

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования  
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"  
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского



УТВЕРЖДАЮ  
Проректор по образовательной деятельности КФУ  
Проф. Д.А. Таюрский

« 01 » июня 2021 г.

*подписано электронно-цифровой подписью*

## Программа дисциплины

Дифференциальная геометрия

Направление подготовки: 44.03.01 - Педагогическое образование

Профиль подготовки: Математика и информационные технологии в образовании

Квалификация выпускника: бакалавр

Форма обучения: заочное

Язык обучения: русский

Год начала обучения по образовательной программе: 2021

## Содержание

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения ОПОП ВО
2. Место дисциплины (модуля) в структуре ОПОП ВО
3. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся
4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий
  - 4.1. Структура и тематический план контактной и самостоятельной работы по дисциплине (модулю)
  - 4.2. Содержание дисциплины (модуля)
5. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)
6. Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю)
7. Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)
8. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)
9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)
10. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)
11. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)
12. Средства адаптации преподавания дисциплины (модуля) к потребностям обучающихся инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья
13. Приложение №1. Фонд оценочных средств
14. Приложение №2. Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)
15. Приложение №3. Перечень информационных технологий, используемых для освоения дисциплины (модуля), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем

Программу дисциплины разработал(а)(и): доцент, к.н. (доцент) Нигмедзянова А.М. (кафедра высшей математики и математического моделирования, отделение педагогического образования), Aigul.Nigmedzyanova@kpfu.ru

### 1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения ОПОП ВО

Обучающийся, освоивший дисциплину (модуль), должен обладать следующими компетенциями:

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
ОПК-8	Способен осуществлять педагогическую деятельность на основе специальных научных знаний
УК-1	Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач

Обучающийся, освоивший дисциплину (модуль):

Должен знать:

основные понятия и методы дифференциальной геометрии и неевклидовых пространств, формулировки утверждений и методы их доказательства, основные области их приложений, в том числе в компьютерном моделировании геометрических объектов и явлений.

Должен уметь:

решать задачи вычислительного и теоретического характера в области дифференциальной геометрии и неевклидова пространства, доказывать утверждения.

Должен владеть:

математическим аппаратом дифференциальной геометрии и неевклидовых пространств, методами решения задач и доказательства утверждений в этой области.

Должен демонстрировать способность и готовность:

Понимать идеи, цели и задачи предмета, его связь с другими математическими дисциплинами.

### 2. Место дисциплины (модуля) в структуре ОПОП ВО

Данная дисциплина (модуль) включена в раздел "Б1.О.06.10 Дисциплины (модули)" основной профессиональной образовательной программы 44.03.01 "Педагогическое образование (Математика и информационные технологии в образовании)" и относится к обязательным дисциплинам.

Осваивается на 2, 3 курсах в 4, 5 семестрах.

### 3. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зачетных(ые) единиц(ы) на 144 часа(ов).

Контактная работа - 21 часа(ов), в том числе лекции - 10 часа(ов), практические занятия - 0 часа(ов), лабораторные работы - 10 часа(ов), контроль самостоятельной работы - 1 часа(ов).

Самостоятельная работа - 114 часа(ов).

Контроль (зачёт / экзамен) - 9 часа(ов).

Форма промежуточного контроля дисциплины: отсутствует в 4 семестре; экзамен в 5 семестре.

### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

#### 4.1 Структура и тематический план контактной и самостоятельной работы по дисциплине (модулю)

N	Разделы дисциплины / модуля	Се-местр	Виды и часы контактной работы, их трудоемкость (в часах)						Само-стоя-тель-ная ра-бота
			Лекции, всего	Лекции в эл. форме	Практи-ческие занятия, всего	Практи-ческие в эл. форме	Лабора-торные работы, всего	Лабора-торные в эл. форме	
N	Разделы дисциплины / модуля	Се-местр	Виды и часы контактной работы, их трудоемкость (в часах)						Само-стоя-тель-ная ра-бота
			Лекции, всего	Лекции в эл. форме	Практи-ческие занятия, всего	Практи-ческие в эл. форме	Лабора-торные работы, всего	Лабора-торные в эл. форме	
1.	Тема 1. Дифференциальная геометрия кривых	4	4	0	0	0	4	0	10
2.	Тема 2. Дифференциальная геометрия поверхностей	4	4	0	0	0	4	0	10
3.	Тема 3. Неевклидовы пространства	5	1	0	0	0	1	0	50
<b>4.2 Содержание дисциплины (модуля)</b>									
4.2	Тема 1. Элементы тензорного анализа	5	1	0	0	0	1	0	44

