

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования  
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"  
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского



подписано электронно-цифровой подписью

## Программа дисциплины

### Фрактальная геометрия природы

Направление подготовки: 01.03.01 - Математика

Профиль подготовки: Математика в цифровой экономике

Квалификация выпускника: бакалавр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

Год начала обучения по образовательной программе: 2021

## **Содержание**

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения ОПОП ВО
2. Место дисциплины (модуля) в структуре ОПОП ВО
3. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся
4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий
  - 4.1. Структура и тематический план контактной и самостоятельной работы по дисциплине (модулю)
  - 4.2. Содержание дисциплины (модуля)
5. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)
6. Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю)
7. Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)
8. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)
9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)
10. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)
11. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)
12. Средства адаптации преподавания дисциплины (модуля) к потребностям обучающихся инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья
13. Приложение №1. Фонд оценочных средств
14. Приложение №2. Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)
15. Приложение №3. Перечень информационных технологий, используемых для освоения дисциплины (модуля), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем

Программу дисциплины разработал(а)(и): старший преподаватель, б/с Зубкова С.К. (Кафедра геометрии, отделение математики), Svetlana.Kuzmina@kpfu.ru ; заведующий кафедрой, д.н. (доцент) Попов А.А. (Кафедра геометрии, отделение математики), aporov@kpfu.ru

## **1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения ОПОП ВО**

Обучающийся, освоивший дисциплину (модуль), должен обладать следующими компетенциями:

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
ПК-2	Способен активно участвовать в исследовании новых математических моделей в естественных науках

Обучающийся, освоивший дисциплину (модуль):

Должен знать:

основные понятия предмета, определения и свойства математических объектов, используемых в этой области, формулировки утверждений, методы их доказательства, возможные сферы их приложений.

Должен уметь:

решать задачи теоретического и прикладного характера из различных разделов предмета, доказывать утверждения, строить модели объектов и понятий.

Должен владеть:

математическим аппаратом предмета, методами доказательства утверждений в этой области, навыками решения основных задач.

Должен демонстрировать способность и готовность:

Демонстрировать основные понятия, идеи и методы фрактальной геометрии, основные алгоритмы построения фрактальных множеств. Ориентироваться в структуре фрактальной геометрии, решать задачи на вычисление параметров фрактальных множеств, строить различные фрактальные множества на компьютере.

## **2. Место дисциплины (модуля) в структуре ОПОП ВО**

Данная дисциплина (модуль) включена в раздел "Б1.В.ДВ.09.04 Дисциплины (модули)" основной профессиональной образовательной программы 01.03.01 "Математика (Математика в цифровой экономике)" и относится к дисциплинам по выбору части ОПОП ВО, формируемой участниками образовательных отношений.

Осваивается на 4 курсе в 8 семестре.

## **3. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся**

Общая трудоемкость дисциплины составляет 2 зачетных(ые) единиц(ы) на 72 часа(ов).

Контактная работа - 41 часа(ов), в том числе лекции - 20 часа(ов), практические занятия - 20 часа(ов), лабораторные работы - 0 часа(ов), контроль самостоятельной работы - 1 часа(ов).

Самостоятельная работа - 31 часа(ов).

Контроль (зачёт / экзамен) - 0 часа(ов).

Форма промежуточного контроля дисциплины: зачет в 8 семестре.

## **4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий**

### **4.1 Структура и тематический план контактной и самостоятельной работы по дисциплине (модулю)**

N	Разделы дисциплины / модуля	Се- мestr	Виды и часы контактной работы, их трудоемкость (в часах)						Само- стоя- тель- ная ра- бота	
			Лекции, всего	Лекции, в эл. форме	Практи- ческие занятия, всего	Практи- ческие в эл. форме	Лабора- торные работы, всего	Лабора- торные в эл. форме		
1	Тема 1. Фрактальная размерность. Размерность									

подобия. L-системы.

