. Подготовку к практическим занятиям осуществлять в соответствии с рекомендациями, изложенными в методических разработках.
самостоятельная работа	Самостоятельная работа включает в себя самостоятельное решение задач по каждой теме и устное представление решений задач на практических занятиях в аудитории. В соответствии с каждой темой обучаемым предлагается перечень задач и теорем для самостоятельного решения с дальнейшим его обсуждением. При решении задач следует придерживаться рекомендаций преподавателя.
экзамен	При подготовке к экзамену повторять пройденный материал в строгом соответствии с учебной программой, примерным перечнем учебных вопросов. Использовать материалы, обсуждаемые на занятиях, литературу, рекомендованную преподавателем. Обратит особое внимание на темы учебных занятий, пропущенных студентом по разным причинам. При необходимости обратиться за консультацией и методической помощью к преподавателю.

### 10. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем, представлен в Приложении 3 к рабочей программе дисциплины (модуля).

### 11. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Материально-техническое обеспечение образовательного процесса по дисциплине (модулю) включает в себя следующие компоненты:

Помещения для самостоятельной работы обучающихся, укомплектованные специализированной мебелью (столы и стулья) и оснащенные компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду КФУ.

Учебные аудитории для контактной работы с преподавателем, укомплектованные специализированной мебелью (столы и стулья).

Компьютер и принтер для распечатки раздаточных материалов.

Мультимедийная аудитория.

### 12. Средства адаптации преподавания дисциплины к потребностям обучающихся инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья

При необходимости в образовательном процессе применяются следующие методы и технологии, облегчающие восприятие информации обучающимися инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья:

- создание текстовой версии любого нетекстового контента для его возможного преобразования в альтернативные формы, удобные для различных пользователей;
- создание контента, который можно представить в различных видах без потери данных или структуры, предусмотреть возможность масштабирования текста и изображений без потери качества, предусмотреть доступность управления контентом с клавиатуры;
- создание возможностей для обучающихся воспринимать одну и ту же информацию из разных источников - например, так, чтобы лица с нарушениями слуха получали информацию визуально, с нарушениями зрения - аудиально;

- применение программных средств, обеспечивающих возможность освоения навыков и умений, формируемых дисциплиной, за счёт альтернативных способов, в том числе виртуальных лабораторий и симуляционных технологий;
- применение дистанционных образовательных технологий для передачи информации, организации различных форм интерактивной контактной работы обучающегося с преподавателем, в том числе вебинаров, которые могут быть использованы для проведения виртуальных лекций с возможностью взаимодействия всех участников дистанционного обучения, проведения семинаров, выступления с докладами и защиты выполненных работ, проведения тренингов, организации коллективной работы;
- применение дистанционных образовательных технологий для организации форм текущего и промежуточного контроля;
- увеличение продолжительности сдачи обучающимся инвалидом или лицом с ограниченными возможностями здоровья форм промежуточной аттестации по отношению к установленной продолжительности их сдачи:
- продолжительности сдачи зачёта или экзамена, проводимого в письменной форме, - не более чем на 90 минут;
- продолжительности подготовки обучающегося к ответу на зачёте или экзамене, проводимом в устной форме, - не более чем на 20 минут;
- продолжительности выступления обучающегося при защите курсовой работы - не более чем на 15 минут.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО и учебным планом по направлению 44.03.05 "Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)" и профилю подготовки "Математика, информатика и информационные технологии".

Приложение 2  
к рабочей программе дисциплины (модуля)  
Б1.В.ДВ.01.02 Решение уравнений в целых числах

**Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)**

Направление подготовки: 44.03.05 - Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)

Профиль подготовки: Математика, информатика и информационные технологии

Квалификация выпускника: бакалавр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

Год начала обучения по образовательной программе: 2022

**Основная литература:**

1. Золотарёва, Н. Д. Алгебра. Углубленный курс с решениями и указаниями : учебно-методическое пособие / Н. Д. Золотарёва, Ю. А. Попов, В. В. Сазонов ; под редакцией М. В. Федотова. - 6-е изд. - Москва: Лаборатория знаний, 2021. - 549 с. - ISBN 978-5-93208-501-1. - Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/166724> (дата обращения: 25.08.2021). - Режим доступа: для авториз. пользователей.
2. Кузнецов, М. И. Задачи по теории чисел: учебно-методическое пособие / М. И. Кузнецов, О. В. Любимцев. - Нижний Новгород: ННГУ им. Н. И. Лобачевского, 2019. - 50 с. - Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/144992> (дата обращения: 25.08.2021). - Режим доступа: для авториз. пользователей.
3. Осипова, Л. А. Теория чисел: учебно-методическое пособие / Л. А. Осипова. - Новокузнецк: НФИ КемГУ, 2019. - 107 с. - ISBN 978-5-8353-2457-6. - Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/169533> (дата обращения: 25.08.2021). - Режим доступа: для авториз. пользователей.
4. Сикорская, Г. А. Алгебра и теория чисел : учебное пособие / Г. А. Сикорская. - Оренбург: ОГУ, 2017. - 303 с. - ISBN 978-5-7410-1975-8. - Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/110642> (дата обращения: 24.07.2023). - Режим доступа: для авториз. пользователей.