1. Предмет курса дифференциальной геометрии. Векторная функция скалярного аргумента. Дифференцирование и интегрирование векторных функций скалярного аргумента. Географ векторной функции. Векторные функции со специальными свойствами (Теоремы о векторных функциях постоянной длины, постоянного направления и параллельной постоянной плоскости). (2)

2. Кривые в пространстве. Параметризованная кривая. Касательная и нормаль к кривой. Поверхность и ее касательные. Нормаль поверхности. Особые точки. Неявное задание кривой. (2)

3. Соприкосновение кривых. Соприкосновение кривой и поверхности. Соприкасающаяся плоскость. (2)

4. Основной (сопровождающий) трехгранник кривой, заданной параметрически. Длина дуги как параметр. Натуральная параметризация кривой. (2)

5. Вывод формул Серре-Френе. Примеры. Разложение производных по натуральному параметру. (2)

6. Геометрический смысл кривизны и кручения. Формулы для вычисления кривизны и кручения. Натуральные уравнения кривой. (2)

### Тема 2. Дифференциальная геометрия поверхностей

1. Различные способы задания поверхности. Касательные прямые и касательные плоскости к кривой. Нормаль к поверхности. Криволинейные координаты. Линии на поверхности. (2)
2. Первая квадратичная форма поверхности. Длина дуги кривой на поверхности. Нахождение угла между кривыми на поверхности. Вычисление площади поверхности. Изгибание и наложимость. Понятие о внутренней геометрии поверхности и метрическом тензоре поверхности. (2)
3. Вторая квадратичная форма поверхности. Кривизна линий на поверхности. (2)
4. Инварианты пары квадратичных форм. Главные кривизны и направления кривизн. Гауссова и средняя кривизны. Свойства второй квадратичной формы. Локальные свойства поверхности (Формула Эйлера и теоремы). (2)
5. Изгибание и наложимость. Предмет внутренней геометрии поверхности. Нормальная и геодезические кривизны. Символы Кристоффеля. Уравнения геодезических. Классификация точек поверхности. (2)
6. Геодезические на поверхностях вращения. Теорема Клеро. (2)

### Тема 3. Неевклидовы пространства

1. Внутренняя геометрия сферы. Отношение длины окружности на сфере к ее радиусу. Линии на сфере. (2)
2. Стереографическая проекция сферы на плоскость. Геодезическая и нормальная кривизна параллелей и меридианов. Геодезические на сфере. Сумма углов геодезического треугольника на сфере. (2)
3. Внутренняя геометрия псевдосферы. Отношение длины окружности на псевдосфере к ее радиусу. Линии на псевдосфере. Стереографическая проекция псевдосферы на плоскость. Геодезические линии на псевдосфере.
4. Модель Кэли-Клейна плоскости Лобачевского. (2)
5. Метрический тензор и алгебра тензоров. (2)
6. Риманова метрика и римановы пространства. (2)

### Тема 4. Элементы тензорного анализа

Тензорная алгебра. Тензоры в векторном пространстве.  
 Координаты тензора и закон их преобразования.  
 Примеры тензоров. Линейные операции с тензорами. Тензорное умножение. Операция свертывания.  
 Кососимметричные тензоры (внешние формы), их внешнее (косое) умножение.

Тензоры в евклидовом пространстве. Уравнения параллельного перенесения.

### **5. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)**

Самостоятельная работа обучающихся выполняется по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия. Самостоятельная работа подразделяется на самостоятельную работу на аудиторных занятиях и на внеаудиторную самостоятельную работу. Самостоятельная работа обучающихся включает как полностью самостоятельное освоение отдельных тем (разделов) дисциплины, так и проработку тем (разделов), осваиваемых во время аудиторной работы. Во время самостоятельной работы обучающиеся читают и конспектируют учебную, научную и справочную литературу, выполняют задания, направленные на закрепление знаний и отработку умений и навыков, готовятся к текущему и промежуточному контролю по дисциплине.