N	Разделы дисциплины / модуля	Се-мestr	Виды и часы контактной работы, их трудоемкость (в часах)							Само-стое-тель-ная ра-бота
			Лекции, всего	Лекции в эл. форме	Практические занятия, всего	Практические в эл. форме	Лабора-торные работы, всего	Лабора-торные в эл. форме		
2.	Тема 2. Фрактальная размерность кластеров. Образование вязких пальцев. Протекание и перколоция.	8	4	1	4	1	0	0	6	
3.	Тема 3. Фрактальные временные ряды. Соотношения между длиной, площадью и объемом.	8	4	1	4	1	0	0	6	
4.	Тема 4. Случайное блуждание и фракталы. Фрактальные поверхности. Мультифрактальные меры.	8	4	1	4	1	0	0	6	
5.	Тема 5. Показатель Липшица-Гельдера. Самоподобие и самоаффинность. Отличие между самоподобием и самоаффинностью. Стратегия смелой игры.	8	4	1	4	1	0	0	7	
	Итого		20	6	20	6	0	0	31	

#### 4.2 Содержание дисциплины (модуля)

##### Тема 1. Фрактальная размерность. Размерность подобия. L-системы.

Фрактальная размерность. Длина береговой линии. Триадная кривая Кох. Задачи на построение фрактальных кривых и вычисление их размерностей. Размерность подобия. Пыль Кантора. Кривые Пеано. Задачи на построение множеств типа Кантора и вычисление их размерностей. Компьютерное моделирование с помощью L-систем. Написание компьютерной программы для реализации L-систем.

##### Тема 2. Фрактальная размерность кластеров. Образование вязких пальцев. Протекание и перколоция.

Фрактальная размерность кластеров. Написание компьютерной программы для вычисления фрактальной размерности кластеров. Образование вязких пальцев и ограниченная диффузия агрегация. Написание компьютерной программы для моделирования процесса ОДА. Протекание и перколоция. Самоподобие перколоционных кластеров. Написание компьютерной программы для моделирования перколоции.

##### Тема 3. Фрактальные временные ряды. Соотношения между длиной, площадью и объемом.

Фрактальные временные ряды. Эмпирический закон Херста и метод нормированного размаха. Написание компьютерной программы в Maxima для моделирования временных рядов и исследования временных рядов. Соотношения между длиной, площадью и объемом. Задачи на вычисление соотношений между длиной, площадью и объемом.

##### Тема 4. Случайное блуждание и фракталы. Фрактальные поверхности. Мультифрактальные меры.

Случайное блуждание и фракталы. Броуновское движение. Написание компьютерной программы для моделирования броуновского движения. Фрактальные поверхности. Поверхности случайного переноса. Написание компьютерной программы для построения фрактальных поверхностей. Мультифрактальные меры. Фрактальные подмножества. Написание компьютерной программы для построения фрактальных подмножеств.

##### Тема 5. Показатель Липшица-Гельдера. Самоподобие и самоаффинность. Отличие между самоподобием и самоаффинностью. Стратегия смелой игры.

Показатель Липшица-Гельдера. Концентрация меры. Последовательность показателей массы. Задачи на вычисление показателя Липшица-Гельдера. Свертывание с несколькими масштабами длины высчитанной по заданным параметрам. Самоподобие и самоаффинность. Отличие между самоподобием и самоаффинностью. Стратегия смелой игры.

#### 5. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)

Самостоятельная работа обучающихся выполняется по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия. Самостоятельная работа подразделяется на самостоятельную работу на аудиторных занятиях и на внеаудиторную самостоятельную работу. Самостоятельная работа обучающихся включает как полностью самостоятельное освоение отдельных тем (разделов) дисциплины, так и проработку тем (разделов), осваиваемых во время аудиторной работы. Во время самостоятельной работы обучающиеся читают и конспектируют учебную, научную и справочную литературу, выполняют задания, направленные на закрепление знаний и отработку умений и навыков, готовятся к текущему и промежуточному контролю по дисциплине.