**Дополнительная литература:**

1. Алфутова, Н. Б. Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ: учебное пособие / Н. Б. Алфутова, А. В. Устинов. - 3-е изд. доп. и испр. - Москва: МЦНМО, 2009. - 336 с. - ISBN 978-5-94057-550-4. - Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/9279> (дата обращения: 25.08.2021). - Режим доступа: для авториз. пользователей.
2. Шклярский, Д. О. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Арифметика и алгебра: учебное пособие / Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом. - 6-е изд. - Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2001. - 480 с. - ISBN 5-9221-0106-4. - Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/59283> (дата обращения: 25.08.2021). - Режим доступа: для авториз. пользователей.
3. Ермолаева, Н. Н. Практические занятия по алгебре. Элементы теории множеств, теории чисел, комбинаторики. Алгебраические структуры: учебное пособие / Н. Н. Ермолаева, В. А. Козыньченко, Г. И. Курбагова; под редакцией Г. И. Курбаговой. - Санкт-Петербург: Лань, 2014. - 112 с. - ISBN 978-5-8114-1657-8. - Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/49469> (дата обращения: 25.08.2021). - Режим доступа: для авториз. пользователей.
4. Иванов, О. А. Элементарная математика для школьников, студентов и преподавателей: учебное пособие / О. А. Иванов. - Москва: МЦНМО, 2009. - 384 с. - ISBN 978-5-94057-505-4. - Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/9347> (дата обращения: 25.08.2021). - Режим доступа: для авториз. пользователей.
5. Сгибнев, А. И. Делимость и простые числа / А. И. Сгибнев. - 3-е изд., испр. - Москва: МЦНМО, 2015. - 112 с. - ISBN 978-5-4439-0340-8. - Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/71820> (дата обращения: 25.08.2021). - Режим доступа: для авториз. пользователей.



*Приложение 3  
к рабочей программе дисциплины (модуля)  
Б1.В.ДВ.01.02 Решение уравнений в целых числах*

**Перечень информационных технологий, используемых для освоения дисциплины (модуля), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем**

Направление подготовки: 44.03.05 - Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)

Профиль подготовки: Математика, информатика и информационные технологии

Квалификация выпускника: бакалавр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

Год начала обучения по образовательной программе: 2022

Освоение дисциплины (модуля) предполагает использование следующего программного обеспечения и информационно-справочных систем:

Операционная система Microsoft Windows 7 Профессиональная или Windows XP (Volume License)

Пакет офисного программного обеспечения Microsoft Office 365 или Microsoft Office Professional plus 2010

Браузер Mozilla Firefox

Браузер Google Chrome

Adobe Reader XI или Adobe Acrobat Reader DC

Kaspersky Endpoint Security для Windows

Учебно-методическая литература для данной дисциплины имеется в наличии в электронно-библиотечной системе "ZNANIUM.COM", доступ к которой предоставлен обучающимся. ЭБС "ZNANIUM.COM" содержит произведения крупнейших российских учёных, руководителей государственных органов, преподавателей ведущих вузов страны, высококвалифицированных специалистов в различных сферах бизнеса. Фонд библиотеки сформирован с учетом всех изменений образовательных стандартов и включает учебники, учебные пособия, учебно-методические комплексы, монографии, авторефераты, диссертации, энциклопедии, словари и справочники, законодательно-нормативные документы, специальные периодические издания и издания, выпускаемые издательствами вузов. В настоящее время ЭБС ZNANIUM.COM соответствует всем требованиям федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования (ФГОС ВО) нового поколения.

Учебно-методическая литература для данной дисциплины имеется в наличии в электронно-библиотечной системе Издательства "Лань", доступ к которой предоставлен обучающимся. ЭБС Издательства "Лань" включает в себя электронные версии книг издательства "Лань" и других ведущих издательств учебной литературы, а также электронные версии периодических изданий по естественным, техническим и гуманитарным наукам. ЭБС Издательства "Лань" обеспечивает доступ к научной, учебной литературе и научным периодическим изданиям по максимальному количеству профильных направлений с соблюдением всех авторских и смежных прав.