Организация самостоятельной работы обучающихся регламентируется нормативными документами, учебно-методической литературой и электронными образовательными ресурсами, включая:

Порядок организации и осуществления образовательной деятельности по образовательным программам высшего образования - программам бакалавриата, программам специалитета, программам магистратуры (утвержден приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации от 6 апреля 2021 года №245)

Письмо Министерства образования Российской Федерации №14-55-996ин/15 от 27 ноября 2002 г. "Об активизации самостоятельной работы студентов высших учебных заведений"

Устав федерального государственного автономного образовательного учреждения "Казанский (Приволжский) федеральный университет"

Правила внутреннего распорядка федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования "Казанский (Приволжский) федеральный университет"

Локальные нормативные акты Казанского (Приволжского) федерального университета

### **6. Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю)**

Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю) включает оценочные материалы, направленные на проверку освоения компетенций, в том числе знаний, умений и навыков. Фонд оценочных средств включает оценочные средства текущего контроля и оценочные средства промежуточной аттестации.

В фонде оценочных средств содержится следующая информация:

- соответствие компетенций планируемым результатам обучения по дисциплине (модулю);
- критерии оценивания сформированности компетенций;
- механизм формирования оценки по дисциплине (модулю);
- описание порядка применения и процедуры оценивания для каждого оценочного средства;
- критерии оценивания для каждого оценочного средства;
- содержание оценочных средств, включая требования, предъявляемые к действиям обучающихся, демонстрируемым результатам, задания различных типов.

Фонд оценочных средств по дисциплине находится в Приложении 1 к программе дисциплины (модулю).

### **7. Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)**

Освоение дисциплины (модуля) предполагает изучение основной и дополнительной учебной литературы. Литература может быть доступна обучающимся в одном из двух вариантов (либо в обоих из них):

- в электронном виде - через электронные библиотечные системы на основании заключенных КФУ договоров с правообладателями;
- в печатном виде - в Научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского. Обучающиеся получают учебную литературу на абонементе по читательским билетам в соответствии с правилами пользования Научной библиотекой.

Электронные издания доступны дистанционно из любой точки при введении обучающимся своего логина и пароля от личного кабинета в системе "Электронный университет". При использовании печатных изданий библиотечный фонд должен быть укомплектован ими из расчета не менее 0,5 экземпляра (для обучающихся по ФГОС 3++ - не менее 0,25 экземпляра) каждого из изданий основной литературы и не менее 0,25 экземпляра дополнительной литературы на каждого обучающегося из числа лиц, одновременно осваивающих данную дисциплину.

Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля), находится в Приложении 2 к рабочей программе дисциплины. Он подлежит обновлению при изменении условий договоров КФУ с правообладателями электронных изданий и при изменении комплектования фондов Научной библиотеки КФУ.

### 8. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

книги по дифференциальной геометрии и неевклидовым пространствам -

[http://l49-60-100.cn.ru/www.ph4s.ru/book\\_mat\\_difgeom.html](http://l49-60-100.cn.ru/www.ph4s.ru/book_mat_difgeom.html)

лекции по дифференциальной геометрии - <http://www.twirpx.com/files/mathematics/algebra/difgeo/>

практикум по дифференциальной геометрии - [https://math.hse.ru/courses\\_math/bac4-11-dg](https://math.hse.ru/courses_math/bac4-11-dg)

Учебные материалы по дифференциальной геометрии МГУ - <http://dfgm.math.msu.su/materials.php>

электронная библиотека по дифференциальной геометрии и тензорному анализу -

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/difgeometry.htm>

### 9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Вид работ	Методические рекомендации
лекции	На лекциях преподаватель рассматривает вопросы программы курса, составленной в соответствии с государственным образовательным стандартом. Из-за недостаточного количества аудиторных часов некоторые темы не удастся осветить в полном объеме, поэтому преподаватель, по своему усмотрению, большее количество вопросов выносит на самостоятельную работу студентов, рекомендуя ту или иную литературу. практические занятия
лабораторные работы	Кроме этого, для лучшего освоения материала и систематизации знаний по дисциплине, необходимо постоянно разбирать материалы лекций по конспектам и учебным пособиям и практические задания выполнять самостоятельно. В случае необходимости обращаться к преподавателю за консультацией. Полный список литературы по дисциплине приведен в пункте 7.1.
самостоятельная работа	В самостоятельной работе использовать интернет -ресурсы, а также образцы выполненных на практических занятиях работ. При изучении курса необходимо выполнять и вовремя сдавать преподавателю индивидуальные лабораторные работы.3. Пакет заданий для самостоятельной работы следует выдавать в начале семестра, определив предельные сроки их выполнения и сдачи.
экзамен	Экзамен принимается на основе самостоятельно проделанных студентами работ (индивидуальных заданий) и теоретических вопросов. Проверка, контроль и оценка знаний студента, требуют учета его индивидуального стиля в осуществлении учебной деятельности. По этому важную роль будет играть творческий подход студентов к выполнению заданий.