Организация самостоятельной работы обучающихся регламентируется нормативными документами, учебно-методической литературой и электронными образовательными ресурсами, включая:

Порядок организации и осуществления образовательной деятельности по образовательным программам высшего образования - программам бакалавриата, программам специалитета, программам магистратуры (утвержден приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации от 6 апреля 2021 года №245)

Письмо Министерства образования Российской Федерации №14-55-996бин/15 от 27 ноября 2002 г. "Об активизации самостоятельной работы студентов высших учебных заведений"

Устав федерального государственного автономного образовательного учреждения "Казанский (Приволжский) федеральный университет"

Правила внутреннего распорядка федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования "Казанский (Приволжский) федеральный университет"

Локальные нормативные акты Казанского (Приволжского) федерального университета

Моделирование фракталов в Maxima. Часть I - [kpfu.ru/docs/F1416066913/main.\\_1\\_.pdf](http://kpfu.ru/docs/F1416066913/main._1_.pdf)

Моделирование фракталов в Maxima. Часть II - [kpfu.ru/docs/F1526739216/main.pdf](http://kpfu.ru/docs/F1526739216/main.pdf)

## **6. Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю)**

Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю) включает оценочные материалы, направленные на проверку освоения компетенций, в том числе знаний, умений и навыков. Фонд оценочных средств включает оценочные средства текущего контроля и оценочные средства промежуточной аттестации.

В фонде оценочных средств содержится следующая информация:

- соответствие компетенций планируемым результатам обучения по дисциплине (модулю);
- критерии оценивания сформированности компетенций;
- механизм формирования оценки по дисциплине (модулю);
- описание порядка применения и процедуры оценивания для каждого оценочного средства;
- критерии оценивания для каждого оценочного средства;
- содержание оценочных средств, включая требования, предъявляемые к действиям обучающихся, демонстрируемым результатам, задания различных типов.

Фонд оценочных средств по дисциплине находится в Приложении 1 к программе дисциплины (модулю).

## **7. Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)**

Освоение дисциплины (модуля) предполагает изучение основной и дополнительной учебной литературы. Литература может быть доступна обучающимся в одном из двух вариантов (либо в обоих из них):

- в электронном виде - через электронные библиотечные системы на основании заключенных КФУ договоров с правообладателями;
- в печатном виде - в Научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского. Обучающиеся получают учебную литературу на абонементе по читательским билетам в соответствии с правилами пользования Научной библиотекой.

Электронные издания доступны дистанционно из любой точки при введении обучающимся своего логина и пароля от личного кабинета в системе "Электронный университет". При использовании печатных изданий библиотечный фонд должен быть укомплектован ими из расчета не менее 0,5 экземпляра (для обучающихся по ФГОС 3++ - не менее 0,25 экземпляра) каждого из изданий основной литературы и не менее 0,25 экземпляра дополнительной литературы на каждого обучающегося из числа лиц, одновременно осваивающих данную дисциплину.

Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля), находится в Приложении 2 к рабочей программе дисциплины. Он подлежит обновлению при изменении условий договоров КФУ с правообладателями электронных изданий и при изменении комплектования фондов Научной библиотеки КФУ.

## **8. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

история фракталов - <http://www.3dnews.ru/754657>

Каталог ссылок на сайты о фракталах - <http://fractals.chat.ru/>

о фракталах - <http://www.fractal.org/Bewustzijns-Besturings-Model/Fractals-Useful-Beauty.htm>

### **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

Вид работ	Методические рекомендации
лекции	При подготовке к лекционным занятиям следует повторить теоретический материал, изложенный на предыдущей лекции, в том числе, попытаться решить предложенные ранее лектором теоретические задачи и упражнения, что способствует лучшему усвоению учебного материала, а также пониманию связей между различными разделами изучаемой дисциплины.
практические занятия	При подготовке к каждому практическому занятию следует обратиться к курсу лекций по данному вопросу и учебным пособиям, чтобы уточнить терминологию, найти аналогии анализируемым приемам. При решении типовых задач необходимо стремиться не только к узнаванию и запоминанию алгоритма их решения, но и к пониманию цели его употребления в данном контексте, а также возможностей его адаптации к решению сходных задач, либо задач, решение которых предполагает нахождение способа комбинирования/синтеза уже освоенных ранее алгоритмов решения более простых задач.
самостоятельная работа	Самостоятельная работа студента состоит в изучении теоретического материала и решении теоретических и практических задач и упражнений без участия преподавателя. В том числе, самостоятельная работа включает в себя подготовку ко всем видам занятий и всем формам текущего и итогового контроля, предусмотренных программой дисциплины. При выполнении самостоятельной работы следует пользоваться конспектом лекций, а также рекомендованными учебными и учебно-методическими пособиями.
зачет	При подготовке к зачету следует опираться на учебный материал, изложенный на лекциях, а также в рекомендованных учебниках и учебных пособиях. При ответе на задаваемые вопросы необходимо знать и уметь пояснить на примерах определения используемых в ответе терминов и понятий, а также формулировки соответствующих теоретических результатов.