### 10. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем, представлен в Приложении 3 к рабочей программе дисциплины (модуля).

### 11. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Материально-техническое обеспечение образовательного процесса по дисциплине (модулю) включает в себя следующие компоненты:

Помещения для самостоятельной работы обучающихся, укомплектованные специализированной мебелью (столы и стулья) и оснащенные компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду КФУ.

Учебные аудитории для контактной работы с преподавателем, укомплектованные специализированной мебелью (столы и стулья).

Компьютер и принтер для распечатки раздаточных материалов.

Мультимедийная аудитория.

### 12. Средства адаптации преподавания дисциплины к потребностям обучающихся инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья

При необходимости в образовательном процессе применяются следующие методы и технологии, облегчающие восприятие информации обучающимися инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья:

- создание текстовой версии любого нетекстового контента для его возможного преобразования в альтернативные формы, удобные для различных пользователей;
- создание контента, который можно представить в различных видах без потери данных или структуры, предусмотреть возможность масштабирования текста и изображений без потери качества, предусмотреть доступность управления контентом с клавиатуры;
- создание возможностей для обучающихся воспринимать одну и ту же информацию из разных источников - например, так, чтобы лица с нарушениями слуха получали информацию визуально, с нарушениями зрения - аудиально;
- применение программных средств, обеспечивающих возможность освоения навыков и умений, формируемых дисциплиной, за счёт альтернативных способов, в том числе виртуальных лабораторий и симуляционных технологий;
- применение дистанционных образовательных технологий для передачи информации, организации различных форм интерактивной контактной работы обучающегося с преподавателем, в том числе вебинаров, которые могут быть использованы для проведения виртуальных лекций с возможностью взаимодействия всех участников дистанционного обучения, проведения семинаров, выступления с докладами и защиты выполненных работ, проведения тренингов, организации коллективной работы;
- применение дистанционных образовательных технологий для организации форм текущего и промежуточного контроля;
- увеличение продолжительности сдачи обучающимся инвалидом или лицом с ограниченными возможностями здоровья форм промежуточной аттестации по отношению к установленной продолжительности их сдачи:
- продолжительности сдачи зачёта или экзамена, проводимого в письменной форме, - не более чем на 90 минут;
- продолжительности подготовки обучающегося к ответу на зачёте или экзамене, проводимом в устной форме, - не более чем на 20 минут;
- продолжительности выступления обучающегося при защите курсовой работы - не более чем на 15 минут.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО и учебным планом по направлению 44.03.01 "Педагогическое образование" и профилю подготовки "Математика и информационные технологии в образовании".

### Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)

Направление подготовки: 44.03.01 - Педагогическое образование

Профиль подготовки: Математика и информационные технологии в образовании

Квалификация выпускника: бакалавр

Форма обучения: заочное

Язык обучения: русский

Год начала обучения по образовательной программе: 2021

#### Основная литература:

1. Кузовлев, В.П. Курс геометрии: элементы топологии, дифференциальная геометрия, основания геометрии : учебник / В.П. Кузовлев, Н.Г. Подаева. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2012. - 208 с. - ISBN 978-5-9221-1360-1. - Текст : электронный // Электронно-библиотечная система 'Лань' : [сайт]. - URL: <https://e.lanbook.com/book/59618> (дата обращения: 10.05.2020). - Режим доступа: для авториз. пользователей.
2. Розендорн, Э.Р. Задачи по дифференциальной геометрии : учебное пособие / Э.Р. Розендорн. - 3-е изд., испр. и доп. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2008. - 144 с. - ISBN 978-5-9221-0821-8. - Текст : электронный // Электронно-библиотечная система 'Лань' : [сайт]. - URL: <https://e.lanbook.com/book/2295> (дата обращения: 10.05.2020). - Режим доступа: для авториз. пользователей.
3. Паньженский, В.И. Введение в дифференциальную геометрию : учебное пособие / В.И. Паньженский. - 2-е изд., испр. - Санкт-Петербург : Лань, 2015. - 240 с. - ISBN 978-5-8114-1979-1. - Текст : электронный // Электронно-библиотечная система 'Лань' : [сайт]. - URL: <https://e.lanbook.com/book/67459> (дата обращения: 10.05.2020). - Режим доступа: для авториз. пользователей.