### **10. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем, представлен в Приложении 3 к рабочей программе дисциплины (модуля).

### **11. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)**

Материально-техническое обеспечение образовательного процесса по дисциплине (модулю) включает в себя следующие компоненты:

Помещения для самостоятельной работы обучающихся, укомплектованные специализированной мебелью (столы и стулья) и оснащенные компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду КФУ.

Учебные аудитории для контактной работы с преподавателем, укомплектованные специализированной мебелью (столы и стулья).

Компьютер и принтер для распечатки раздаточных материалов.

Компьютерный класс.

### **12. Средства адаптации преподавания дисциплины к потребностям обучающихся инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья**

При необходимости в образовательном процессе применяются следующие методы и технологии, облегчающие восприятие информации обучающимися инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья:

- создание текстовой версии любого нетекстового контента для его возможного преобразования в альтернативные формы, удобные для различных пользователей;
- создание контента, который можно представить в различных видах без потери данных или структуры, предусмотреть возможность масштабирования текста и изображений без потери качества, предусмотреть доступность управления контентом с клавиатуры;
- создание возможностей для обучающихся воспринимать одну и ту же информацию из разных источников - например, так, чтобы лица с нарушениями слуха получали информацию визуально, с нарушениями зрения - аудиально;
- применение программных средств, обеспечивающих возможность освоения навыков и умений, формируемых дисциплиной, за счёт альтернативных способов, в том числе виртуальных лабораторий и симуляционных технологий;
- применение дистанционных образовательных технологий для передачи информации, организации различных форм интерактивной контактной работы обучающегося с преподавателем, в том числе вебинаров, которые могут быть использованы для проведения виртуальных лекций с возможностью взаимодействия всех участников дистанционного обучения, проведения семинаров, выступления с докладами и защиты выполненных работ, проведения тренингов, организации коллективной работы;
- применение дистанционных образовательных технологий для организации форм текущего и промежуточного контроля;
- увеличение продолжительности сдачи обучающимся инвалидом или лицом с ограниченными возможностями здоровья форм промежуточной аттестации по отношению к установленной продолжительности их сдачи:
- продолжительности сдачи зачёта или экзамена, проводимого в письменной форме, - не более чем на 90 минут;
- продолжительности подготовки обучающегося к ответу на зачётке или экзамене, проводимом в устной форме, - не более чем на 20 минут;
- продолжительности выступления обучающегося при защите курсовой работы - не более чем на 15 минут.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО и учебным планом по направлению 01.03.01 "Математика" и профилю подготовки "Математика в цифровой экономике".

*Приложение 2*  
к рабочей программе дисциплины (модуля)  
*Б1.В.ДВ.09.04 Фрактальная геометрия природы*

**Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)**

Направление подготовки: 01.03.01 - Математика

Профиль подготовки: Математика в цифровой экономике

Квалификация выпускника: бакалавр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

Год начала обучения по образовательной программе: 2021

**Основная литература:**

1. Игудесман К.Б. Фрактальная геометрия / Игудесман К. Б. ; Казан. гос. ун-т. - Электронные данные (1 файл: 3,53 Мб) .- (Казань : Казанский государственный университет, 2010). - Загл. с экрана. - Режим доступа: открытый . - Текст : электронный. - URL: [http://libweb.kpfu.ru/ebooks/05-IMM/05\\_34\\_2010\\_kl-00005.20.pdf](http://libweb.kpfu.ru/ebooks/05-IMM/05_34_2010_kl-00005.20.pdf) (дата обращения: 12.03.2021).
2. Секованов, В. С. Элементы теории дискретных динамических систем : учебное пособие / В. С. Секованов. - 2-е изд., испр. - Санкт-Петербург : Лань, 2018. - 180 с. - ISBN 978-5-8114-2429-0. - Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/103912> (дата обращения: 12.03.2021). - Режим доступа: для авториз. пользователей.
3. Трошин П. И. Моделирование фракталов в среде Maxima. Часть II. Хаотическая динамика и фракталы: учебно-методическое пособие / П. И. Трошин. - Казань : Казанский федеральный университет, 2012. - 48 с. - Текст : электронный. - URL: <http://kpfu.ru/docs/F1526739216/main.pdf> (дата обращения: 12.03.2021). - Режим доступа: открытый.