#### Дополнительная литература:

1. Шаров, Г.С. Сборник задач по дифференциальной геометрии : учебное пособие / Г.С. Шаров, А.М. Шелехов, М.А. Шестакова. - Москва : МЦНМО, 2005. - 112 с. - ISBN 5-94057-207-3. - Текст : электронный // Электронно-библиотечная система 'Лань' : [сайт]. - URL: <https://e.lanbook.com/book/9440> (дата обращения: 10.05.2020). - Режим доступа: для авториз. пользователей.
2. Скопенков, А.Б. Основы дифференциальной геометрии в интересных задачах : учебное пособие / А.Б. Скопенков. - 2-е изд., испр. - Москва : МЦНМО, 2010. - 72 с. - ISBN 978-5-94057-630-3. - Текст : электронный // Электронно-библиотечная система 'Лань' : [сайт]. - URL: <https://e.lanbook.com/book/9416> (дата обращения: 10.05.2020). - Режим доступа: для авториз. пользователей.
3. Сизый, С.В. Лекции по дифференциальной геометрии : учебное пособие / С.В. Сизый. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2007. - 346 с. - ISBN 978-5-9221-0742-6. - Текст : электронный // Электронно-библиотечная система 'Лань' : [сайт]. - URL: <https://e.lanbook.com/book/2320> (дата обращения: 10.05.2020). - Режим доступа: для авториз. пользователей.



Приложение 3  
к рабочей программе дисциплины (модуля)  
Б1.О.06.10 Дифференциальная геометрия

**Перечень информационных технологий, используемых для освоения дисциплины (модуля), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем**

Направление подготовки: 44.03.01 - Педагогическое образование

Профиль подготовки: Математика и информационные технологии в образовании

Квалификация выпускника: бакалавр

Форма обучения: заочное

Язык обучения: русский

Год начала обучения по образовательной программе: 2021

Освоение дисциплины (модуля) предполагает использование следующего программного обеспечения и информационно-справочных систем:

Операционная система Microsoft Windows 7 Профессиональная или Windows XP (Volume License)

Пакет офисного программного обеспечения Microsoft Office 365 или Microsoft Office Professional plus 2010

Браузер Mozilla Firefox

Браузер Google Chrome

Adobe Reader XI или Adobe Acrobat Reader DC

Kaspersky Endpoint Security для Windows

Учебно-методическая литература для данной дисциплины имеется в наличии в электронно-библиотечной системе "ZNANIUM.COM", доступ к которой предоставлен обучающимся. ЭБС "ZNANIUM.COM" содержит произведения крупнейших российских учёных, руководителей государственных органов, преподавателей ведущих вузов страны, высококвалифицированных специалистов в различных сферах бизнеса. Фонд библиотеки сформирован с учетом всех изменений образовательных стандартов и включает учебники, учебные пособия, учебно-методические комплексы, монографии, авторефераты, диссертации, энциклопедии, словари и справочники, законодательно-нормативные документы, специальные периодические издания и издания, выпускаемые издательствами вузов. В настоящее время ЭБС ZNANIUM.COM соответствует всем требованиям федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования (ФГОС ВО) нового поколения.

Учебно-методическая литература для данной дисциплины имеется в наличии в электронно-библиотечной системе Издательства "Лань", доступ к которой предоставлен обучающимся. ЭБС Издательства "Лань" включает в себя электронные версии книг издательства "Лань" и других ведущих издательств учебной литературы, а также электронные версии периодических изданий по естественным, техническим и гуманитарным наукам. ЭБС Издательства "Лань" обеспечивает доступ к научной, учебной литературе и научным периодическим изданиям по максимальному количеству профильных направлений с соблюдением всех авторских и смежных прав.