**Дополнительная литература:**

1. Стюарт, И. Математические диковинки профессора Стюарта / И. Стюарт ; перевод с английского Н. А. Шиховой. - Москва : Лаборатория знаний, 2017. - 323 с. - ISBN 978-5-00101-572-7. - Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/103032> (дата обращения: 12.03.2021). - Режим доступа: для авториз. пользователей.
2. Многоликий хаос : монография / Е. Ф. Мищенко, В. А. Садовничий, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2012. - 429 с. - ISBN 978-5-9221-1423-3. - Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/48302> (дата обращения: 12.03.2021). - Режим доступа: для авториз. пользователей.
3. Трошин П. И. Моделирование фракталов в среде Maxima. Часть I. Фракталы на плоскости и в пространстве: учебно-методическое пособие / П. И. Трошин. - Казань : Казанский федеральный университет, 2012. - 67 с. - Текст : электронный. - URL: [http://kpfu.ru/docs/F1416066913/main.\\_1\\_.pdf](http://kpfu.ru/docs/F1416066913/main._1_.pdf) (дата обращения: 12.03.2021). - Режим доступа: открытый.

*Приложение 3*  
к рабочей программе дисциплины (модуля)  
*Б1.В.ДВ.09.04 Фрактальная геометрия природы*

**Перечень информационных технологий, используемых для освоения дисциплины (модуля), включая  
перечень программного обеспечения и информационных справочных систем**

Направление подготовки: 01.03.01 - Математика

Профиль подготовки: Математика в цифровой экономике

Квалификация выпускника: бакалавр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

Год начала обучения по образовательной программе: 2021

Освоение дисциплины (модуля) предполагает использование следующего программного обеспечения и информационно-справочных систем:

Операционная система Microsoft Windows 7 Профессиональная или Windows XP (Volume License)

Пакет офисного программного обеспечения Microsoft Office 365 или Microsoft Office Professional plus 2010

Браузер Mozilla Firefox

Браузер Google Chrome

Adobe Reader XI или Adobe Acrobat Reader DC

Kaspersky Endpoint Security для Windows

Учебно-методическая литература для данной дисциплины имеется в наличии в электронно-библиотечной системе "ZNANIUM.COM", доступ к которой предоставлен обучающимся. ЭБС "ZNANIUM.COM" содержит произведения крупнейших российских учёных, руководителей государственных органов, преподавателей ведущих вузов страны, высококвалифицированных специалистов в различных сферах бизнеса. Фонд библиотеки сформирован с учетом всех изменений образовательных стандартов и включает учебники, учебные пособия, учебно-методические комплексы, монографии, авторефераты, диссертации, энциклопедии, словари и справочники, законодательно-нормативные документы, специальные периодические издания и издания, выпускаемые издательствами вузов. В настоящее время ЭБС ZNANIUM.COM соответствует всем требованиям федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования (ФГОС ВО) нового поколения.

Учебно-методическая литература для данной дисциплины имеется в наличии в электронно-библиотечной системе Издательства "Лань", доступ к которой предоставлен обучающимся. ЭБС Издательства "Лань" включает в себя электронные версии книг издательства "Лань" и других ведущих издательств учебной литературы, а также электронные версии периодических изданий по естественным, техническим и гуманитарным наукам. ЭБС Издательства "Лань" обеспечивает доступ к научной, учебной литературе и научным периодическим изданиям по максимальному количеству профильных направлений с соблюдением всех авторских и смежных прав.

Учебно-методическая литература для данной дисциплины имеется в наличии в электронно-библиотечной системе "Консультант студента", доступ к которой предоставлен обучающимся. Многопрофильный образовательный ресурс "Консультант студента" является электронной библиотечной системой (ЭБС), предоставляющей доступ через сеть Интернет к учебной литературе и дополнительным материалам, приобретенным на основании прямых договоров с правообладателями. Полностью соответствует требованиям федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования к комплектованию библиотек, в том числе электронных, в части формирования фондов основной и дополнительной литературы.